Algoritmos e Estruturas de Dados II
Grafos – conceitos gerais

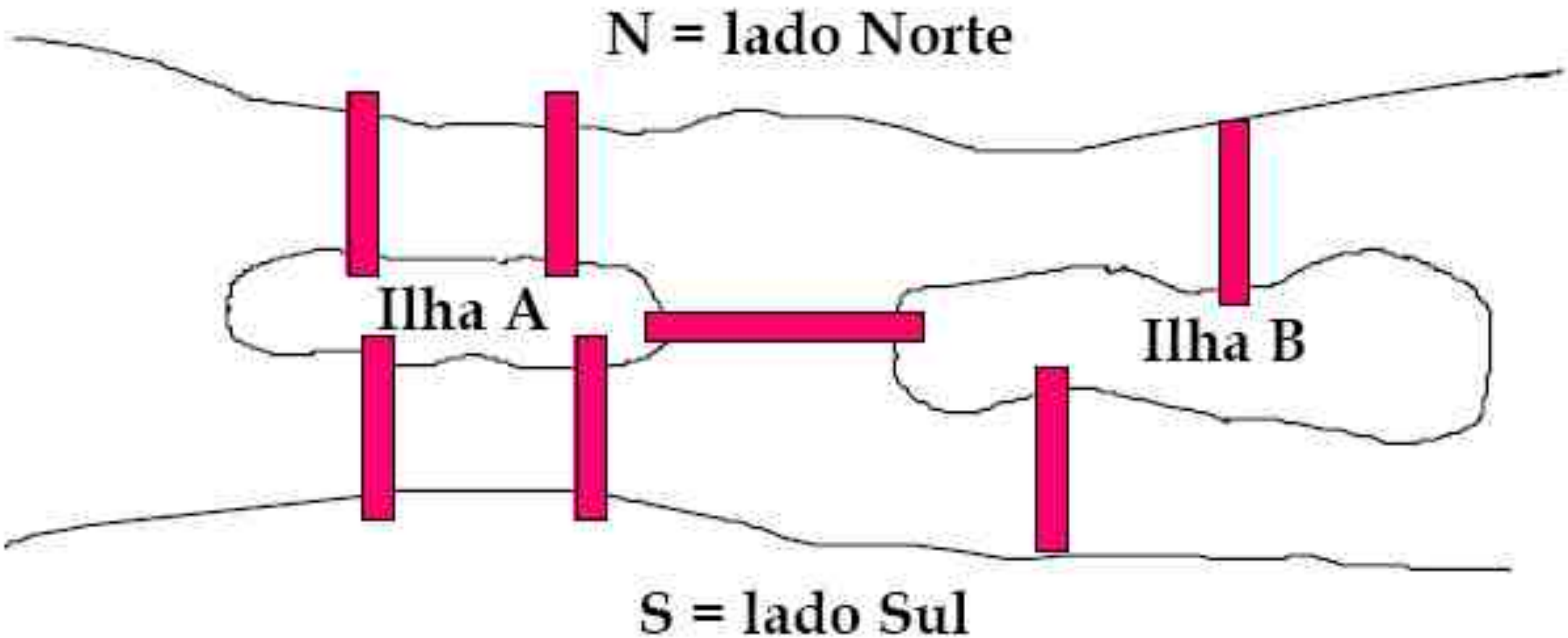
Thiago A. S. Pardo
Profa. M. Cristina
Material de aula da Profa.
Josiane M. Bueno

Grafos - Motivação

- Grafos: conceito introduzido por Euler, em 1736
  - Problema da Ponte de Könisberg
- Modelos matemáticos para resolver problemas práticos do dia a dia
- Muito usados para modelar problemas em computação -> ênfase em aspectos computacionais

Um problema famoso

As 7 pontes de Konigsberg



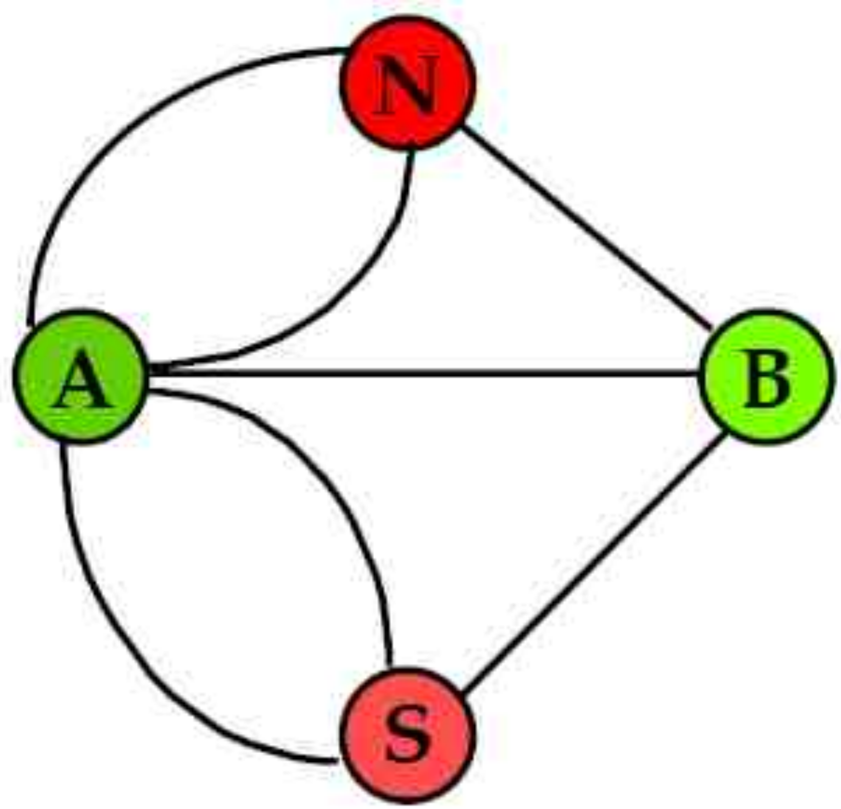
Grafos - Motivação

- Não é exatamente um problema de Ciência da Computação...
- Mas a Teoria dos Grafos permite que ele seja resolvido automaticamente, usando o computador como ferramenta

