



2. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

2014

Conceitos básicos

Experimento aleatório ou fenômeno aleatório

Situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Um experimento ou fenômeno que, se for observado em **condições idênticas**, pode apresentar **diferentes resultados** é chamado de experimento ou fenômeno aleatório.



Conceitos básicos

Exemplos

- Observação da temperatura diária mínima em São Carlos.
- Registro da inflação mensal (medida pela FIPE).
- Observação da condição de um item produzido.
- Resultado do lançamento de um dado.
- Registro do tempo de duração de uma lâmpada.
- Observação do número de veículos que passam por um praça de pedágio durante um certo intervalo.
- Tábua de Galton:

<http://www.mathsisfun.com/probability/quincunx.html>

<http://www.jcu.edu/math/isep/Quincunx/Quincunx.html>

Conceitos básicos

Espaço amostral (Ω)

Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos

1. Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ou $\Omega = \{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \}$
2. Condição de um item produzido: $\Omega = \{\text{defeituoso, não defeituoso}\}$
3. Número de veículos que passam por uma praça de pedágio durante um certo intervalo: $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$
4. Vazão diária máxima em uma estação de medição (em m^3/s):
 $\Omega = (0, \infty)$

Exemplo

Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento

Subconjunto do espaço amostral Ω .

Notação: A, B, C,...

Exemplos. Eventos do exemplo acima:

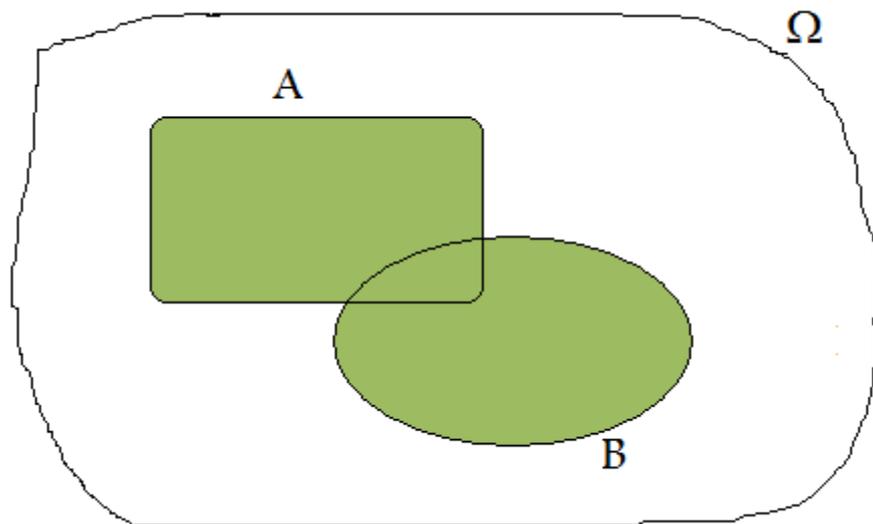
- A. Resultado é par: $A = \{2, 4, 6\}$ (**evento composto**)
- B. Resultado é maior do que 3: $B = \{4, 5, 6\}$ (**evento composto**)
- C. Resultado igual a 1: $C = \{1\}$ (**evento simples**)
- D. Resultado maior do que 6: $D = \emptyset$ (**evento impossível**)
- E. Resultado menor do que 7: $D = \Omega$ (**evento certo**)

Operações com eventos

A e B são eventos de Ω

- $A \cup B$: união dos eventos A e B

Ocorrência de pelo menos um dos eventos A e B.

