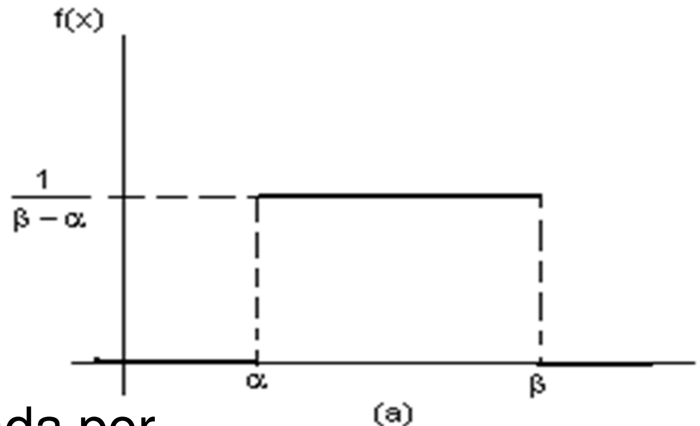
5. PRINCIPAIS MODELOS CONTÍNUOS

2014

5.1. Modelo uniforme

Uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme com parâmetros α e β ($\alpha < \beta$) se sua função densidade de probabilidade é dada por

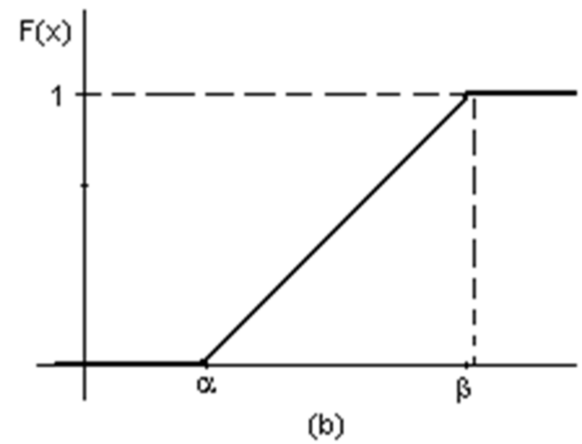
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \le x \le \beta \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Notação: $X \sim U(\alpha, \beta)$.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{se} \quad \alpha \le x \le \beta, \\ 1, & \text{se} \quad x > \beta. \end{cases}$$



Propriedades:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}.$$

Exemplo

A dureza de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória uniforme no intervalo (50,70) unidades. Qual a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60?

Solução. X representa a dureza de uma peça de aço, sendo que X ~ U(50, 70) e

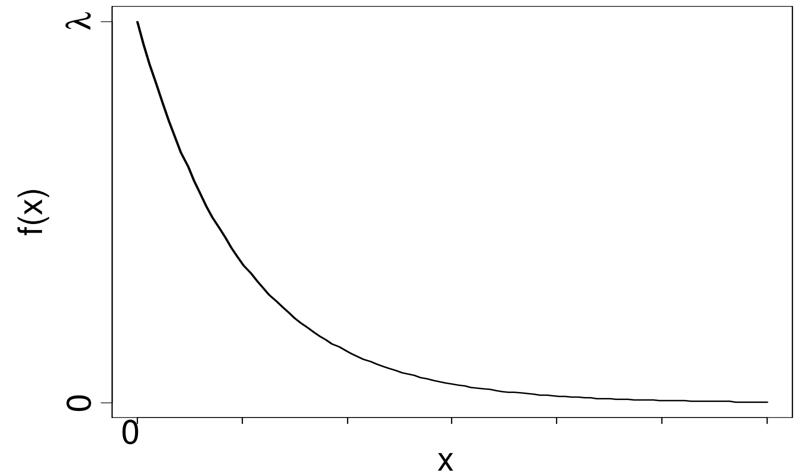
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & 50 \leq x \leq 70, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Portanto,

$$P(55 < X < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dx = \frac{5}{20} = 0,25.$$

5.2. Modelo exponencial

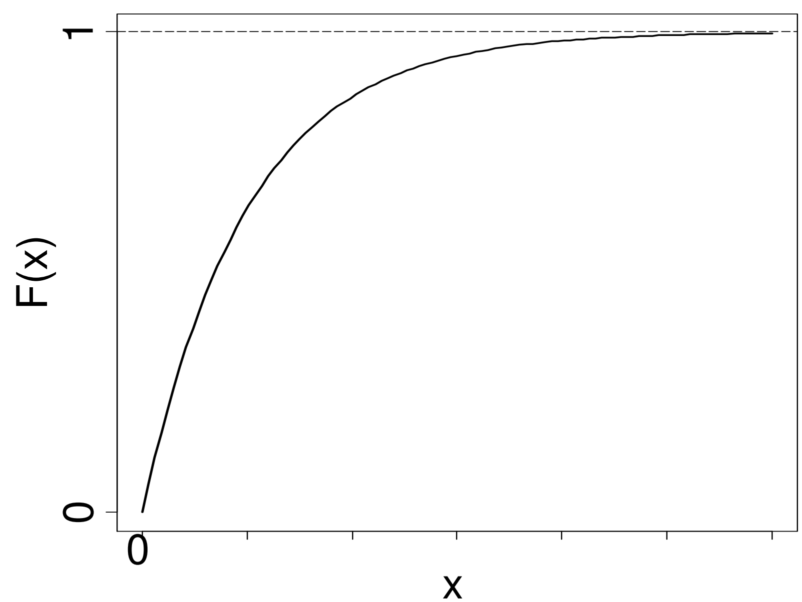
Uma v.a. contínua X tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua função de densidade é dada por



$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Ex(\lambda)$.

A função de distribuição acumulada é dada por



$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Propriedades:

$$E(X) = 1/\lambda \quad \text{e} \quad Var(X) = 1/\lambda^2.$$

5.2. Modelo exponencial

Propriedade. Se X ~ Ex(λ), então P(X > a + b| X > b) = P(X > a).

É a única distribuição contínua com esta propriedade ("falta de memória").