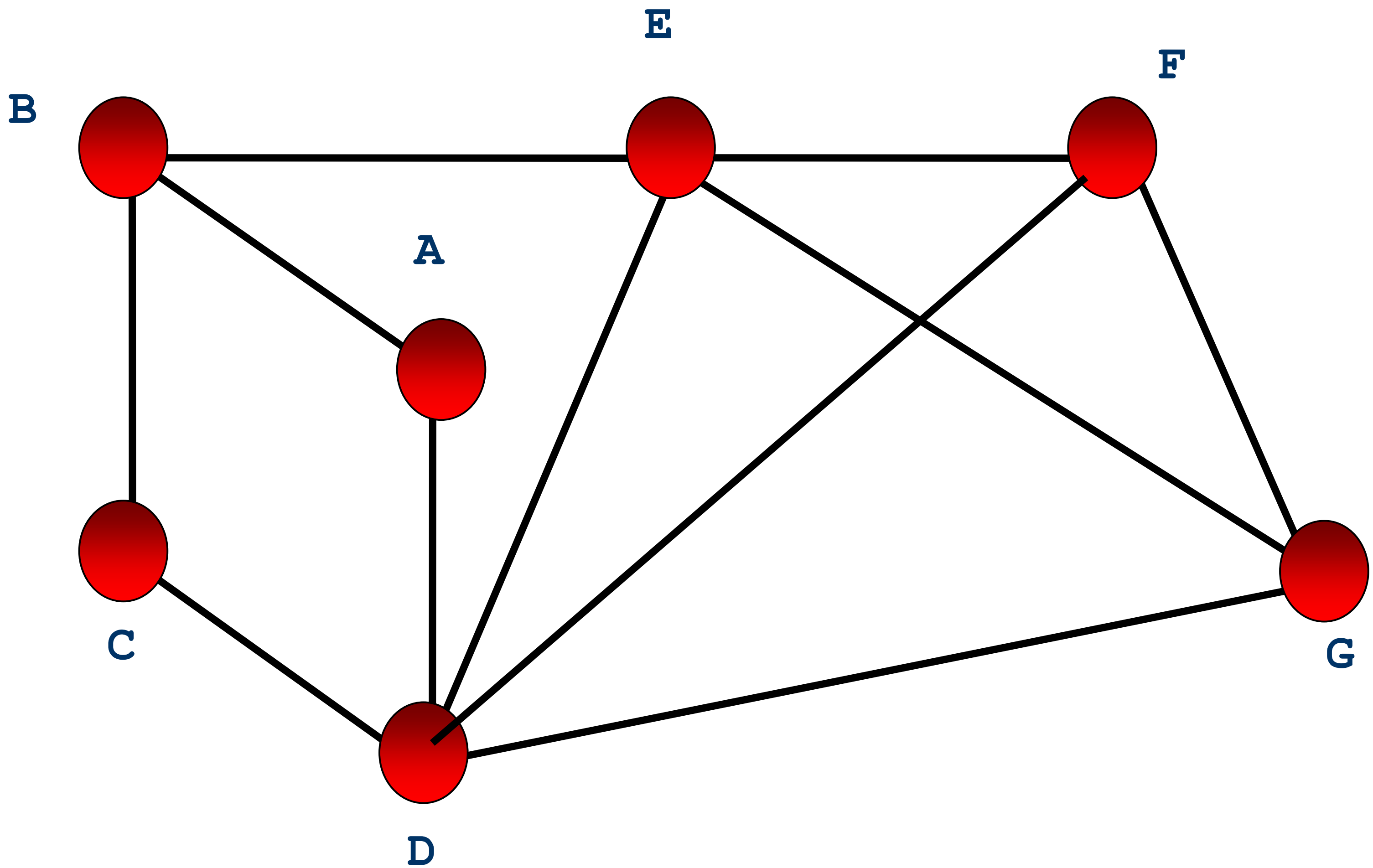
Exemplos de estruturas que podem ser representadas como grafos

- Circuitos elétricos
- Redes de distribuição
- Relações de parentesco entre pessoas
- Rede de estradas entre cidades
- Outros?

Exemplo



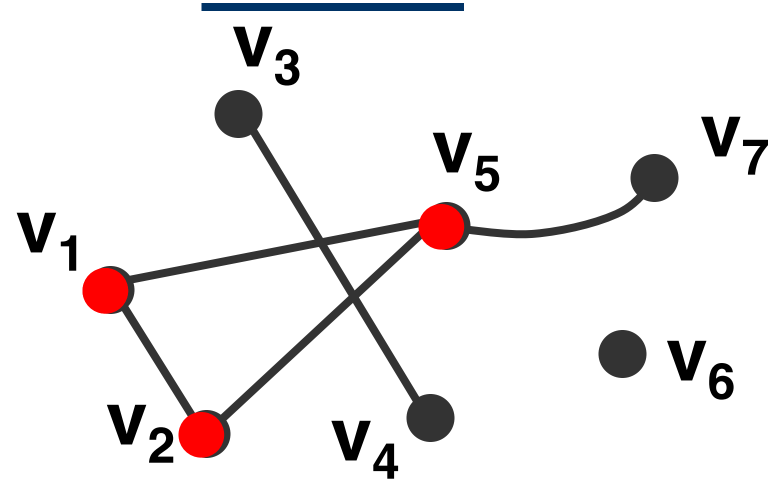
Exemplo



Grafos
Definição

- Grafo é modelo matemático que representa relações entre objetos. Um grafo *$G = (V,E)$* consiste de um conjunto de <u>vértices</u> *V*, ligados por um conjunto de <u>arestas</u> ou <u>arcos</u> *E*.

Representação :



$V(G) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$

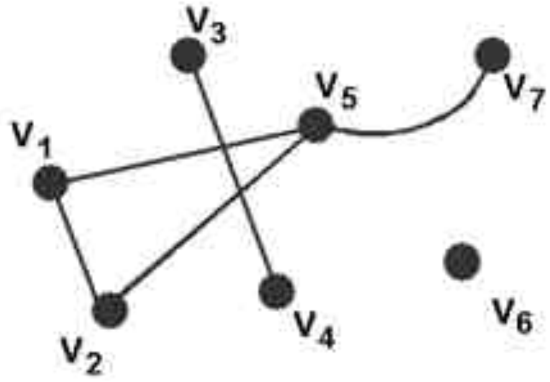
$E(G) = \{(v_1, v_2); \ (v_1,v_5); \ (v_2,v_5); \ (v_3,v_4); \ (v_5,v_7)\}$

Grafos
Definição

- A **ordem** de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices $|V(G)|$, ou seja, pelo <u>número de vértices</u> de G.
- O **número de arestas** de um grafo é dado por $|E(G)|$. Assim, para o grafo do exemplo anterior:

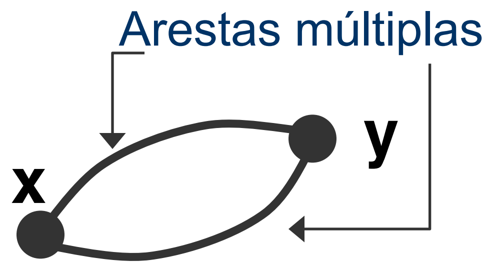
$$|V(G)| = 7$$

$$|E(G)| = 5$$



Grafos
Multigrafo

- Quando um grafo possui mais de uma aresta interligando os mesmos dois vértices diz-se que este grafo possui **arestas múltiplas** (ou **arestas paralelas**).
- Um grafo **simples** não possui arestas múltiplas. Caso contrário, trata-se de um **multigrafo** ou **grafo múltiplo**. Por exemplo:



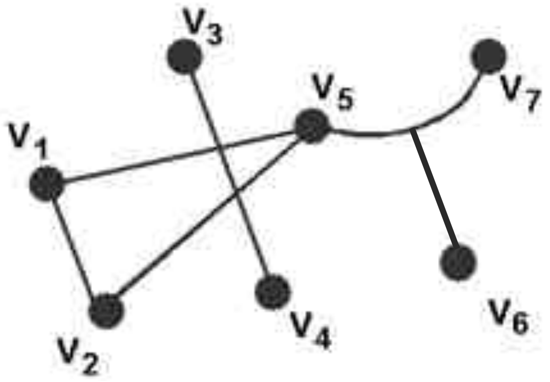
$V = \{x, y\}$

$E = \{(x,y); (y,x)\}$

$|V| = 2$ e $|E| = 2$

Grafos
Hipergrafo

- Um grafo é chamado de hipergrafo quando há arestas que conectam mais de 2 vértices



Grafos

Grafo Trivial e Grafo Vazio

- Um grafo é dito **trivial** se for de ordem 0 ou 1. Por exemplo:

v_1 ●

$$V = \{v_1\}$$

$$E = \varnothing$$

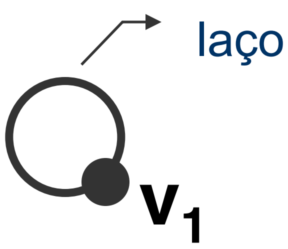
$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 0$$

- Um grafo **vazio** $G=(\varnothing, \varnothing)$ pode ser representado somente por $G = \varnothing$.

Grafos
Laço

- Se houver uma aresta *e* do grafo *G* que possui o mesmo vértice como extremos, ou seja, *e*=(x,x), então é dito que este grafo possui um laço.

Exemplo:



$$V = \{v_1\}$$

$$E = \{(v_1, v_1)\}$$

$$|V| = 1 \text{ e } |E| = 1$$

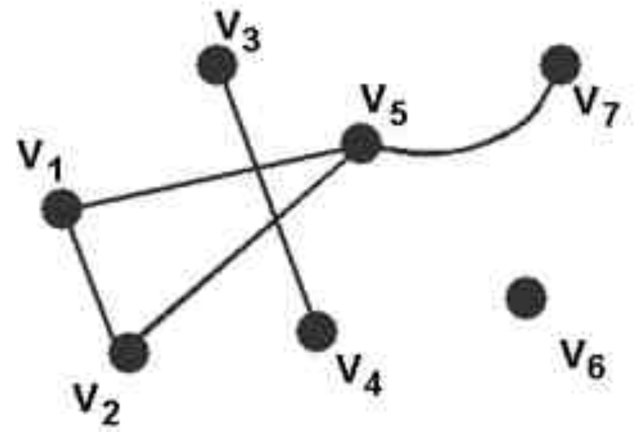
Grafos
Vértices Adjacentes

- Diz-se que os vértices x e y são **adjacentes** (ou vizinhos) quando estes forem os extremos de uma mesma aresta *e*=(x,y). Assim:

v_3 é **adjacente** a v_4

v_4 é **adjacente** a v_3

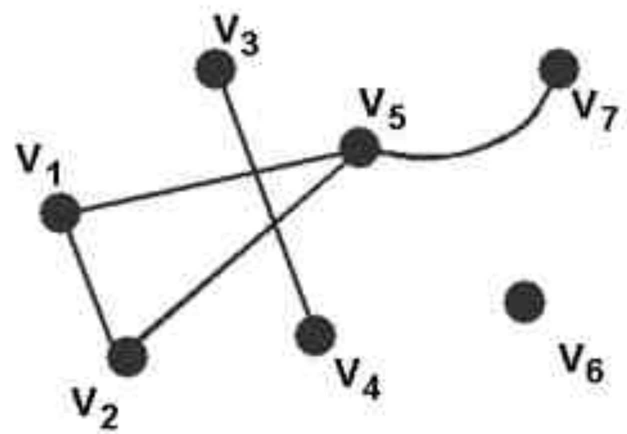
v_5 NÃO é **adjacente** a v_4



Grafos
Arestas Adjacentes

- Diz-se que duas arestas são **adjacentes** (ou vizinhas) quando estas possuírem um mesmo extremo, ou vértice.

Assim:



(v_1,v_2) **é adjacente a** (v_2,v_5)

(v_1,v_2) **NÃO é adjacente a** (v_3,v_4)

A aresta $e=(v_3,v_4)$ é dita **incidente** a v_3 e a v_4

Grafos

Grafo Completo

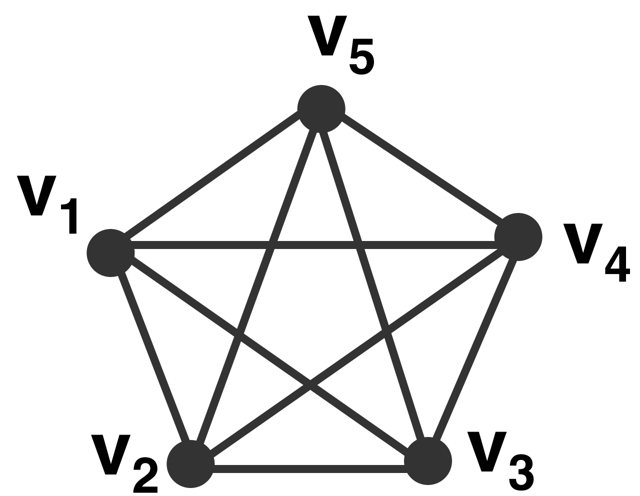
- Um grafo é **completo** se todos os seus vértices forem adjacentes. Um grafo completo K_n possui $n(n-1)/2$ arestas.

Exemplo:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5),$
$(v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5),$
$(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$

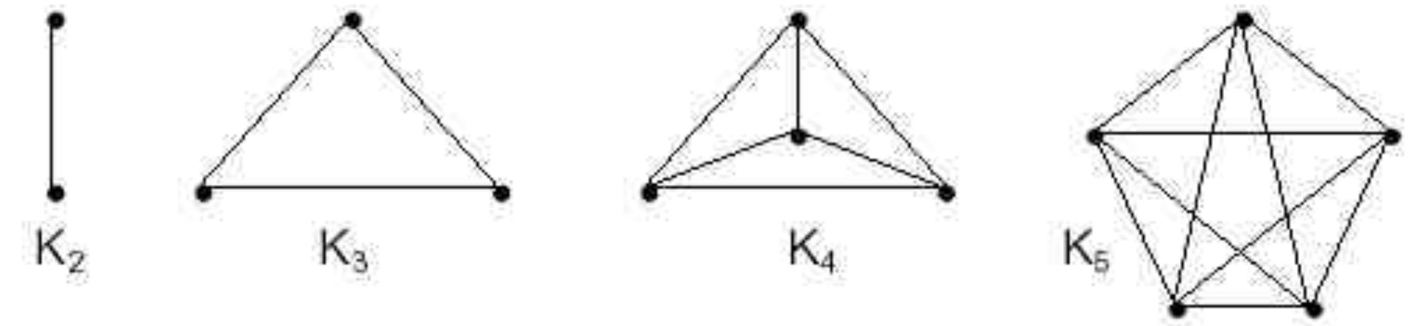
$|V| = 5$ e $|E| = 5(5-1)/2 = 10$



Grafo K_5

Grafos

Grafos Completos



(a) (b) (c) (d)