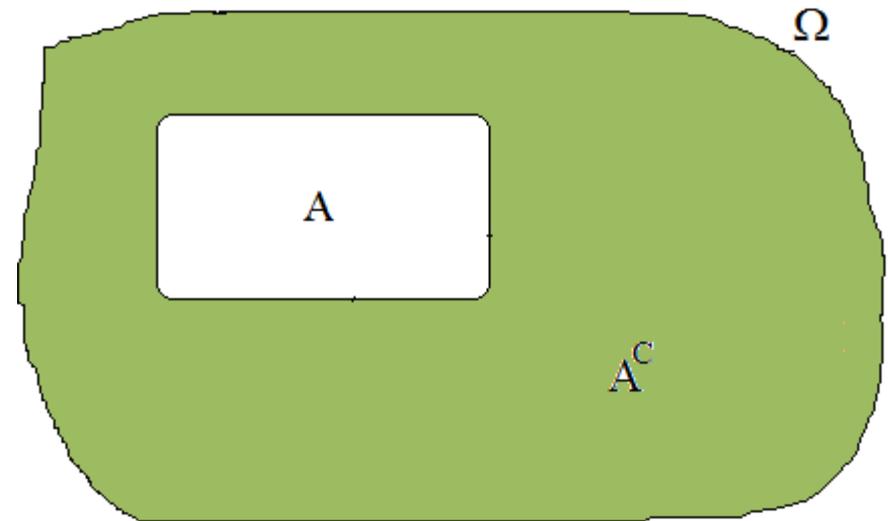
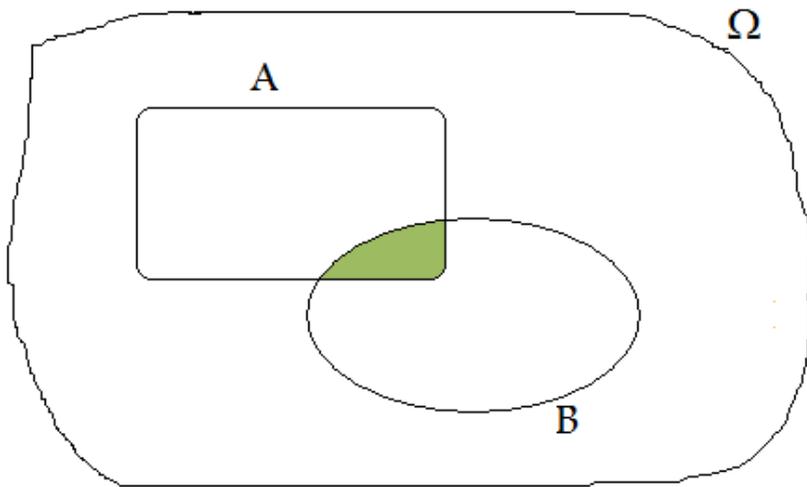


Operações com eventos

- $A \cap B$: intersecção dos eventos A e B

Ocorrência simultânea dos eventos A e B.

- A e B são **disjuntos ou mutuamente exclusivos** quando não têm elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$.
- A e B são **complementares** se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.
- O **complementar** de um evento A é representado por A^c ou \bar{A}



Definições de probabilidade

Probabilidade clássica ou *a priori*

Se um experimento aleatório tiver $n(\Omega)$ resultados **mutuamente exclusivos** e **igualmente possíveis** e, se um evento A tiver $n(A)$ desses resultados, a probabilidade do evento A , representada por $P(A)$, é dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo. Lançamento de dois dados balanceados. Calcular a probabilidade de

- a) se obter soma das faces igual a 7,
- b) se obter soma maior do que 5,
- c) que o resultado do primeiro dado seja maior do que o resultado do segundo.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\}$$

a) $A = \{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(6,1)\}$

$$\Rightarrow P(A) = n(A) / n(\Omega) = 6 / 36 = 1/6$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\} \rightarrow B$$

b) $P(B) = 26/36$.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\}$$



 C

c) $P(C) = 15/36$.

Definições de probabilidade

Probabilidade frequentista ou *a posteriori*

Um experimento é realizado n vezes (n “grande”). O evento A ocorre exatamente $n(A)$ vezes ($0 \leq n(A) \leq n$). A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A , ou seja,

$$f_r(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $f_r(A)$ se aproxima de $P(A)$.