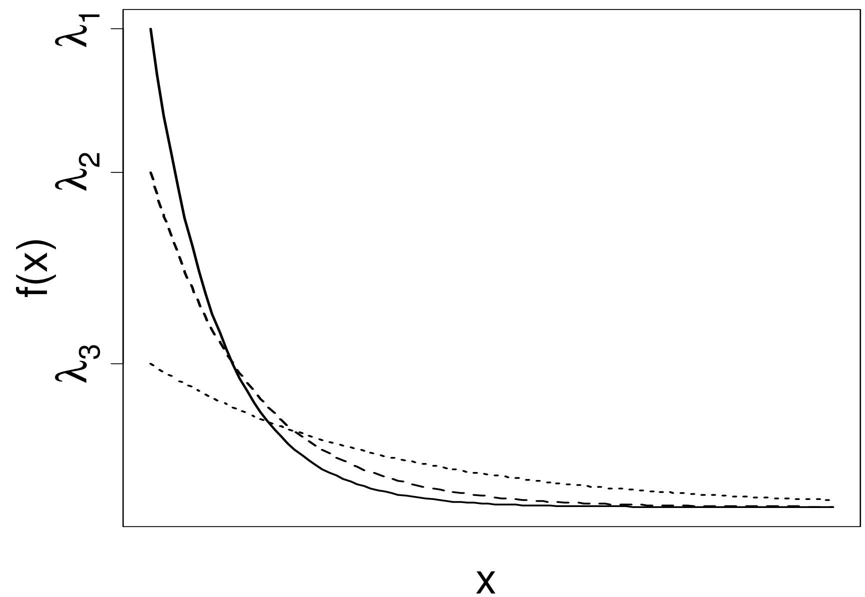
Observação. Também encontramos X ~ Ex(α), em que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Relação: $\alpha = 1 / \lambda$.

α: escala e λ: taxa.

Exemplo. Diferentes valores de λ.



Exemplo

O tempo de vida de um tipo de fusível segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas. Cada fusível tem um custo de $10,0 e se durar menos de 200 horas há um custo adicional de $8,0.

(a) Qual é a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas?

(b) Determinar o custo esperado.

Solução. Se X é o tempo de vida de um fusível, temos E(X) = 100 horas, λ = 1 / E(X) = 0,01 e X ~ Ex(0,01). Ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$(a) \quad P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150) = 1 - (1 - e^{-\frac{150}{100}}) = e^{-1,5} = 0,223.$$

Exemplo

(b) O custo C é uma v.a. discreta dada por

$$C(X) = \begin{cases} 10, & \text{se } X \geq 200, \\ 10+8, & \text{se } X < 200. \end{cases}$$

O custo esperado (custo médio) é E(C) = 10 × P(C = 10) + 18 × P(C = 18). Usando a variável X calculamos

$$P(C=10) = P(X \geq 200) = 1 - P(X < 200) = 1 - F(200) = e^{-2},$$

$$P(C=18) = P(X \leq 200) = F(200) = 1 - e^{-2} \text{ e}$$

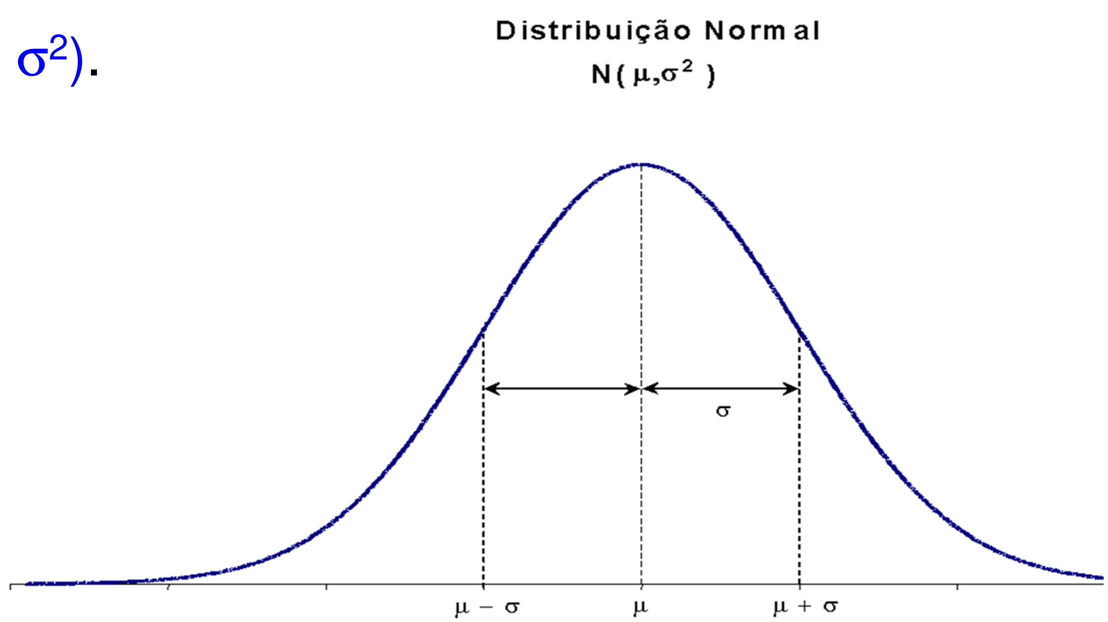
$$E(C) = 10 \times e^{-2} + 18 \times (1 - e^{-2}) = \$16,9.$$

5.3. Modelo normal (ou gaussiano)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se sua função densidade é dada por

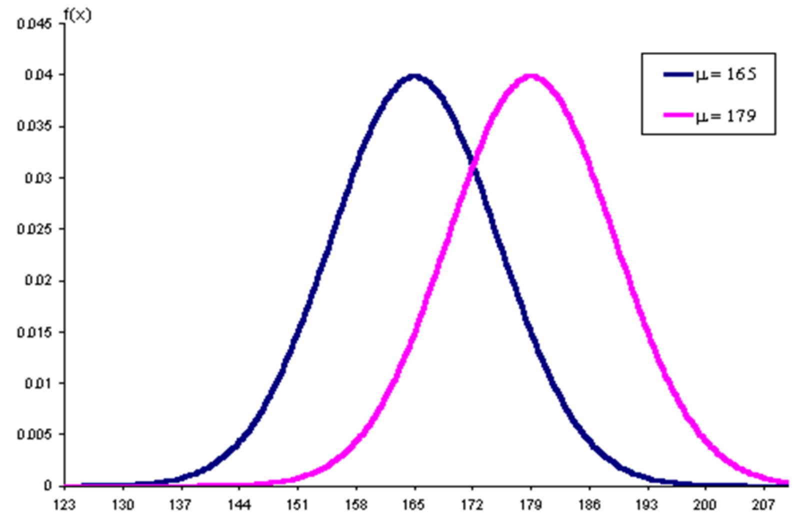
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ x \in R.$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

