Notas do Curso de SMA308 - Análie II

Prof. Wagner Vieira Leite Nunes

São Carlos - Agosto de 2011

Sumário

Capítulo 1

Introdução

02.08.2011 - 1.a

O objetivo destas notas é ser um texto de apoio para a disciplina SMA308 Análise II que trata em uma primeira parte de conceitos relacionados com a integral de Riemann e Riemann-Stieltjes de funções de uma variável real a valores reais ou a valores vetoriais, propriedades das mesmas, relações entre estas e aplicações.

Em uma segunda etapa serão estudados tópicos relacionados com sequência e séries de funções; estudo da convergência pontual ou uniforme, propriedades e aplicações.

Em uma terceira etapa trataremos da continuidade, diferenciabilidade de funções de várias variáveis reais a valores reais ou vetoriais, propriedades e aplicações.

Finalizando com enunciaremos, provaremos e aplicaremos os Teoremas da função implícita e da função inversa para funções de várias variáveis reais a valores reais ou vetoriais.

Iniciaremos fixando a notação dos elementos que serão utilizados ao longo das notas.

Notação 1.0.1

$$\mathbb{N} \doteq \{1, 2, 3, \cdots\} \qquad \textit{(conjunto dos números naturais)}$$

$$\mathbb{Z} \doteq \{\cdots, 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} \qquad \textit{(conjunto dos números inteiros)}$$

$$\mathbb{Q} \doteq \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\} \qquad \textit{(conjunto dos números racionais)}$$

$$\mathbb{Q} \doteq \{x \neq \frac{p}{q}, \forall p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\} \qquad \textit{(conjunto dos números irracionais)}$$

$$\mathbb{R} \doteq \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \qquad \textit{(conjunto dos números reais)}$$

Capítulo 2

A Integral de Riemann-Stieltjes

04.08.2011 - 2.a

Neste capítulo introduziremos a integral de Riemann-Stieltjes de uma função definida em um intervalo fechado e limitado a valores reais.

Para isto relembraremos o conceito de supremo e ínfimo e algumas propriedades relacionadas com estes conceitos.

2.1 Supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Começaremos pelos importantes conceitos estudados no curso de Análise I: supremo de ínfimo de certos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.1 *Diremos que o subconjunto* $E \subseteq \mathbb{R}$ *é* **limitado superiormente** *em* $\mathbb{R}$ *se existir* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$e \leq \beta, \quad \forall e \in E.$$

Neste caso β *será dito* **limitante superior de** E.

De modo semelhante, diremos que o subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}$ *é* **limitado inferiormente** *em* $\mathbb{R}$ *se existir* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\alpha \leq f, \quad \forall f \in F.$$

Neste caso α *será dito* **limitante inferior de** F.

Diremos que o subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ *é* **limitado** *em* $\mathbb{R}$ *se for limitado superiormente e inferiormente, isto é,*

Notemos que

Proposição 2.1.1 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$.

O conjunto E *será limitado em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se, existe* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$-\gamma \leq e \leq \gamma, \quad \forall e \in E.$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

$\square$

Temos os:

Exemplo 2.1.1 *Seja* $E \doteq [2, \infty) \subseteq \mathbb{R}$.

Então E *é limitado inferiormente (pois,* $\alpha \leq 2$ *será um limitante inferior do conjunto* E*) mas* **<u>não</u>** *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.2 *Seja* $E \doteq (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Então E *é limitado superiormente (pois,* $\beta \geq \sqrt{2}$ *é um limitante superior do conjunto* E*) mas* **<u>não</u>** *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.3 *Seja* $E \doteq (-1, \sqrt{2}) \subseteq \mathbb{R}$.

Então E *é limitado em* $\mathbb{R}$.