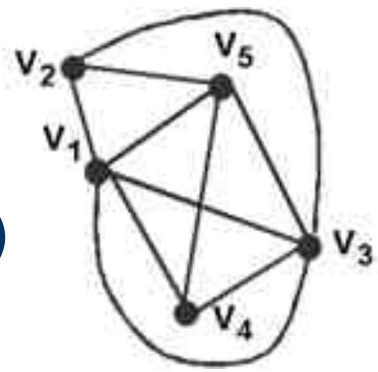
Grafos Completos

- Um grafo <u>completo</u> K_n possui $n(n-1)/2$ arestas
  - Por quê?

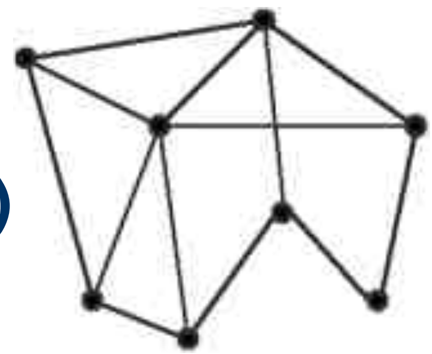
Grafos

Exercícios de Fixação

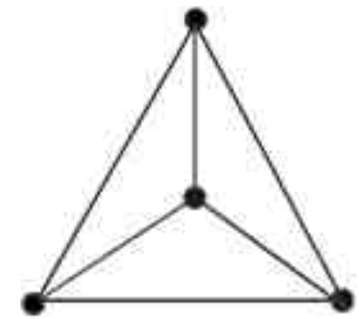
(a)



(b)

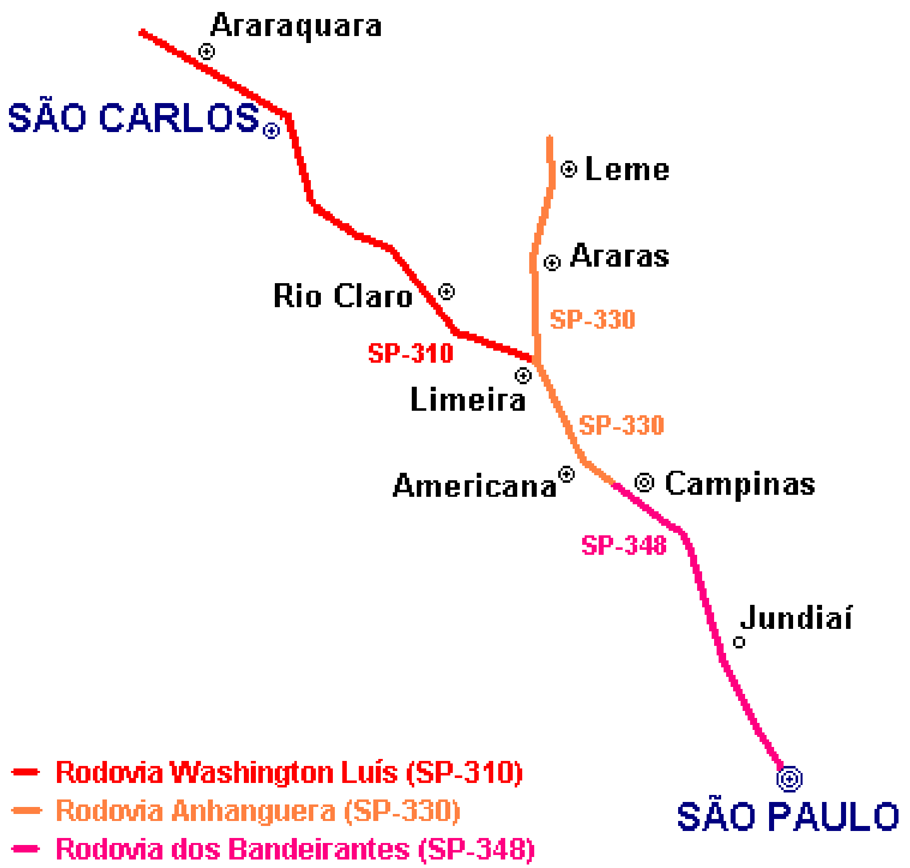


(c)



- Qual a ordem e o número de arestas de cada grafo?
- Quais dos grafos acima são completos?
- Quais dos grafos acima são simples?
- No grafo **(a)**, quais vértices são adjacentes a $\mathbf{v_3}$? E quais arestas são adjacentes a $\mathbf{(v_3,v_5)}$?