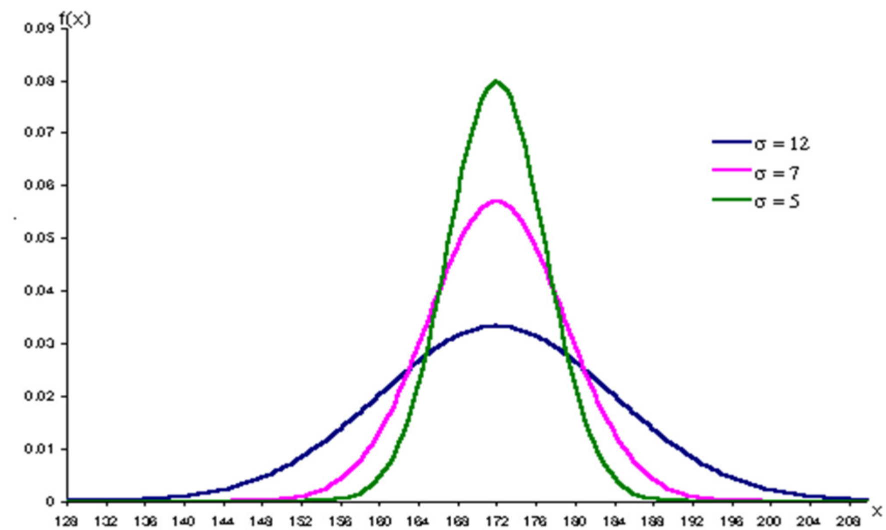


Exemplos

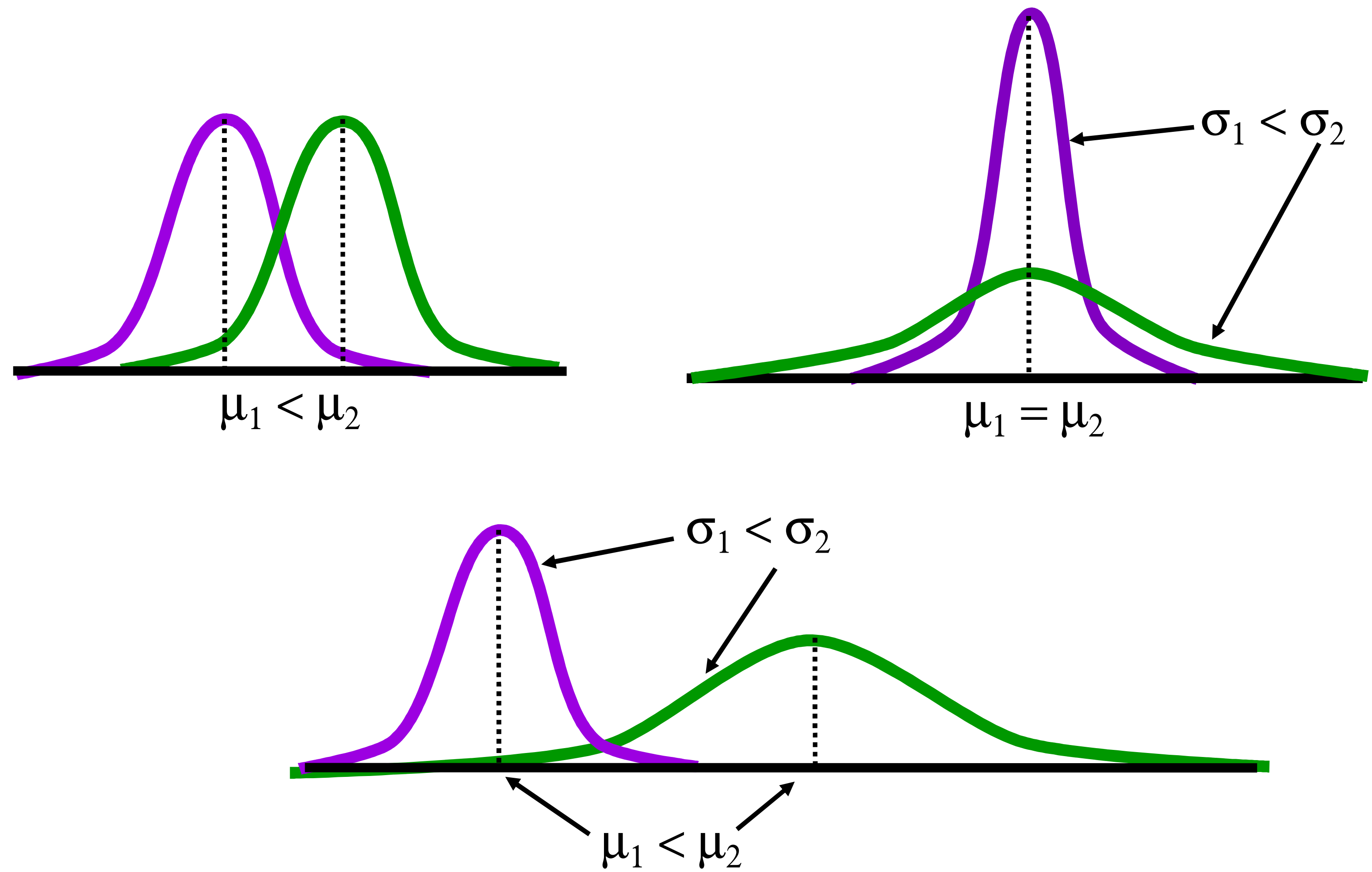
Distribuições normais com médias diferentes e variâncias iguais.