De fato, E *é limitado superiormente (pois,* $\beta \geq \sqrt{2}$ *é um limitante superior do conjunto* E*) e é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$ *(pois,* $\alpha \leq -1$ *é um limitante inferior do conjunto* E*).*

Com isto podemos introduzir a:

Definição 2.1.2 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$, *não vazio e limitado superiormente, não vazio, de* $\mathbb{R}$.

Suponhamos que exista $\alpha \in \mathbb{R}$ *que têm as seguintes propriedades:*

1. α *é um limitante superior de* E;
2. *se* $\gamma < \alpha$ *então* γ *não será limitante superior de* E.

Neste caso diremos que α *é o* **<u>supremo do conjunto E</u>**, *e será denotado por* $\sup(E)$, *isto é,*

$$\sup(E) \doteq \alpha.$$

Observação 2.1.1 *A definição acima nos diz que* α *é o menor limitante superior do conjunto* E *(se existir).*

De modo semelhante temos a:

Definição 2.1.3 *Seja* $F \subseteq \mathbb{R}$, *não vazio e limitado inferiormente, não vazio, de* $\mathbb{R}$.

Suponhamos que exista $\beta \in \mathbb{R}$ *que têm as seguintes propriedades:*

1. β *é um limitante inferior de* F;
2. *se* $\gamma > \beta$ *então* γ *não será limitante inferior de* F.

Neste caso diremos que β *é o* **<u>ínfimo do conjunto F</u>**, *e será denotado por* $\inf(F)$, *isto é,*

$$\inf(F) \doteq \beta.$$

Observação 2.1.2 *A definição acima nos diz que* β *é o maior limitante inferior do conjunto* F *(se existir).*

Exemplo 2.1.4 *Seja* $E \doteq (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Então

$$\sup(E) = 1 \quad e \quad \inf(E) = 0.$$

Resolução:

Notemos que o conjunto formado por todos os limitantes superiores será:

$$LS \doteq [1, \infty),$$

assim o menor limitante superior será 1, ou seja, $\sup(E) = 1$.

Por outro lado, o conjunto formado por todos os limitantes inferiores será:

$$LI \doteq (-\infty, 0],$$

assim o maior limitante inferior será 0, ou seja, $\inf(E) = 0$.

Temos um modo equivalente a definição de supremo que é dada pelo:

Teorema 2.1.1 *Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ limitado superiormente, não vazio, de $\mathbb{R}$.*
Então $\alpha = \sup(E)$ se, e somente se,

1' α é limitante superior de E;

2' dado $\varepsilon > 0$ existe $e \in E$ tal que

$$\alpha - \varepsilon < e \leq \alpha.$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Temos o análogo para o ínifimo:

Teorema 2.1.2 *Seja $F \subseteq \mathbb{R}$ limitado inferiormente, , não vazio, de $\mathbb{R}$.*
Então $\beta = \inf(F)$ se, e somente se,

1' β é limitante inferior de F;

2' dado $\varepsilon > 0$ existe $f \in F$ tal que

$$\beta \leq f < \beta + \varepsilon.$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Antes de prosseguir temos o seguinte resultado sobre a existência do supremo (respectivamente, ínifimo):

Teorema 2.1.3 *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente (respectivamente, inferiormente), não vazio, de $\mathbb{R}$ possui supremo (respectivamente, ínfimo) em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [?] página 8.

□

Como consequência temos o

Corolário 2.1.1 *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado possui supremo e ínfimo em $\mathbb{R}$.*

Para finalizar esta seção temos o seguinte resulatado importante relacionado com a operações de supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

Teorema 2.1.4 *Sejam* $c \in \mathbb{R}$, $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ *subconjuntos limitados superiormente, não vazios, de* $\mathbb{R}$ *e* $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}$ *subconjuntos limitados inferiormente, não vazios, de* $\mathbb{R}$. *Então:*

1. *Se* $E_1 \subseteq E_2$ *então*
$$\sup(E_1) \leq \sup(E_2).$$

2. *Se* $F_1 \subseteq F_2$ *então*
$$\inf(F_1) \geq \inf(F_2).$$

3. $E_1 + E_2$ *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$ *e*
$$\sup(E_1) + \sup(E_2) \geq \sup(E_1 + E_2).$$