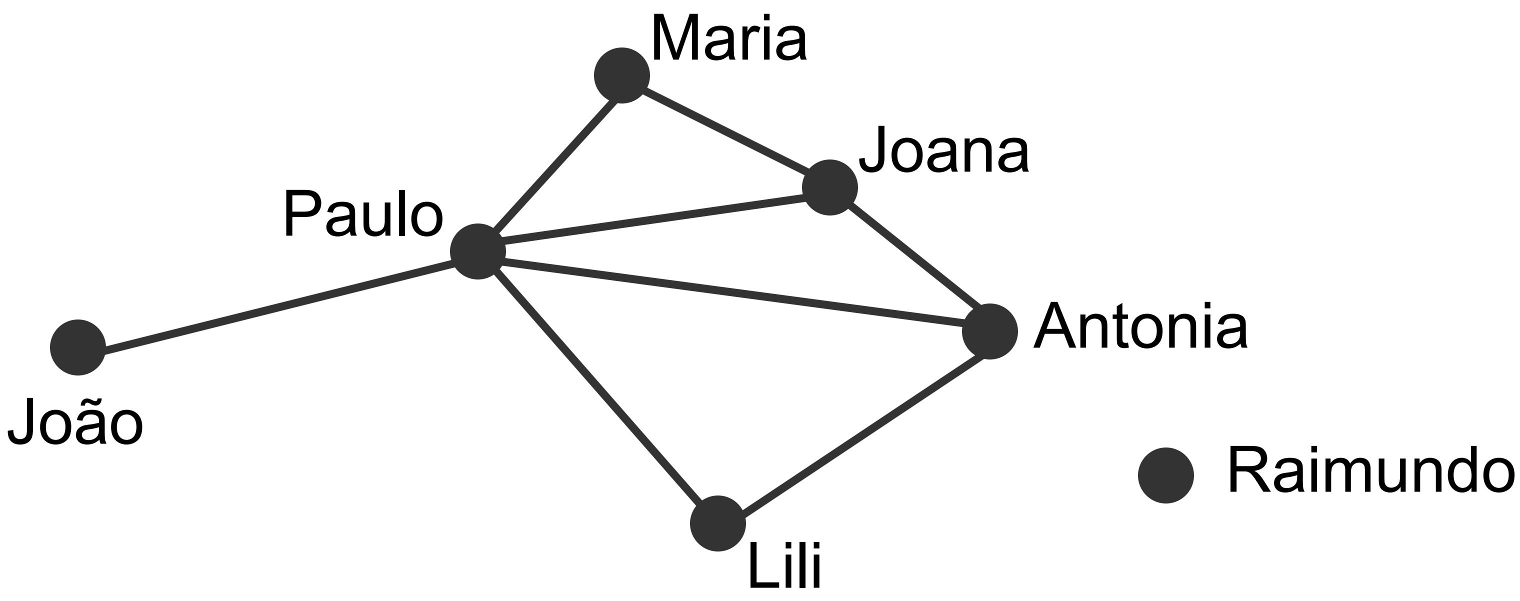
Grafos
Aplicações



Grafos

Aplicações

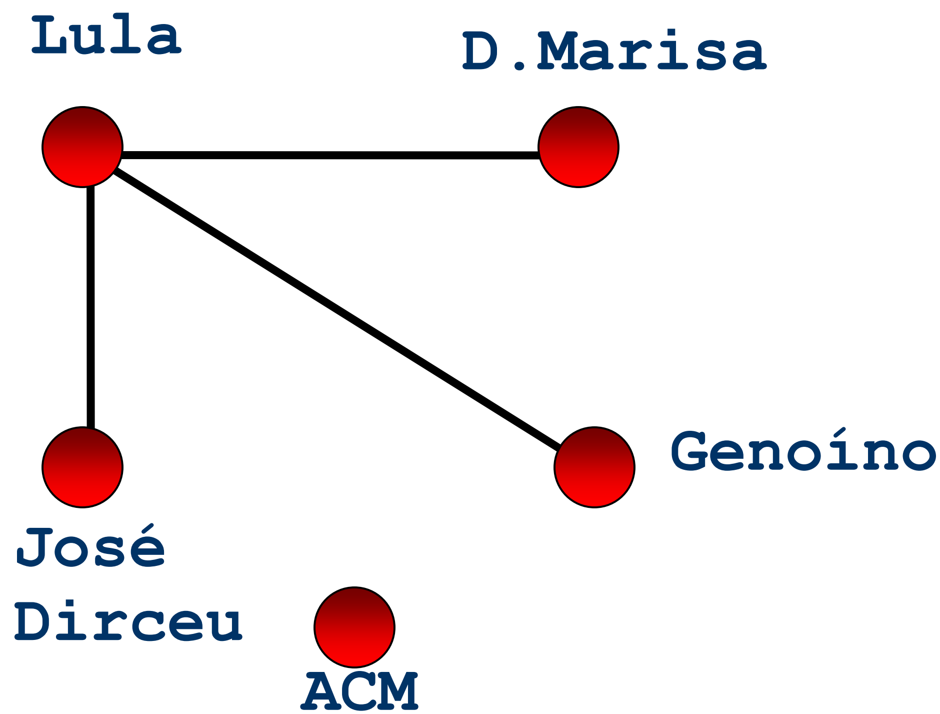
Rede de Relacionamentos (relação "Conhecer"):



Grafos

Aplicações

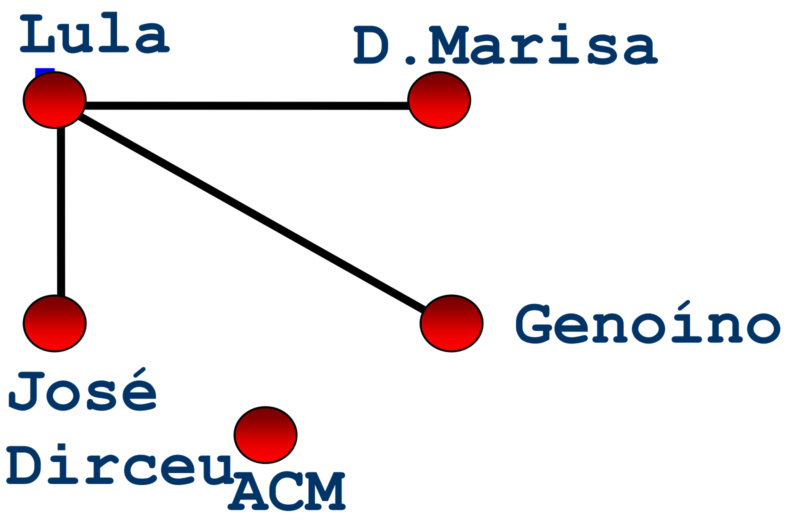
Rede de Relacionamentos (relação "amizade"):



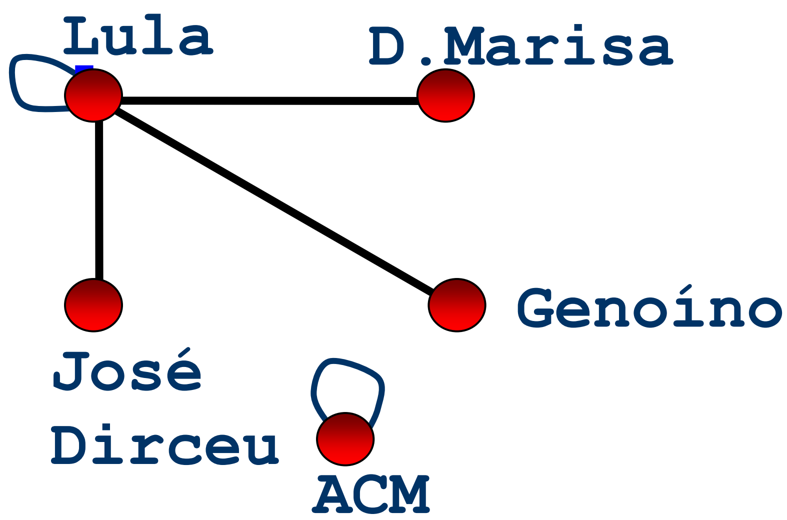
Quem possui mais amigos?
E menos amigos?