Distribuições normais com médias iguais e variâncias diferentes.



Exemplos



Propriedades

(a) E(X) = μ, Var(X) = σ^2 e mediana = moda = μ.

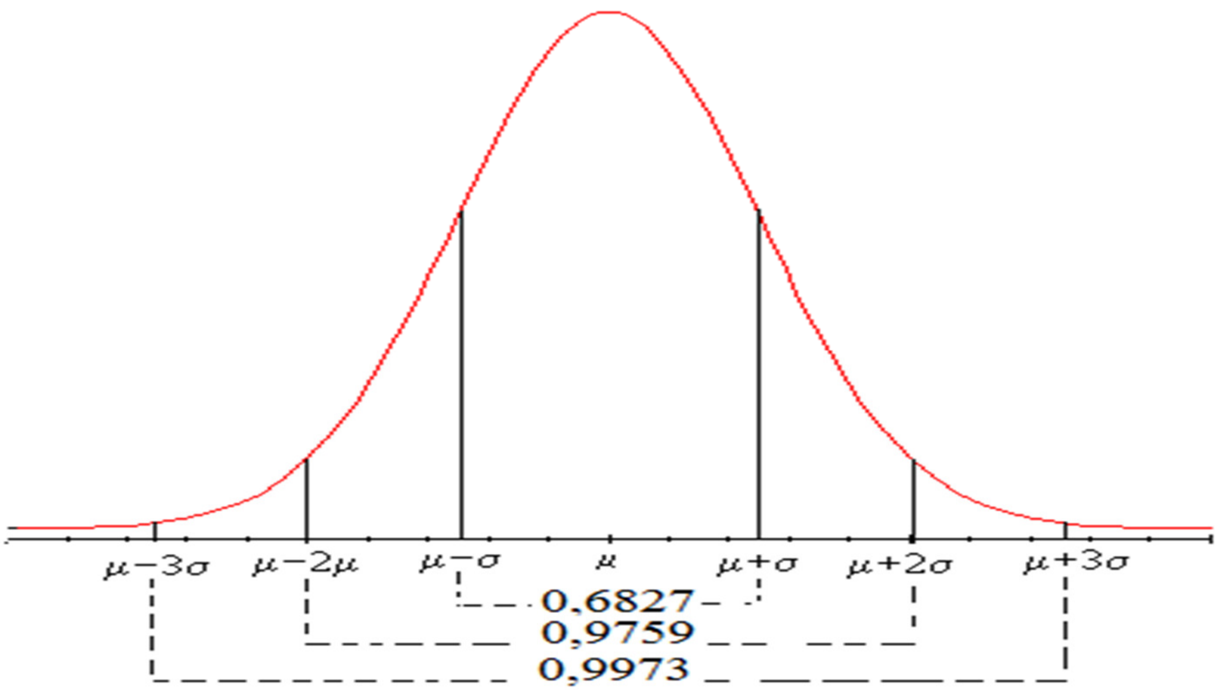
(b) A distribuição é simétrica em relação à média.

(c) Como a área total sob curva é igual a 1, à esquerda e à direita de μ a área é igual a 0,5.

(d) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0{,}6827$,

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9759$ e

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9973$.



Propriedades

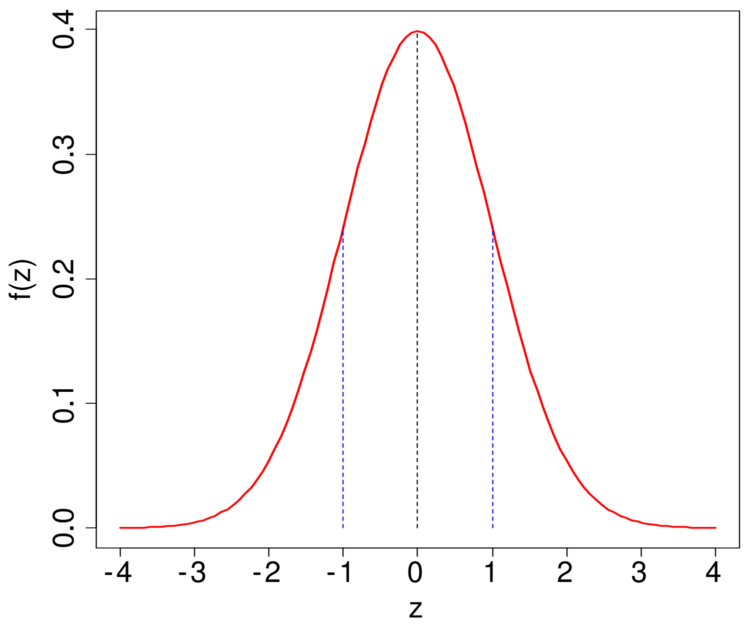
A função de distribuição acumulada de uma v.a. X ~ N(μ, σ²) é

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt.$$

Integral sem solução analítica.
Cálculo de probabilidades com o auxílio de tabelas.

Normal padrão ou reduzida. Se Z é uma v.a. normal com média 0 e variância 1, então Z é chamada de uma v.a. normal padrão ou reduzida e sua função densidade é