4. $F_1 + F_2$ *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$ *e*
$$\inf(F_1) + \inf(F_2) \leq \inf(F_1 + F_2).$$

5. *Se* $E_1, E_2 \subseteq [0, \infty)$ *então* $E_1.E_2$ *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}S$ *e*
$$\sup(E_1.E_2) = \sup(E_1).\sup(E_2).$$

6. *Se* $F_1, F_2 \subseteq [0, \infty)$ *então* $F_1.F_2$ *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}S$ *e*
$$\inf(F_1.F_2) = \inf(F_1).\inf(F_2).$$

7. *Se* $c > 0$ *então* $c.E_1$ *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$ *e*
$$\sup(c.E_1) = c.\sup(E_1).$$

8. *Se* $c < 0$ *então* $c.E_1$ *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$ *e*
$$\inf(c.E_1) = c.\sup(E_1).$$

9. *Se* $c > 0$ *então* $c.F_1$ *é limitado inferiormente em* $\mathbb{R}$ *e*
$$\inf(c.F_1) = c.\inf(F_1).$$

10. *Se* $c < 0$ *então* $c.F_1$ *é limitado superiormente em* $\mathbb{R}$ *e*
$$\sup(c.F_1) = c.\inf(F_1).$$

Demonstração:

Foi vista no curso de Análise I e será deixada como exercício para o leitor.

□

Como consequência temos o

Corolário 2.1.2 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *subconjunto limitado não vazio de* $\mathbb{R}$. *Então* $-A$ *também é um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}$ *e*
$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

2.2 A integral de Riemann-Stieltjes

Para introduzir a integral de Riemann-Sieltjes de uma função real limitada definida em um intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$ precisaremos da:

Definição 2.2.1 *Consideremos* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *o intervalo limitado e fechado de* $\mathbb{R}$.

Sejam

$$x_o \doteq a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \doteq b.$$

O conjunto

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o, \cdots, x_n\}$$

será dito **partição do intervalo** $[a, b]$.

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ *denotaremos o comprimento do intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *por:*

$$\Delta x_i \doteq x_i - x_{i-1}. \tag{2.1}$$

Temos também a

Definição 2.2.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada.*

Dada uma partição $\mathcal{P} \doteq \{x_o, \cdots, x_n\}$ *do intervalo* $[a, b]$, *para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *definamos*

$$M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \tag{2.2}$$

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \tag{2.3}$$

(como a função $\underline{f}$ *é limitada em* $[a, b]$ *segue que existem os supremos e ínfimos acima) e*

$$U(\mathcal{P}, f) \doteq \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i, \tag{2.4}$$

$$L(\mathcal{P}, f) \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i, \tag{2.5}$$

denominadas **soma superior, respectivamente, inferior,** *sobre a partição* $\mathcal{P}$ *associada à função* $\underline{f}$.

Observação 2.2.1 *Notemos que:*

1. *Como* $m_i \leq M_i$ *para todo* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *segue que*

$$L(\mathcal{P}, f) \leq U(\mathcal{P}, f). \tag{2.6}$$

2. *Denotemos por* $\mathfrak{P}$ *a coleção formada por todas as partições do intervalo* $[a, b]$.