Grafos
Aplicações

Grafo sem laço



Grafo com laço

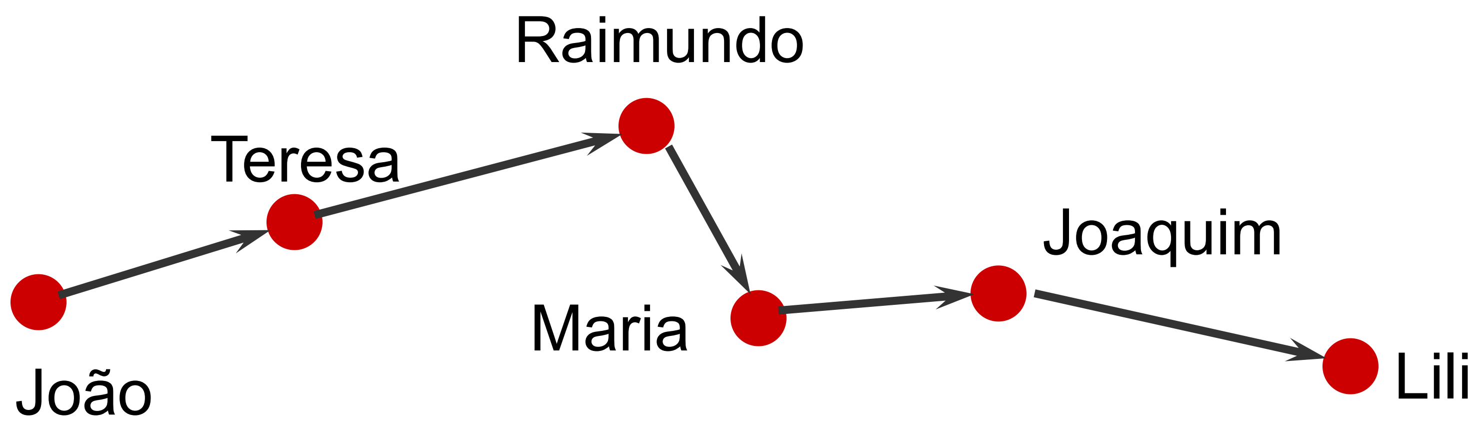


Grafos
Aplicações

- Cada vértice é uma tarefa de um grande projeto. Há uma aresta de x a y se x é pré-requisito de y, ou seja, se x deve estar pronta antes que y possa começar.
- Cada vértice é uma página na teia WWW. Cada aresta é um link que leva de uma página a outra (Há cerca de 2 milhões de vértices e 5 milhões de arcos).
- Outros: Redes de computadores, rotas de vôos, redes de telefonia etc

Grafos
Aplicações

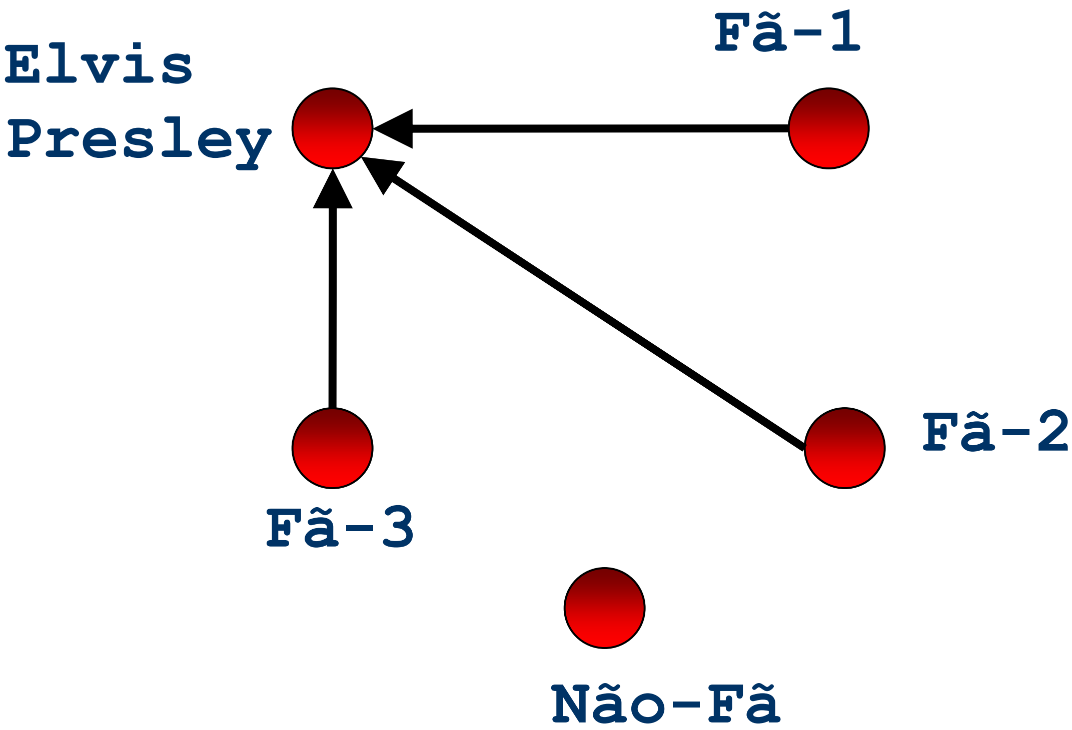
"João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili que não amava ninguém..." (Carlos Drummond de Andrade)