Exemplo. Lançamento de uma moeda balanceada. Calcular a probabilidade de $A = \{\text{resultado obtido é cara}\}$.

	fr_1	fr_2	fr_3	fr_4	...	$P(A)$
Cara	2/5	6/10	22/50	47/100	...	0,5
n	5	10	50	100	...	∞

Definições de probabilidade

Definição axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número $P(A)$ satisfazendo aos seguintes **axiomas**:

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subset \Omega$,
- (ii) $P(\Omega) = 1$ e
- (iii) Se A_1, A_2, \dots são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Propriedades

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Se $A \subset \Omega$, então $P(A) = 1 - P(A^c)$.
3. Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$.
4. Se $A, B \subset \Omega$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Se $A, B, C \subset \Omega$, então
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Probabilidade condicional e independência

A e B são dois eventos em um mesmo espaço amostral Ω . A probabilidade condicional de A dado que ocorreu o evento B , denotada por $P(A|B)$, é definida como

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{se } P(B) > 0. \quad (1)$$

Obs. Pela propriedade 3 na lâmina 13, temos $P(A|B) \leq P(A) / P(B)$.

Exemplo. Selecionamos dois itens, ao acaso, um a um e sem reposição, de um lote que contém 10 itens do tipo A e 5 do tipo B. Qual é a probabilidade de que

- (a) o primeiro item seja do tipo A?
- (b) o segundo seja do tipo B se o primeiro item foi do tipo A?

Definimos os eventos

V_1 : "o 1º item é do tipo A";

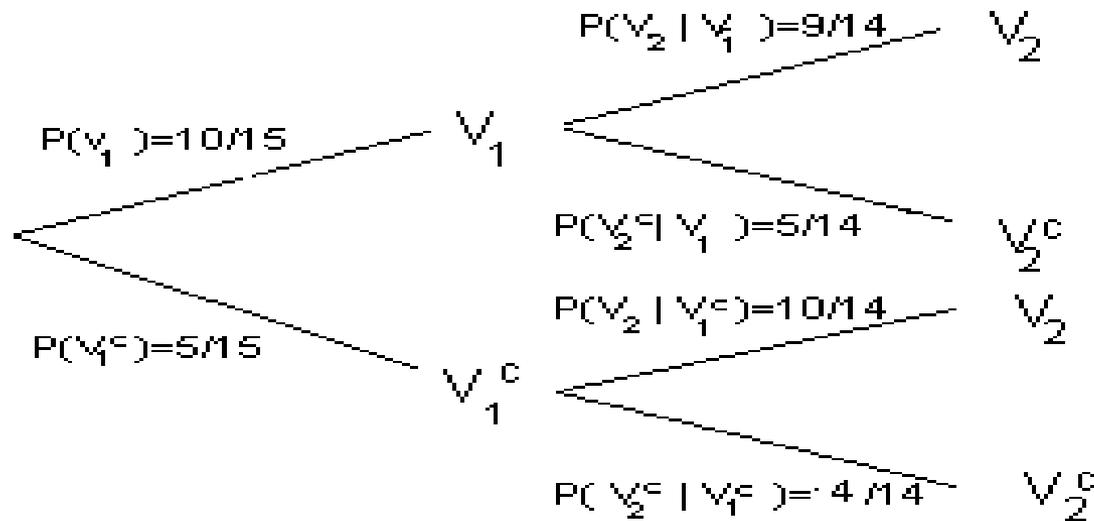
V_2 : "o 2º item é do tipo A"

$$(a) P(V_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

$$(b) P(V_2^c | V_1) = \frac{5}{14}.$$

Essas probabilidades podem ser representados em uma [árvore de probabilidades](#).

Árvore de probabilidades



Da expressão (1) na lâmina 14 obtém-se uma relação útil:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A | B),$$

conhecida como **regra do produto de probabilidades** ou **probabilidade da interseção**.

Exemplo. No exemplo anterior suponha que temos interesse em determinar a probabilidade de que os dois itens selecionados sejam do tipo B.

O evento é $V_1^c \cap V_2^c$: "o 1º e o 2º itens são do tipo B"

$$P(V_1^c \cap V_2^c) = P(V_1^c)P(V_2^c | V_1^c) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}.$$

Resultado. Se B é um evento em Ω tal que $P(B) > 0$, então

1. $P(\emptyset | B) = 0$.
2. Se $A \subset \Omega$, então $P(A^c | B) = 1 - P(A | B)$ ou $P(A | B) = 1 - P(A^c | B)$.
3. Se $A, C \subset \Omega$, então

$$P(A \cup C | B) = P(A | B) + P(C | B) - P(A \cap C | B).$$

Exemplo. Segundo dados coletados, a probabilidade de ocorrer congestionamento em uma via em um certo dia é 0,28 e a probabilidade de haver congestionamento em dois dias consecutivos é 0,17.