3. *Se*

$$m \doteq \inf_{x \in [a,b]} f(x) \tag{2.7}$$

então

$$m \underbrace{(b - a)}_{=\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i} = \sum_{i=1}^{n} m \, \Delta x_i \overset{m \leq m_i \leq M_i \text{ em cada } [x_{i-1}, x_i]}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f),$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq U(\mathcal{P}, f), \tag{2.8}$$

Logo podemos concluir que o subconjunto de $\mathbb{R}$*:*

$$\{U(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$$

é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$*, logo possui ínfimo, ou seja, existe*

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f)$$

4. *Se*

$$M \doteq \sup_{x \in [a,b]} f(x) \tag{2.9}$$

então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \overset{m_i \leq M_i \text{ em cada } [x_{i-1}, x_i]}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \overset{M_i \leq M \, \forall i \in \{1, \cdots, n\}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M \, \Delta x_i \\ &= M \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i}_{=b-a} = M(b-a), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}, f), \leq M(b-a) \tag{2.10}$$

Logo podemos concluir que o subconjunto de $\mathbb{R}$*:*

$$\{L(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$$

é limitado superiormente em $\mathbb{R}$*, logo possui supremo, ou seja, existe*

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f)$$

Com isto temos a:

Definição 2.2.3 *Na situação acima, definimos a* **integral superior de Riemann** *da função* $\underline{f}$ *no intervalo* $[a, b]$*, que será indicada por* $\overline{\int_a^b} f(x) \, dx$*, com o sendo:*

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx \doteq \inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f) \tag{2.11}$$

e definimos a **integral inferior de Riemann** *da função* $\underline{f}$ *no intervalo* $[a, b]$*, que será indicada por* $\underline{\int_a^b} f(x) \, dx$*, com o sendo:*

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, dx \doteq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f). \tag{2.12}$$

Se

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx = \underline{\int_a^b} f(x) \, dx$$

diremos que a função $\underline{f}$ é **Riemann integrável em** $[a, b]$ *e o valor comum acima será dito* **integral de Riemann** *da função $\underline{f}$ no intervalo $[a, b]$ e será indicada por* $\int_a^b f(x)\,dx$*, ou seja,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{2.13}$$

Denotaremos por $\mathfrak{R}([a, b])$, ou simplesmente por $\mathfrak{R}$, o conjunto formado por todas as funções a valores reais que são Riemann integráveis no intervalo $[a, b]$.

Observação 2.2.2

Questão: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada então $f \in \mathfrak{R}([a, b])$?

A resposta a esta questão é negativa.

Para ver isto, notemos que a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \end{cases}$$

é uma função limitada em $[0, 1]$ mas **não** *é uma função Riemann integrável em $[0, 1]$.*

Deixaremos a verifcação destes fatos como exercício para o leitor.

$\boxed{\textbf{9.08.2011 - 3.a}}$

Na verdade trataremos de situações mais gerais, mais especificamente, temos:

Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente em $[a, b]$, isto é,

$$\alpha(x) \leq \alpha(y) \quad \text{para} \quad x \leq y, \; x, y \in [a, b].$$

Observemos que sendo a função $\underline{\alpha}$ monótona crescente deveremos ter

$$-\infty < \alpha(a) \leq \alpha(x) \leq \alpha(b) < \infty, \quad x \in [a, b],$$

ou seja, a função $\underline{\alpha}$ será limitada em $[a, b]$.

Dada a partição $\mathcal{P} \doteq \{x_o, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, definamos

$$\Delta\alpha_i \doteq \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}). \tag{2.14}$$

Notemos que a função $\underline{\alpha}$ monótona crescente segue que

$$\Delta\alpha_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Dada a função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definamos

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \doteq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta\alpha_i, \tag{2.15}$$

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \doteq \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta\alpha_i, \tag{2.16}$$

onde, para $i \in \{1, \cdots, n\}$, M_i, m_i são dados por (2.2) e (2.3), respectivamente.