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},\ z \in R.$$



A função de distribuição acumulada de uma v.a. Z ~ N(0,1) é

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt.$$

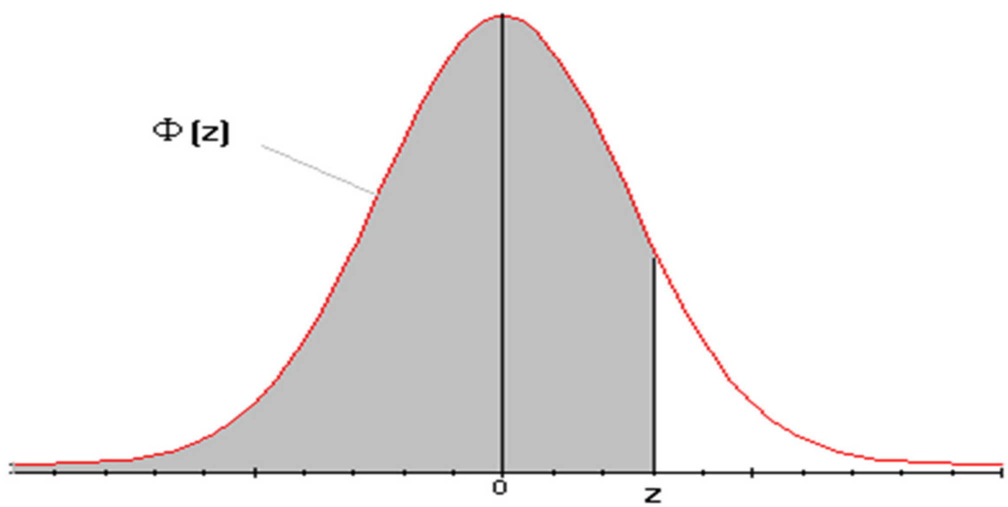
Uso da tabela normal

Table A.3. Areas under the normal curve.

Z ~ N(0,1): distribuição normal padrão.

Valores no corpo da tabela: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$, z com duas decimais.

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}t^2)\,dt\,, \quad -3{,}40 \leq z \leq 3{,}49\,.$$



Uso da tabela normal

1ª coluna: parte inteira de z e 1ª decimal.

1ª linha: 2ª decimal de z.

Exemplo. $P(Z \leq -1{,}25)$ é encontrada na interseção da linha correspondente a –1,2 com a coluna 0,05:

2ª decimal

Parte inteira e 1ª decimal

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4										
...										
-1,2						0,1056				
...										
3,4										

Resposta. $P(Z \leq -1{,}25) = 0{,}1056$.

Exemplo

Se Z ~ N(0,1), calcule
(a) P(Z < 1,80),
(b) P(0,80 < Z < 1,40),
(c) P(Z > -0,57) e
(d) o valor de k tal que
P(Z < k) = 0,05.

Em R e Excel:

(a) pnorm(1.8) e =DIST.NORMP(1,8).

(b) pnorm(1.4)-pnorm(1.8) e

= DIST.NORMP(1,4) – DIST.NORMP(0,8).

(c) 1-pnorm(-0.57) e =1-DIST.NORMP(-0,57).

(d) qnorm(0.05) e =INV.NORMP(0,05).

Solução. Da tabela normal padrão tem-se

$$(a)\ P(Z < 1{,}80) = \Phi(1{,}80) = 0{,}9641,$$

$$\text{(b) } \mathrm{P}(0{,}80 < Z < 1{,}40) = \Phi(1{,}40) - \Phi(0{,}80) = 0{,}9192 - 0{,}7881 = 0{,}1311,$$

$$(c)\ P(Z > -0{,}57) = 1 - P(Z \leq -0{,}57) = 1 - 0{,}2843 = 0{,}7157,$$

$$(d)\ P(Z < k) = 0{,}05 \Rightarrow k = -1{,}64.$$

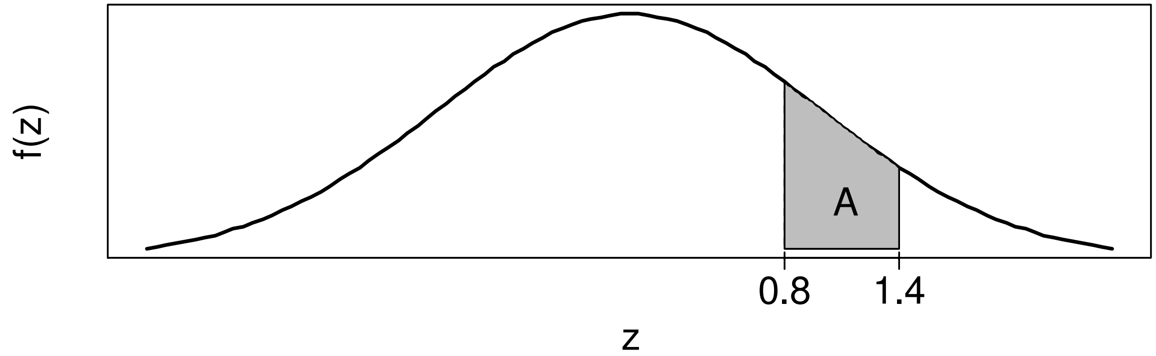
Observação. Para todo k > 0,

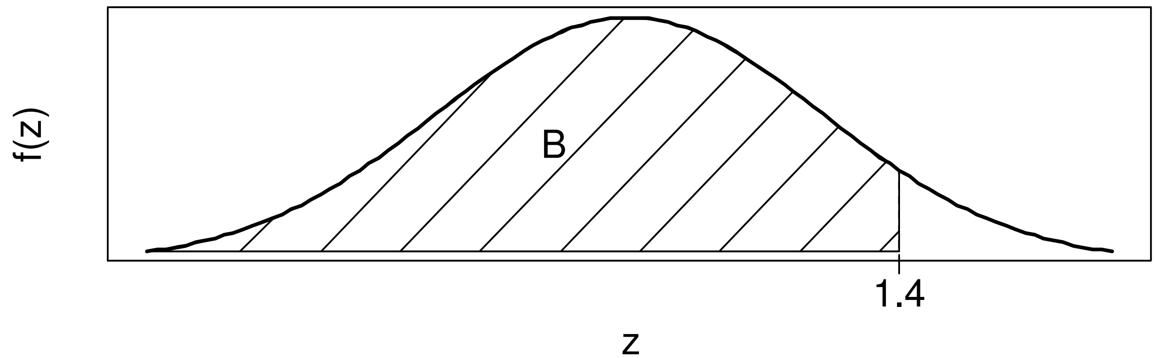
$$(i)\ \mathrm{P}(Z \leq -k) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq k) \quad \text{e}$$

