USP – ICMC – SME0263 - Análise Multivariada

1ª lista de exercícios – 2º/2012

14. A função densidade do vetor $(X_1, X_2)'$ é dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{55\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{1512}\left(36x_1^2 - 24x_1x_2 + 25x_2^2 - 120x_1 - 2x_2 + 121\right)\right\},$$

para $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$.

(a) Calcule $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_2)$, $\mathrm{var}(X_1)$, $\mathrm{var}(X_2)$ e $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$.

(b) Apresente algumas curvas de nível de $f(x_1, x_2)$.

<u>Solução.</u> De fato, a expressão da função densidade é

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{12\sqrt{21}\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{2\times 756}\left(36x_1^2 - 24x_1x_2 + 25x_2^2 - 120x_1 - 2x_2 + 121\right)\right\}, \quad (1)$$

notando que no enunciado $12\sqrt{21} = 54,99$ foi arredondado para 55.

(a) Como a expressão entre parênteses na eq. (1) é uma forma quadrática, inicialmente verificamos se a distribuição é normal bivariada, cuja função densidade é dada por

$$f_N(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}, \quad (2)$$

em que $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)'$ e $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$. Seja $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ com elementos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})$ obtemos

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) &= (x_1-\mu_1, x_2-\mu_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}(x_1-\mu_1)^2 + 2a_{12}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + a_{22}(x_2-\mu_2)^2 \\
&= a_{11}(x_1^2 - 2\mu_1x_1 + \mu_1^2) + 2a_{12}(x_1x_2 - \mu_2x_1 - \mu_1x_2 + \mu_1\mu_2) \\
&\quad + a_{22}(x_2^2 - 2\mu_2x_2 + \mu_2^2) \\
&= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 - 2(\mu_1a_{11} + \mu_2a_{12})x_1 \\
&\quad - 2(\mu_1a_{12} + \mu_2a_{22})x_2 + 2\mu_1\mu_2a_{12} + a_{11}\mu_1^2 + a_{22}\mu_2^2. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Comparando (3) e (1) levando em conta (2), percebemos que

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{756}\begin{bmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 25 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Substituindo os elementos de $\boldsymbol{A}$ dados por (4) em (3) e igualando aos coeficientes de x_1 e x_2 em (1) obtemos o sistema

$$\begin{aligned} 36\mu_1 - 12\mu_2 &= 60, \\ -12\mu_1 + 25\mu_2 &= 1, \end{aligned}$$

cuja solução é $\mu_1 = 2$ e $\mu_2 = 1$. Substituindo esta solução e os elementos de $\boldsymbol{A}$ nas três últimas parcelas de (3), obtemos

$$2\mu_1\mu_2 a_{12} + a_{11}\mu_1^2 + a_{22}\mu_2^2 = 121,$$

que está de acordo com (1). A partir de (4) calculamos $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\Sigma}^{-1}| = 1/756$ e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 25 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

sendo que $|\boldsymbol{\Sigma}| = 1\,/\,|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}| = 756 = 36 \times 21$. Combinando estes resultados, concluímos que a função densidade em (1) pode ser escrita da forma em (2), ou seja, a distribuição do vetor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ é normal bivariada com vetor de médias $\boldsymbol{\mu} = (2, 1)'$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ dada por (5). Sendo assim, $\mathrm{E}(X_1) = 2$, $\mathrm{E}(X_2) = 1$, $\mathrm{var}(X_1) = 25$, $\mathrm{var}(X_2) = 36$ e $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 12$.

(b) Utilizando o código em R encontrado no arquivo

`http://wiki.icmc.usp.br/images/6/60/Normal2.pdf`,

elaboramos gráficos das curvas de nível da função densidade em (1) correspondentes às probabilidaes 0,99, 0,95, 0,9 e 0,8, apresentados na Figura 1.

```
# Pacotes
library(mvtnorm)
library(ellipse)

# Vetor de mdias
mu <- c(2, 1)
```

```
# Matriz de covarincias
Sigma <- matrix(c(25, 12, 12, 36), ncol = 2)

niveis <- c(0.99, 0.95, 0.9, 0.8)
plot(ellipse(Sigma, centre = mu, level = niveis[1]), type = "l",
     xlab = expression(x[1]), ylab = expression(x[2]))
points(mu[1], mu[2], pch = 20)
if (length(niveis) > 1) {
   for (i in 2:length(niveis)) {
      lines(ellipse(Sigma, centre = mu, level = niveis[i]), type = "l",
            xlab = "", ylab = "")
   }
}
```

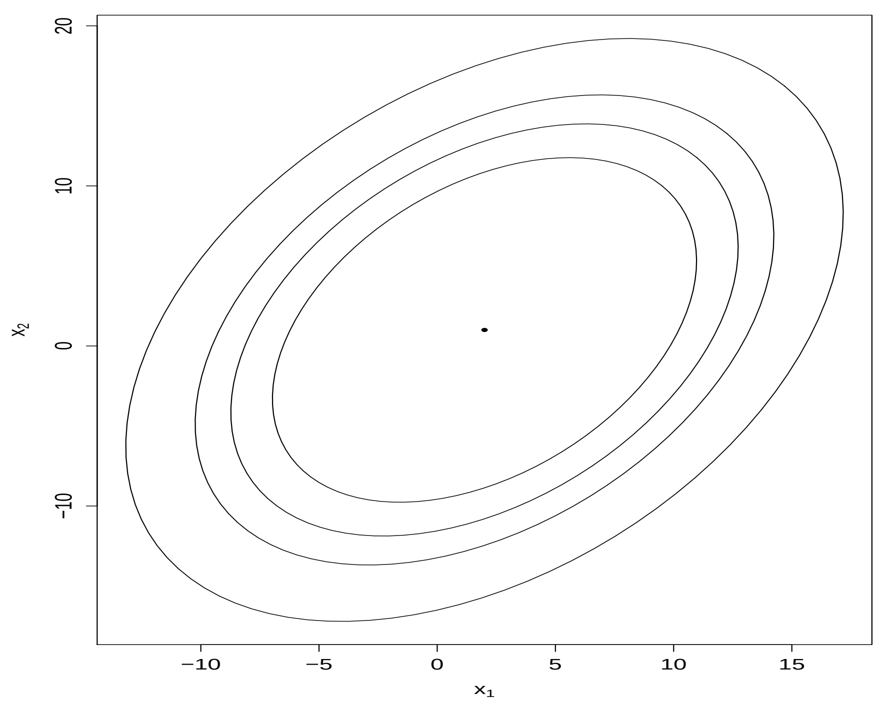

Figura 1: Curvas de nível da função densidade.