Observação 2.2.3

1. *Notemos que, na situação acima, teremos:*

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq L(\mathcal{P}, f, \alpha) \tag{2.17}$$
$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq m[\alpha(b) - \alpha(a)] \tag{2.18}$$
$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)], \tag{2.19}$$

   onde m, M *são dados por (2.7) e (2.9), respectivamente.*

   Estas desigualdades seguem do fato que, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, *teremos:*

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

   e que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a).$$

2. *De (2.18) segue que o conjunto*

$$\{U(\mathcal{P}, f, \alpha) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\}$$

   é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ *logo admite ínfimo, isto é, existe*

$$\inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.20}$$

3. *De modo semelhante, de (2.19) segue que o conjunto*

$$\{L(\mathcal{P}, f, \alpha) : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}\} \tag{2.21}$$

   é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ *logo admite supremo, isto é, existe*

$$\sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha).$$

Definição 2.2.4 *Na siutação acima, (2.20) será denominado* **integral superior de Riemann-Stieltjes** *da função* $\underline{f}$ *em* $[a, b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$ *e será denotada por* $\overline{\int_a^b} f \, d\alpha$, *ou seja,*

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha \doteq \inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.22}$$

De modo análogo, (2.21) será denominado **integral inferior de Riemann-Stieltjes** *da função* $\underline{f}$ *em* $[a, b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$ *e será denotada por* $\underline{\int_a^b} f \, d\alpha$, *ou seja,*

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \doteq \sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.23}$$

Se

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \underline{\int_a^b} f \, d\alpha,$$

diremos que a função $\underline{f}$ *é* **Riemann-Stieltjes integrável** *em* $[a, b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$ *e o valor comum das integrais acima será denominado* **integral de Riemann-Stieltjes** *da função* $\underline{f}$ *em* $[a, b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$ *e indicada por* $\int_a^b f\, d\alpha$, *isto é,*

$$\int_a^b f\, d\alpha \doteq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha. \tag{2.24}$$

Observação 2.2.4

1. *Também poderemos utilizar as seguintes notações para as integrais de Riemann-Stieltjes:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \doteq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha \tag{2.25}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x) \doteq \underline{\int_a^b} f\, d\alpha \tag{2.26}$$

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) \doteq \int_a^b f\, d\alpha. \tag{2.27}$$

2. *Observemos que, de (2.17) segue que:*

$$\underline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha$$

3. *Denotaremos o conjunto formado por todas as funções a valores reais, limitadas definidas no intervalo* $[a, b]$ *que são Riemann-Stieltjes integráveis relativamente à função* $\underline{\alpha}$ *por* $\mathfrak{R}(\alpha)$.

4. *Se* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$\alpha(x) \doteq x, \quad x \in [a, b],$$

segue que a integral de Riemann-Stieltjes relativamente à função $\underline{\alpha}$ *coincide com a integral de Riemann, ou seja,*

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\, dx.$$

5. *Notemos que a função* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *só precisa ser monótona crescente em* $[a, b]$ *para podermos definir a integral de Riemann-Stieltjes relativamente à função* $\underline{\alpha}$.

6. *Vamos supor, daqui em diante, que* $\alpha(b) > \alpha(a)$, *pois caso contrário a função* $\underline{\alpha}$ *seria constante em* $[a, b]$ *e pouco serviria para o estudo da integral de Riemann-Stieltjes de uma função a valores reais, limitada e definida em um intervalo* $[a, b]$.

A seguir passaremos a investigar em que situações existe a integral de Riemann-Stieltjes relativamente à função $\underline{\alpha}$ para uma função limitada, a valores reais $\underline{f}$ definida no intervalo $[a, b]$.

Para isto precisaremos da:

Definição 2.2.5 *Sejam* $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$ *duas partições do intervalo* $[a, b]$ *(isto é,* $\mathcal{P}, \mathcal{P}^* \in \mathfrak{P}$*).*

Diremos que a partição $\mathcal{P}^*$ *é um* **refinamento da partição** $\mathcal{P}$ *se* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*$, *ou seja, todo ponto da partição* $\mathcal{P}$ *é ponto da partição* $\mathcal{P}^*$.