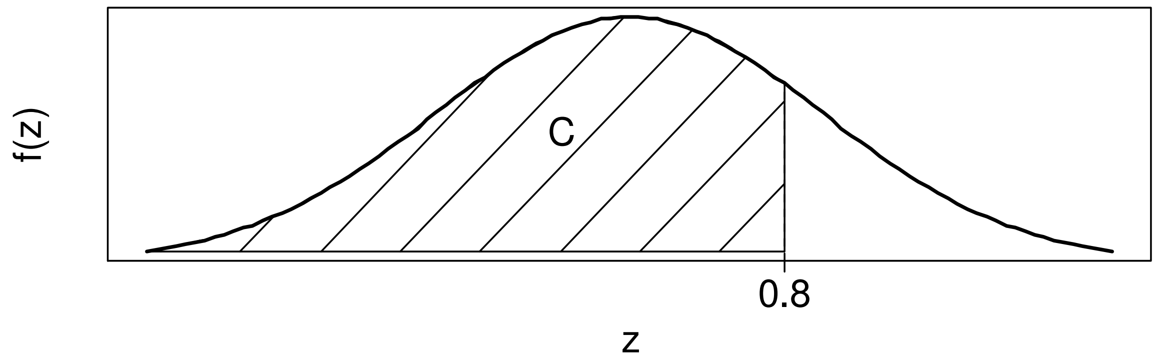
$$(ii)\ \mathrm{P}(-k \leq Z \leq k) = 2\mathrm{P}(Z \leq k) - 1 = 1 - 2\mathrm{P}(Z \leq -k).$$

Exemplo (b)

A = B – C, sendo que B e C são encontradas na tabela normal.







Transformação linear de uma variável normal

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Y = a + bX \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, sendo que $\mu_Y = a + b\mu$ e $\sigma_Y^2 = b^2\,\sigma^2$.

Tomando $a = -\mu / \sigma$ e $b = 1 / \sigma$ obtemos a padronização

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Distribuição normal padrão ou reduzida.

Exemplo. Se $X \sim N(90,100)$, determinar

(a) $P(80 < X < 100)$,

(b) $P(|X - 90| < 30)$ e

(c) o valor de a tal que $P(90 - 2a < X < 90 + 2a) = 0,99$.

Exemplo

$$(a)\; P(80 < X < 100) = P\left(\frac{80-90}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{100-90}{10}\right) = P(-1{,}00 < Z < 1{,}00)$$

$$= 2P(Z \le 1{,}00) - 1 = 2 \times 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826.$$

$$(b)\; P(|X-90| < 30) = P(-30 < X-90 < 30) = P\left(-\frac{30}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{30}{10}\right)$$

$$= P(-3{,}00 < Z < 3{,}00) = 2P(Z < 3{,}00) - 1$$

$$= 2 \times 0{,}9987 \text{ -} 1 = 0{,}9974.$$

$$(c)\; P(90-2a < X < 90+2a) = P(-2a < X-90 < 2a) = P\left(-\frac{2a}{10} < \frac{X-90}{10} < \frac{2a}{10}\right)$$

$$= 2P\left(Z \le \frac{a}{5}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a}{5}\right) = 0{,}995$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = 2{,}57 \Rightarrow a = 12{,}85.$$

Exemplo

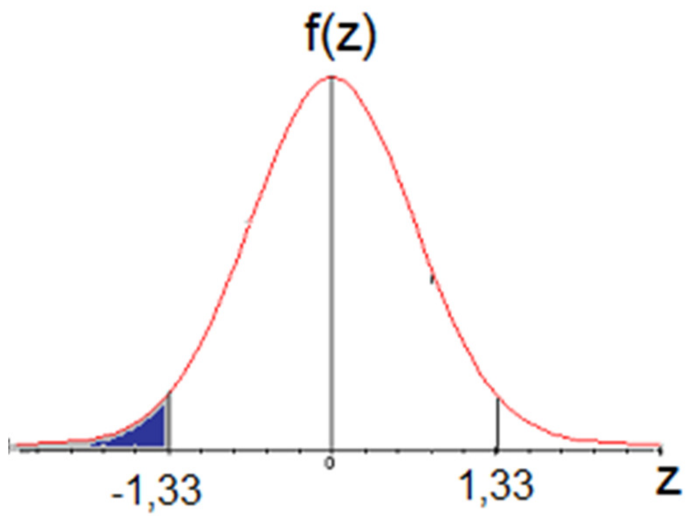
O tempo necessário para produzir um lote de itens tem distribuição normal com média 120 minutos e desvio padrão 15 minutos.

(a) Sorteando-se um lote produzido, qual a probabilidade de que tempo de produção seja inferior a 100 minutos?

Solução. Definimos X como o tempo de produção do lote. Pelo enunciado, $X \sim N(120, 15^2)$. Calculamos

$$P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100-120}{15}\right) = P(Z \leq -1{,}33)$$

$$= \Phi(-1{,}33) = 0{,}0918.$$



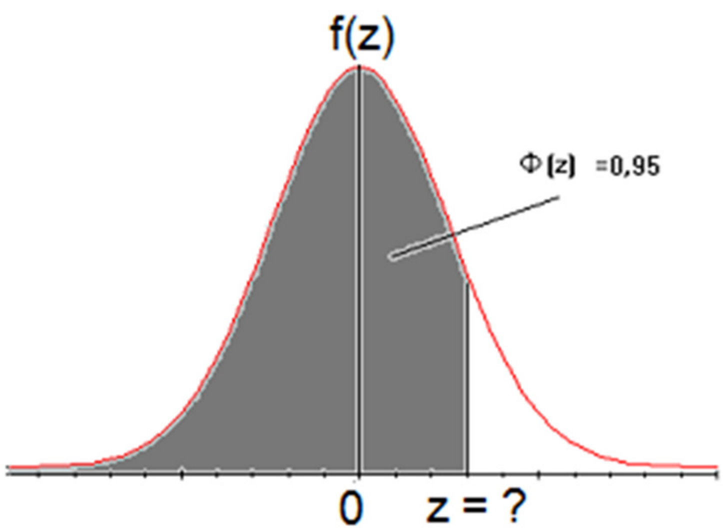
Exemplo

(b) Qual o tempo correspondente à produção de 95% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x tal que P(X < x) = 0,95. Após uma transformação,

$$P(X < x) = P\left(Z < \frac{x - 120}{15}\right) = 0,95.$$

Iniciamos encontrando z tal que Φ(z)=0,95.