Se **ocorrer** congestionamento em um certo **dia**, qual a probabilidade de que no **dia seguinte não ocorra** congestionamento ?

Solução. Definimos os eventos A: “ocorre congestionamento em um certo dia” e B: “ocorre congestionamento no dia seguinte”.

Do enunciado do problema temos $P(A) = 0,28$ e $P(A \cap B) = 0,17$. A probabilidade pedida é

$$P(B^c | A) = 1 - P(B | A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{0,17}{0,28} = 0,39.$$

Independência de eventos

Dois eventos A e B em Ω são **independentes** se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A . Isto é,

$$P(A | B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo. Em uma fábrica 20% dos lotes produzidos têm componentes do fornecedor A, 8% têm componentes do fornecedor V e 4% têm componentes de ambos. Selecionamos ao acaso um item produzido nesta fábrica.

- (a) Os eventos relacionados aos dois fornecedores são independentes?
- (b) Se o lote selecionado tem componentes do fornecedor V, qual a probabilidade de que tenha componentes do fornecedor A?
- (c) Qual é a probabilidade de um lote não ter componentes destes dois fornecedores?

Solução. A: “o lote tem componentes do fornecedor A”, V: “o lote tem componentes do fornecedor V”.

Do enunciado temos $P(A) = 0,20$, $P(V) = 0,08$ e $P(A \cap V) = 0,04$.

$$(a) P(V)P(A) = 0,08 \times 0,2 = 0,016 \text{ e}$$

$$P(V \cap A) = 0,04.$$

Como $P(V \cap A) \neq P(V)P(A)$, A e V não são independentes.

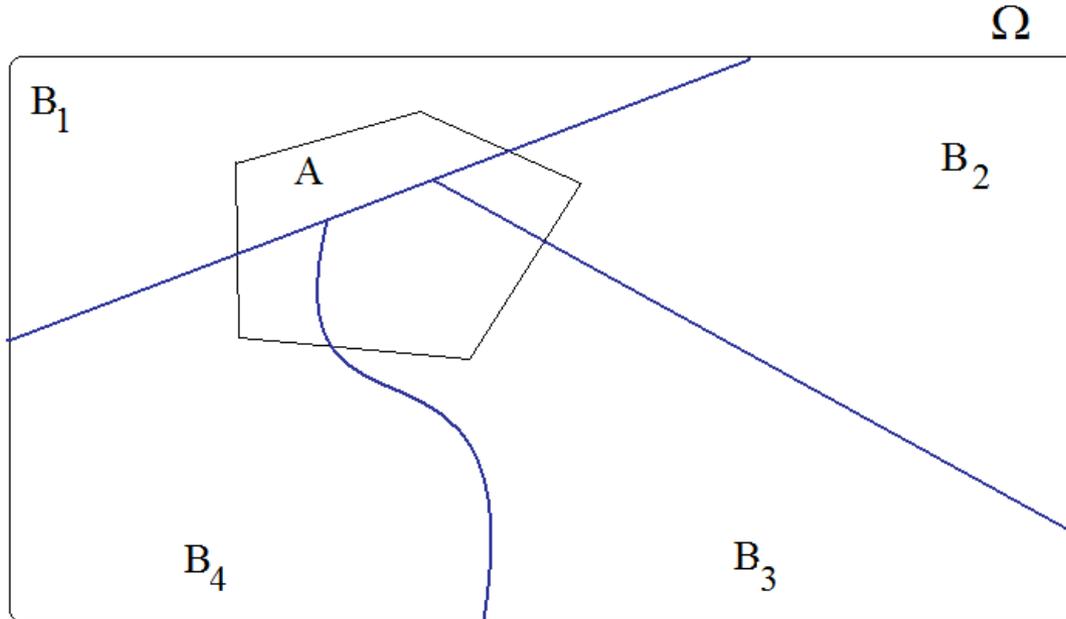
$$(b) P(A|V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0,04}{0,08} = 0,50.$$

$$\begin{aligned} (c) P((V \cup A)^c) &= 1 - P(V \cup A) \\ &= 1 - \{P(V) + P(A) - P(V \cap A)\} \\ &= 1 - (0,08 + 0,2 - 0,04) = 0,76. \end{aligned}$$

Resultado. Se A e B são eventos independentes em Ω , então (i) A e B^c são independentes, (ii) A^c e B são independentes e (iii) A^c e B^c são independentes.