Observação 2.2.5 *Sejam $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ duas partições do intervalo $[a,b]$ (isto é, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}$).*
Definamos

$$\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2. \tag{2.28}$$

Então $\mathcal{P}^*$ será um refinamento de ambas as partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, e será denominada **refinamento comum** *das partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.*

Com isto temos o

Proposição 2.2.1 *Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ partições do intervalo $[a,b]$ onde a partição $\mathcal{P}^*$ é um refinamento da partição $\mathcal{P}$. Então valem:*

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \tag{2.29}$$
$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.30}$$

Demonstração:
Suponhamos que

$$\mathcal{P} = \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}, \tag{2.31}$$
$$\mathcal{P} = \{a = x_o^*, x_1^*, \cdots, x_{m-1}^*, x_m^* = b\}. \tag{2.32}$$

Notemos que se $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ nada teremos a fazer e, neste caso, as desigualdades acima serão igualdades.
Logo podemos supor que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*$ e existe

$$x^* \in \mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}. \tag{2.33}$$

Consideremos, primeiramente, o caso que

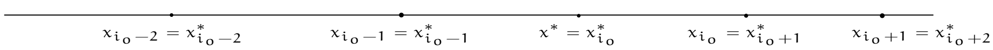
$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{x^*\}.$$

Logo, de (2.33), segue que existe $i_o \in \{1, \cdots, n\}$ tal que

$$x_{i_o-1} < x^* < x_{i_o},$$

ou seja, para $j \in \{1, \cdots, n+1\}$ teremos:

$$x_j^* = \begin{cases} x_j, & j \leq i_o - 1 \\ x^*, & j = i_o \\ x_{j-1}, & i_o + 1 \leq j \end{cases} \tag{2.34}$$



Para cada $j \in \{1, \cdots, n+1\}$, denotemos por (veja figura acima)

$$\Delta\alpha_j^* \doteq \alpha(x_j^*) - \alpha(x_{j-1}^*), \tag{2.35}$$

$$m_j^* \doteq \inf_{x \in [x_{j-1}^*, x_j^*]} f(x). \tag{2.36}$$

Notemos que $j \in \{1, \cdots, n+1\}$ teremos

$$m_j^* = \begin{cases} m_j, & j \leq i_o - 1 \\ \inf\limits_{x \in [x_{i_o-1}, x^*]} f(x), & j = i_o \\ \inf\limits_{x \in [x^*, x_{i_o}]} f(x), & j = i_o + 1 \\ m_{j-1}, & i_o + 2 \leq j \end{cases} \tag{2.37}$$

$$\Delta\alpha_j^* = \begin{cases} \Delta\alpha_j, & j \leq i_o - 1 \quad \text{ou} \quad i_o + 2 \leq j \\ \alpha(x^*) - \alpha(x_{i_o-1}), & j = i_o \\ \alpha(x_{i_o}) - \alpha(x^*), & j = i_o + 1 \end{cases} \tag{2.38}$$

Observemos também que (veja figura acima):

$$m_{i_o} = \inf_{x \in [x_{i_o-1}, x_{i_o}]} f(x) \overset{[x_{i_o-1}^*, x_{i_o}^*] \subseteq [x_{i_o-1}, x_{i_o}]}{\leq} \inf_{x \in [x_{i_o-1}^*, x_{i_o}^*]} f(x) = m_{i_o}^*, \tag{2.39}$$

$$m_{i_o} = \inf_{x \in [x_{i_o-1}, x_{i_o}]} f(x) \overset{[x_{i_o}^*, x_{i_o+1}^*] \subseteq [x_{i_o-1}, x_{i_o}]}{\leq} \inf_{x \in [x_{i_o}^*, x_{i_o+1}^*]} f(x) = m_{i_o+1}^*, \tag{2.40}$$