Da tabela normal, z = 1,64. Logo,
x = 120 + 1,64 $\times$ 15 = 144,6 min.

Em Excel: =INV.NORMP(0,95)
= z = 1,644853.

=120 + INV.NORMP(0,95) * 15

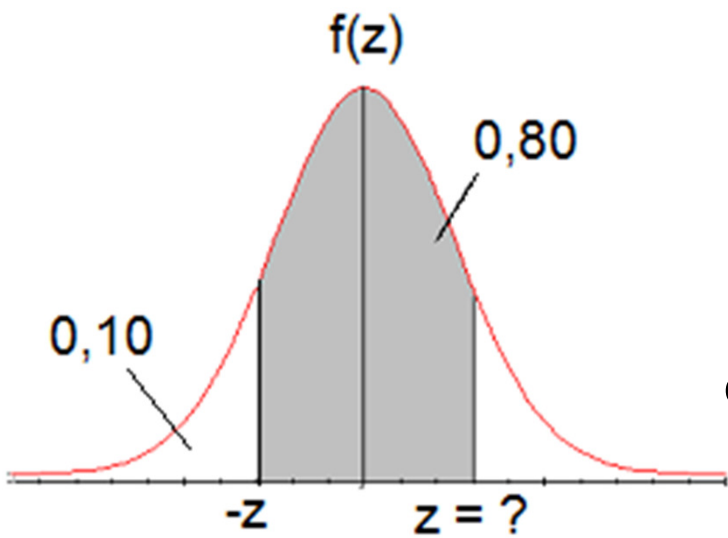
= 144,6728.

Exemplo

(c) Qual o intervalo de tempo central correspondente à produção de 80% dos itens?

Solução. Devemos encontrar x_1 e x_2 tais que

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0,80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \leq Z \leq \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0,80 .$$



Probabilidade acumulada até o ponto z é igual a 0,90.

Iniciamos encontrando z tal que $\Phi(z) = 0,90$. Da tabela normal, z = 1,28. Logo,

$$\frac{x_1 - 120}{15} = -1,28 \Rightarrow x_1 = 120 - 15 \times 1,28 \Rightarrow x_1 = 100,8 \text{ min},$$

$$\frac{x_2 - 120}{15} = 1,28 \Rightarrow x_2 = 120 + 15 \times 1,28 \Rightarrow x_2 = 139,2 \text{ min} .$$

Teorema central do limite

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ é uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição com média μ e desvio padrão σ ($0 < \sigma < \infty$), então a distribuição aproximada de

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$$ é normal padrão N(0,1),

sendo que $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ é a média amostral.

Observações.

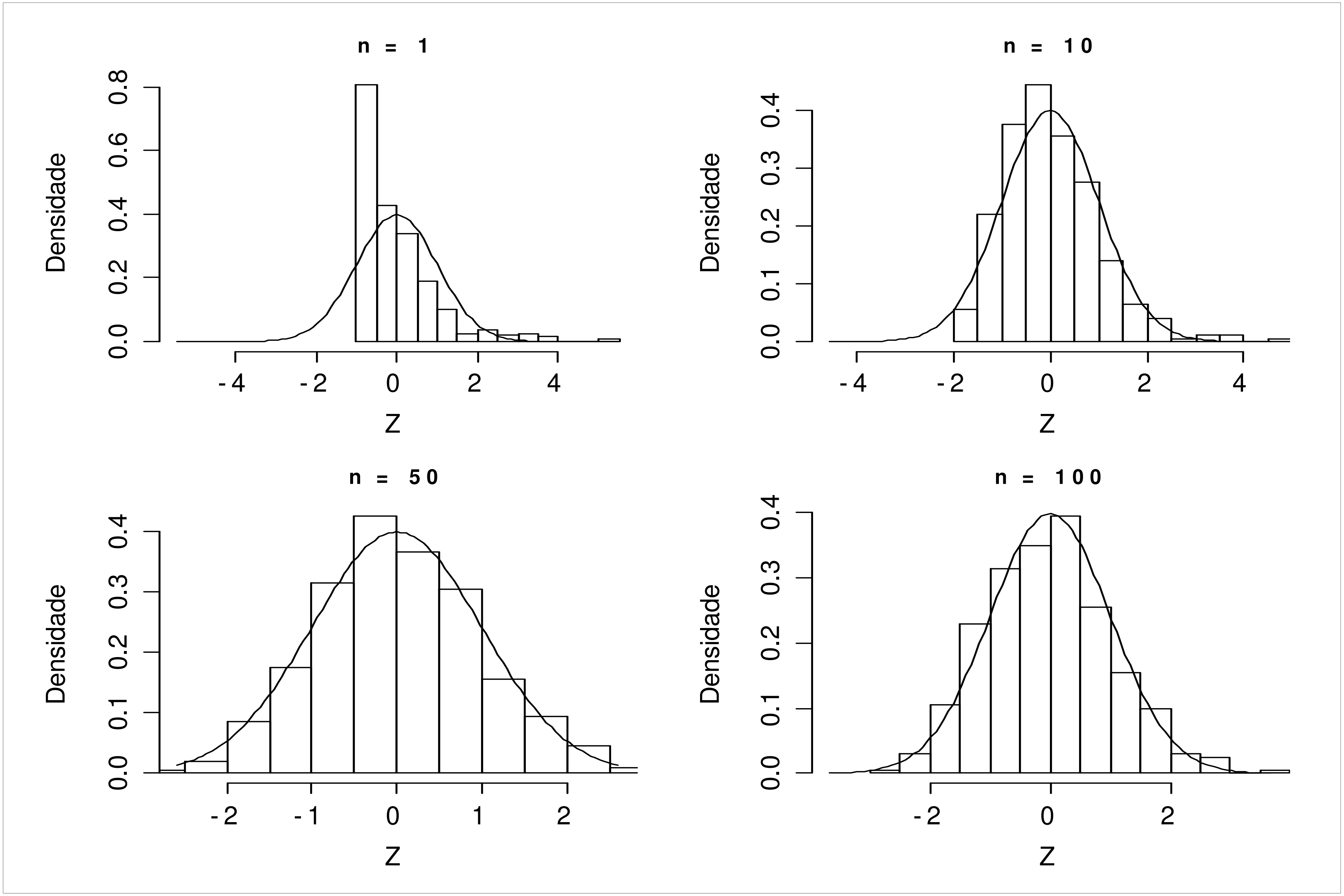
(1) Quanto maior n, melhor a aproximação.