Fórmula de Bayes

Partição do espaço amostral. Uma coleção de eventos B_1, \dots, B_k forma uma partição do espaço amostral se eles são **mutuamente exclusivos** e se sua **união** é igual ao **espaço amostral**.



Fórmula da probabilidade total. Se B_1, \dots, B_k formam uma partição do espaço amostral Ω , então para qualquer evento A em Ω , vale

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_k)P(A|B_k) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i).$$

Fórmula de Bayes. Se B_1, \dots, B_k formam uma partição do espaço amostral Ω , e A é evento em Ω com $P(A) > 0$, então

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)}.$$

Exemplo. Uma fábrica trabalha com **dois** fornecedores (A e B) de um determinado componente. Sabe-se que **10%** e **5%** das peças proveniente dos fornecedores A e B, respectivamente, estão **fora** das especificações. A fábrica recebe **30%** das peças do fornecedor A e **70%** de B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhida ao acaso,

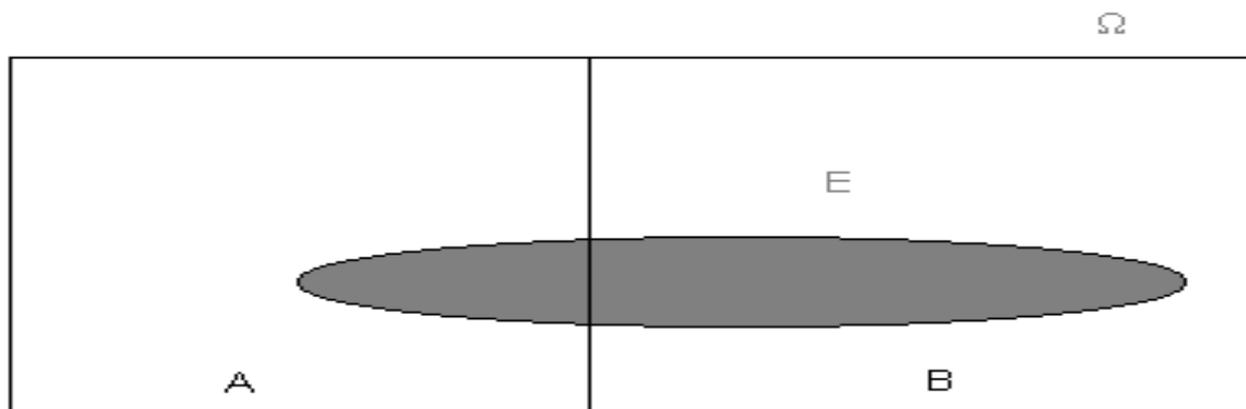
- calcule a probabilidade de que ela esteja fora das especificações.
- se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade de que tenha sido fornecida por A ?

Solução. Eventos:

A: “peça selecionada foi fornecida por A”,

B: “peça selecionada foi fornecida por B” e

E: “peça selecionada não atende às especificações”.



Do enunciado do problema temos $P(A) = 0,30$, $P(B) = 0,70$, $P(E|A) = 0,10$ e $P(E|B) = 0,05$.

(a) Fórmula da probabilidade total:

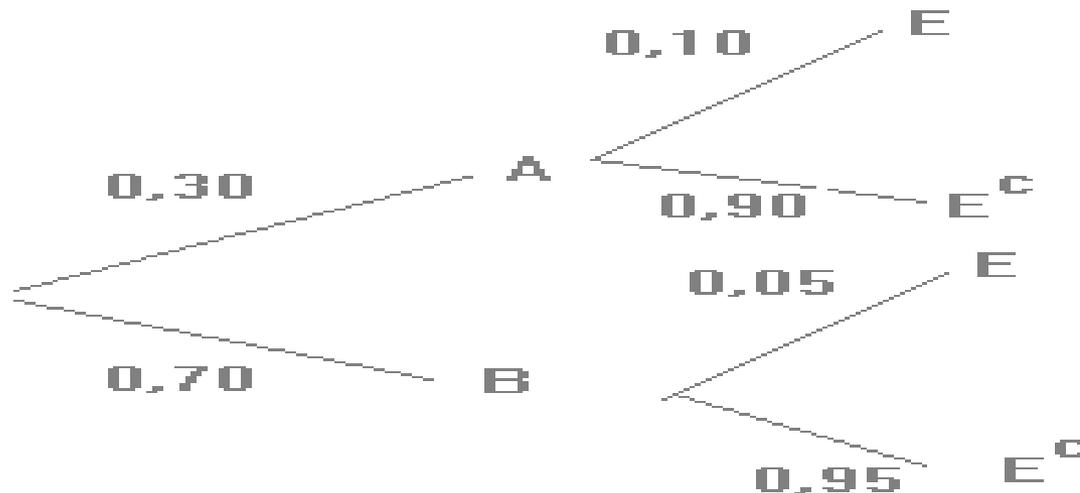
$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) = 0,30 \times 0,10 + 0,70 \times 0,05 = 0,065.$$

(b) $P(A|E) = ?$

Pela fórmula de Bayes,

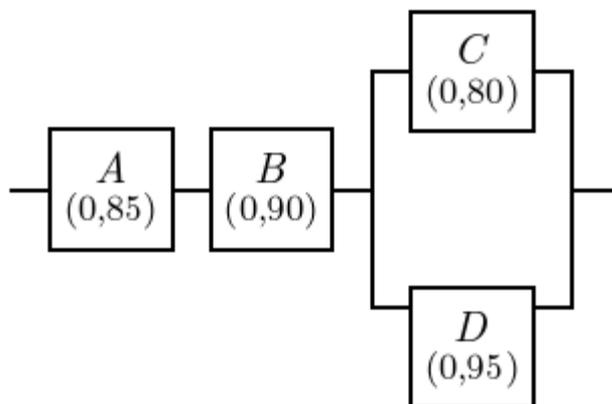
$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B)} = \frac{0,30 \times 0,10}{0,30 \times 0,10 + 0,70 \times 0,05} = \frac{0,03}{0,065} = 0,46.$$

A solução do exemplo anterior é facilitada pela árvore de probabilidades:



Exemplo

Na figura abaixo são apresentados um sistema e as probabilidades de funcionamento de seus componentes. (a) Calcule a probabilidade de funcionamento do sistema. (b) Sabendo que o sistema funciona, qual a probabilidade de que o componente C tenha falhado?



Solução. Definimos o evento E como sendo “o sistema funciona”. Supomos **independência** entre os eventos A, B, C e D.

Pela figura, $E = (A \cap B) \cap (C \cup D)$.

$$\begin{aligned} \text{(a). Calculamos } P(E) &= P((A \cap B) \cap (C \cup D)) = P(A \cap B) \times P(C \cup D) \\ &= P(A \cap B) \times \{P(C) + P(D) - P(C \cap D)\} \\ &= P(A) \times P(B) \times \{P(C) + P(D) - P(C) \times P(D)\} \\ &= 0,85 \times 0,90 \times (0,80 + 0,95 - 0,80 \times 0,95) = 0,76. \end{aligned}$$

Exemplo

(b) Devemos calcular $P(C^c|E)$, dada por $P(C^c|E) = 1 - P(C|E)$
 $= 1 - P(C \cap E) / P(E)$.

Utilizando regras de operações com conjuntos obtemos

$C \cap E = A \cap B \cap C$, de modo que

$$P(C^c|E) = 1 - P(A \cap B \cap C) / P(E) = 1 - P(A) \times P(B) \times P(C) / P(E)$$
$$= 1 - 0,85 \times 0,90 \times 0,80 / 0,76 = 0,19.$$

(b) Outra solução

Dado que o sistema funciona (**ocorreu E**), certamente **A** e **B** ocorreram.

Além disso, pelo menos um dos componentes C e D funciona, ou seja, C ou D funciona (**ocorreu $C \cup D$**).

Desta forma, $P(C|E) = P(C|C \cup D)$, que é igual a $P(C) / P(C \cup D) = 0,81$.