Grafos

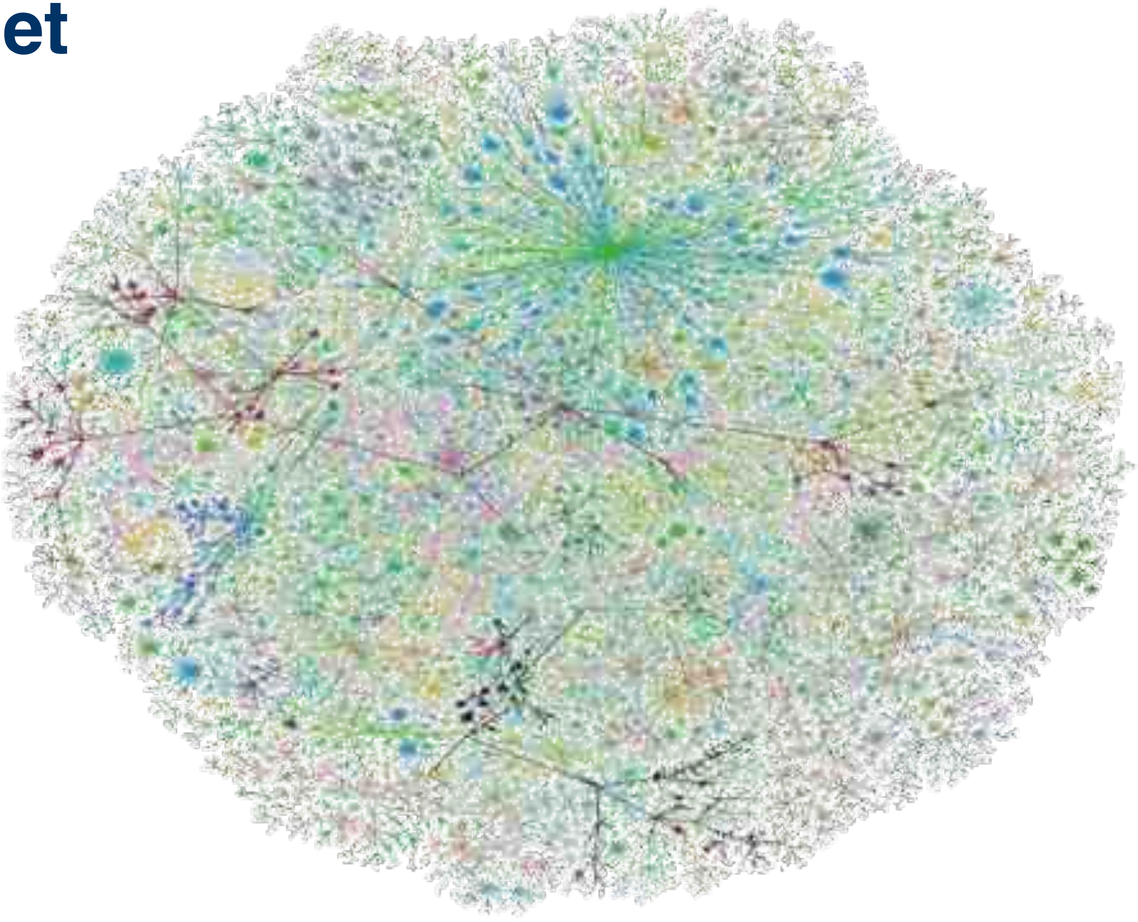
Aplicações

- O Grafo ´sou fã de...´



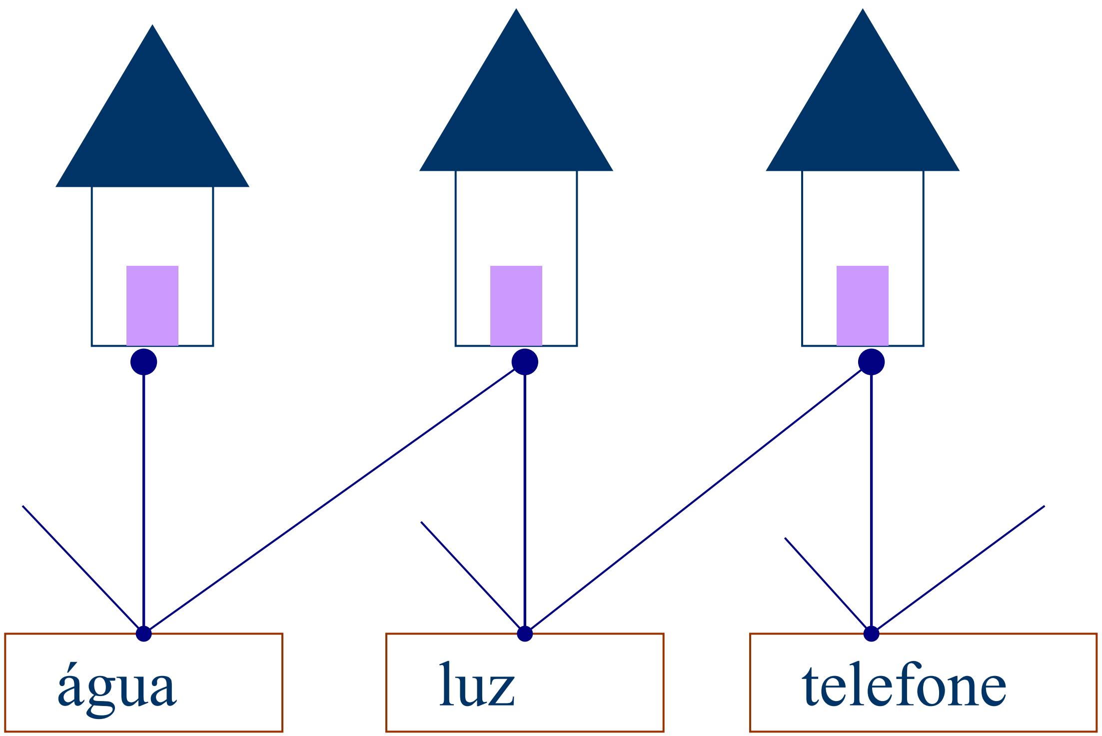
Grafos
Aplicações

- Internet



Grafos
Aplicações

- É possível conectar os 3 serviços às 3 casas sem haver cruzamento de tubulação?



Grafos

Aplicações

- Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que estados adjacentes não podem ter a mesma cor?

Grafos
Aplicações

- De forma a reduzir seus custos operacionais, uma empresa de transporte de cargas deseja oferecer aos motoristas de sua frota um mecanismo que os auxilie a selecionar o melhor caminho (o de menor distância) entre quaisquer duas cidades por ela servidas, de forma a que sejam minimizados os custos de transporte

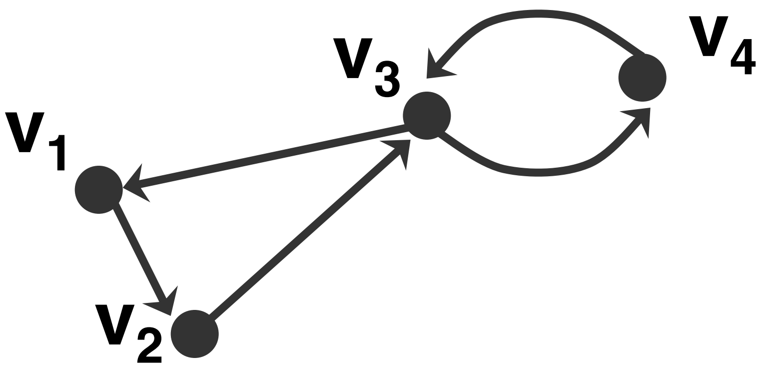
Grafos

VENEZ.
GUYANA
SUR.
FRENCH GUIANA
COLOMBIA
0 400 Miles
0 400 Kilometers
Atlantic Ocean
Macapá
Rio Branco
Amazon R.
Belém
Manaus
Fortaleza
Equator 0°
São Luís
Teresina
Natal
João Pessoa
Juruá R.
Porto Velho
Xingu R.
Tocantins R.
Campina Grande
Rio Branco
Madeira R.
Miracema do Norte
Recife
N
PERU
Guaporé R.
Aracaju
Maceió
10° S
Salvador
Mamoré R.
Cuiabá
Brasília
BOLIVIA
Goiânia
Belo Horizonte
Corumbá
Paranaíba R.
Vitória
Campo Grande
Campinas
Nova Iguaçu
Pacific Ocean
PARAGUAY
São Paulo
Rio de Janeiro
20° S
Santos
Curitiba
CHILE
Tropic of Capricorn
Santa Maria
Florianópolis
ARGENTINA
Pôrto Alegre
Uruguaiana
Brasil
30° S
70° W
60° W
URUGUAY
40° W
30° W

Grafos
Orientados

- Um grafo **orientado** (ou **dígrafo**) $D = (V,E)$ consiste de um conjunto V (vértices) e de um conjunto de E (arestas) de <u>pares ordenados</u> de vértices distintos.