(2) A distribuição das variáveis X pode ser discreta ou contínua.

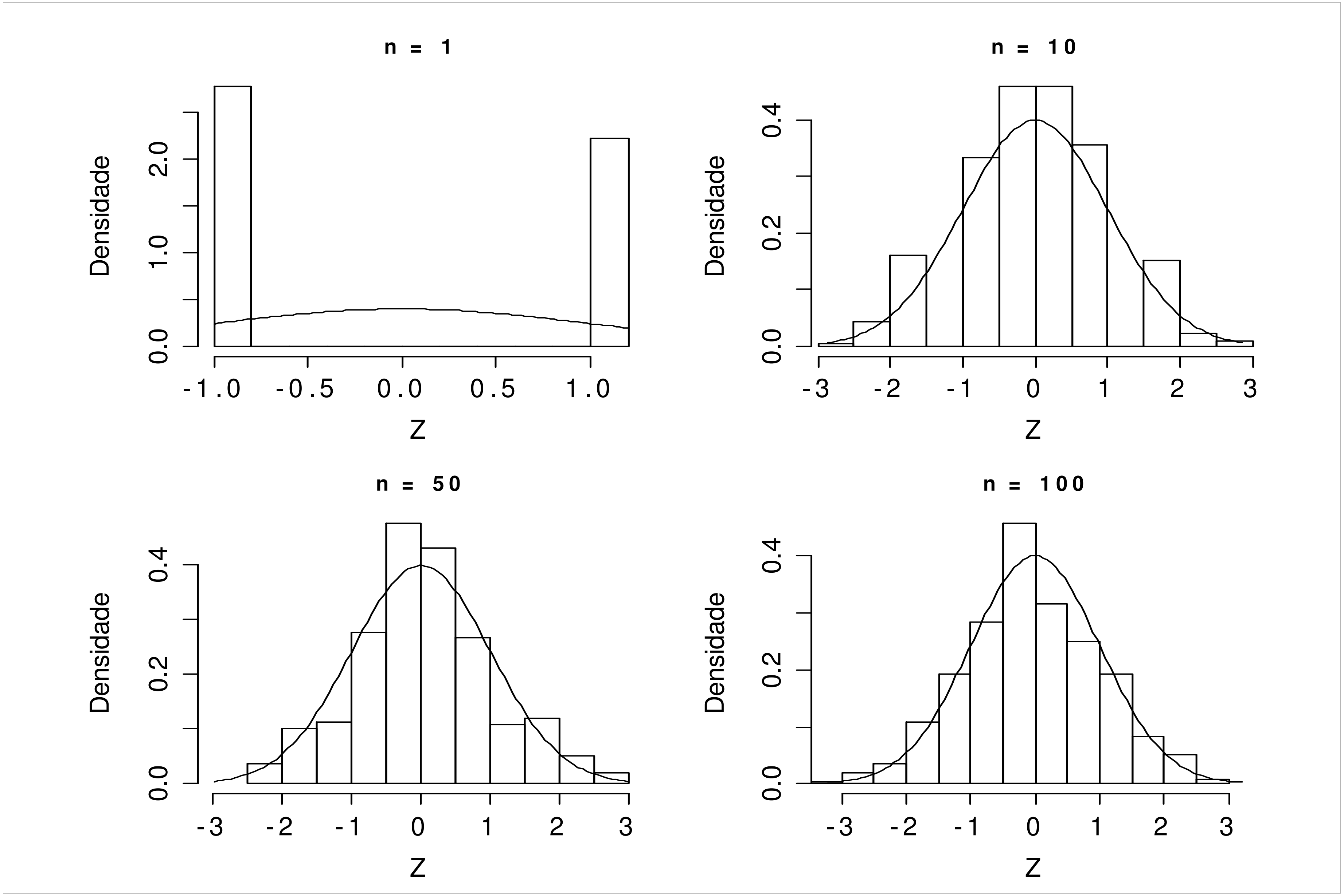
(3) A distribuição aproximada de

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ é } \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Teorema central do limite – Distribuição exponencial



Teorema central do limite – Distribuição Bernoulli (p = 0,45)



Exemplo

Após arredondamento para o inteiro mais próximo, 48 números são somados. Os erros de arredondamento individuais são uniformemente distribuídos no intervalo (-0,5; 0,5). Qual a probabilidade de que a soma dos números arredondados seja diferente da verdadeira soma por mais de 3 unidades (em ambos os sentidos) ?

Solução. Utilizando o teorema central do limite obtemos uma solução aproximada.

X_i, i = 1,...,48 são os erros de arredondamento tais que $X_i \sim U(-0,5; 0,5)$,

$E(X_i) = (-0,5 + 0,5) / 2 = 0$ e $Var(X_i) = [0,5 – (-0,5)]^2 / 12 = 1 / 12$ (veja lâmina 2).

O erro de arredondamento E é dado por $E = X_1 + X_2 + ... + X_{48}$, sendo que a distribuição aproximada é $E \sim N(48 \times 0, 48 \times 1/12) = N(0,4)$.

Devemos calcular $P((E < -3) \cup (E > 3))$, que é igual a $P(E < -3) + P(E > 3)$.

Usando a distribuição aproximada, $P(E < -3) + P(E > 3) = 2\ P(E < -3)$

$$= 2P\left(\frac{E - 0}{2} < \frac{-3-0}{2}\right) = 2P(Z < -1,50) = 2 \times 0,0668 = 0,1336.$$