Representação :



$V(G) = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

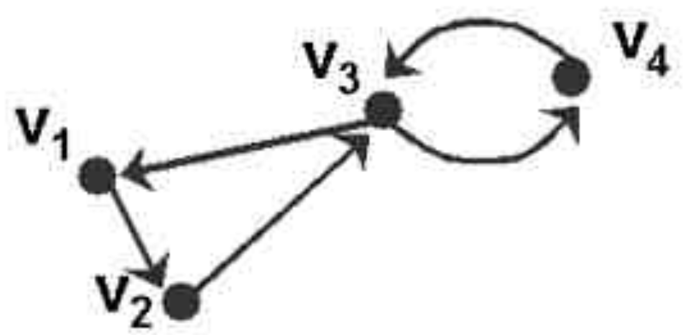
$E(G) = \{(v_1, v_2);\ (v_3,v_1);\ (v_2,v_3);\ (v_3,v_4);\ (v_4,v_3)\}$

Grafos
Orientados

- Em um grafo orientado, cada aresta $e = (x, y)$ possui uma única direção de x para y. Diz-se que (x, y) é **divergente** de x e **convergente** a y. Assim:

(v_3,v_1) é divergente de v_3

(v_3,v_1) é convergente a v_1

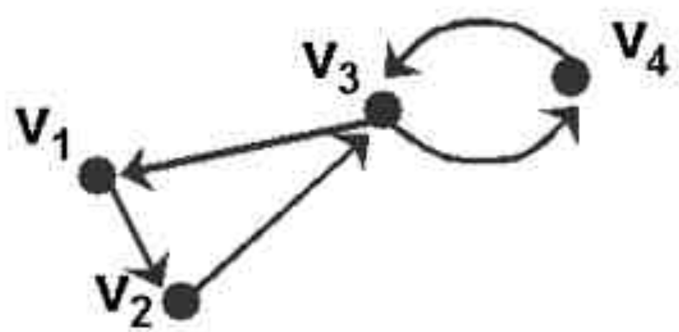


Grafos
Orientados

- Em grafos orientados, em (x,y) tem-se que y é adjacente a x, mas não oposto.
- Se o grafo é orientado ou não, x e y são "vizinhos"

(v_3,v_1) v_1 é adjacente a v_3

(v_3,v_1) v_1 e v_3 são vizinhos



Grafos
Grau

- O **Grau** $d(v)$ de um vértice v corresponde ao <u>número de vértices adjacentes</u> a v (ou ao número de arestas incidentes a v).

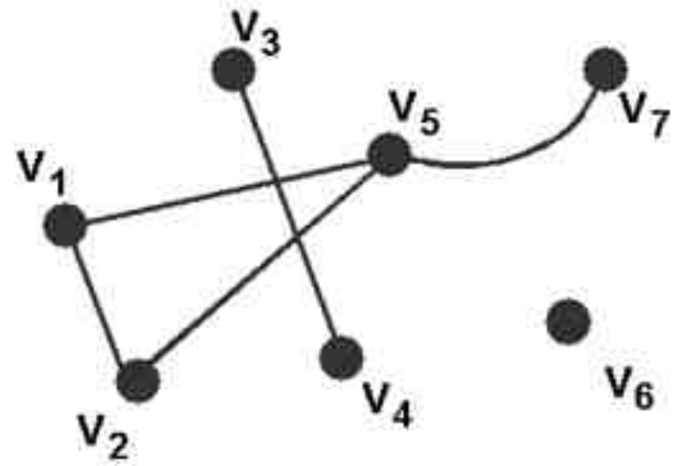
Exemplo:

$d(v_6) = 0$

$d(v_3) = d(v_4) = d(v_7) = 1$

$d(v_1) = d(v_2) = 2$

$d(v_5) = 3$



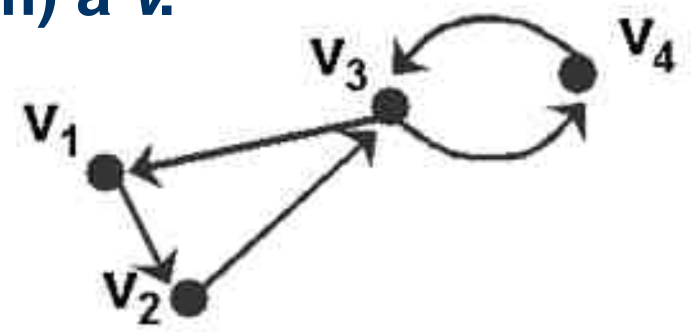
Grafos
Grau

- Em um grafo orientado:
  - O **Grau de Saída** $d_{out}(v)$ de um vértice *v* corresponde ao número de arestas divergentes (que saem) de *v*.
  - O **Grau de Entrada** $d_{in}(v)$ de um vértice *v* corresponde ao número de arestas convergentes (que chegam) a *v*.

$d_{in}(v_3) = 2$ e $d_{out}(v_3) = 2$

$d_{in}(v_1) = d_{in}(v_2) = d_{in}(v_4) = 1$

$d_{out}(v_1) = d_{out}(v_2) = d_{out}(v_4) = 1$



Grafos
Grau

- Um vértice com grau de saída nulo, ou seja, $d_{out}(v) = 0$, é chamado de **sumidouro** (ou **sorvedouro**)

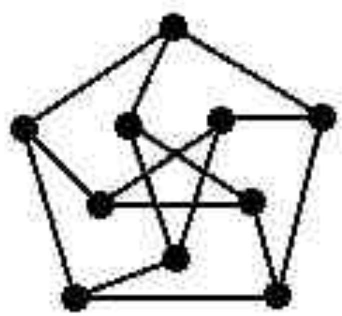
- Um vértice com grau de entrada nulo, ou seja, $d_{in}(v) = 0$, é chamado de **fonte**

- Diz-se que um grafo é **regular** se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau

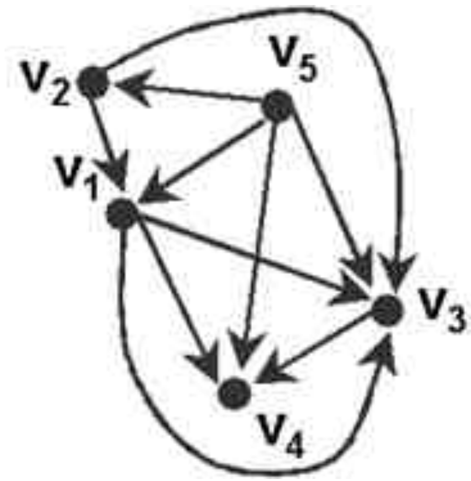
Grafos

Exercício de Fixação

(a)



(b)



- O grafo (a) é regular? Por quê?
- Existe alguma fonte ou sumidouro no grafo (b)?