Logo

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{j=1}^{n+1} m_j^* \, \Delta\alpha_j^* - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i \\ &= \sum_{j=1, j \neq i_o, i_o+1}^{n+1} \underbrace{m_j^*}_{\overset{(2.37)}{=} m_j \text{ ou } m_{j-1}} \Delta\alpha_j^* + m_{i_o}^* \Delta\alpha_{i_o}^* + + m_{i_o+1}^* \Delta\alpha_{i_o+1}^* - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i \\ &= m_{i_o}^* \Delta\alpha_{i_o}^* + m_{i_o+1}^* \Delta\alpha_{i_o+1}^* - m_{i_o} \Delta\alpha_{i_o} \\ &= m_{i_o}^* [\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_o-1}] + m_{i_o+1}^* [\alpha(x_{i_o}) - \alpha(x^*)] - m_{i_o} [\alpha(x_{i_o}) - \alpha(x_{i_o-1})] \\ &= \underbrace{[m_{i_o}^* - m_{i_o}]}_{\overset{(2.39)}{\geq} 0} \underbrace{[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i_o-1})]}_{\overset{\alpha \text{ é mon. cresc. e } x^* \geq x_{i_o-1}}{\geq} 0} + \underbrace{[m_{i_o+1}^* - m_{i_o}]}_{\overset{(2.40)}{\geq} 0} \underbrace{[\alpha(x_{i_o}) - \alpha(x^*)]}_{\overset{\alpha \text{ é mon. cresc. e } x_{i_o} \geq x^*}{\geq} 0} \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \geq 0,$$

completando a demonstração de (2.29).

Se a partição $\mathcal{P}^*$ possui mais pontos (um número finito) repetimos o argumento acima um número finito de vezes para obter (2.29).

A demonstração da desigualdade (2.30) é análoga e sua elaboração será deixada como exercício para o leitor. $\boxed{\textbf{Exercício 1: +0.5}}$

□

Como consequência segue o:

Teorema 2.2.1 *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a,b]$. *Então*

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha. \tag{2.41}$$

Demonstração:

Sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ duas partições do intervalo $[a,b]$ e $\mathcal{P}^*$ o refinamento comum a estas duas partições (isto é, $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$).

Da Proposição acima segue que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}_1,f,\alpha) &\overset{\mathcal{P}_1\subseteq\mathcal{P}^* \text{ e } (2.29)}{\le} L(\mathcal{P}^*,f,\alpha) \overset{(2.17)}{\le} U(\mathcal{P}^*,f,\alpha) \\ &\overset{\mathcal{P}_2\subseteq\mathcal{P}^* \text{ e } (2.30)}{\le} U(\mathcal{P}_2,f,\alpha), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(\mathcal{P}_1,f,\alpha) \le U(\mathcal{P}_2,f,\alpha).$$

Portanto $U(\mathcal{P}_2,f,\alpha)$ é um limitante superior para o conjunto $\{L(\mathcal{P}_1,f,\alpha); \mathcal{P}_1 \in \mathfrak{P}\}$.

Logo

$$\sup_{\mathcal{P}_1\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1,f,\alpha) \le U(\mathcal{P}_2,f,\alpha).$$

Da desigualdade acima segue que $\sup\limits_{\mathcal{P}_1\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1,f,\alpha)$ é um limitante inferior do conjunto $\{U(\mathcal{P}_2,f,\alpha); \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}\}$.

Logo

$$\underbrace{\sup_{\mathcal{P}_1\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}_1,f,\alpha)}_{=\underline{\int_a^b} f\,d\alpha} \le \underbrace{\inf_{\mathcal{P}_2\in\mathfrak{P}} U(\mathcal{P}_2,f,\alpha)}_{=\overline{\int_a^b} f\,d\alpha},$$

ou seja,

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \le \overline{\int_a^b} f\,d\alpha,$$

completando a demonstração do teorema.

□

Com este resultado podemos obter uma outra caracterização equivalente para os elementos de $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, mais precisamente:

Corolário 2.2.1 *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a,b]$.

$f\in\mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *se, e somente se, dado* $\varepsilon>0$, *existe uma partição* $\mathcal{P}\in\mathfrak{P}$ *tal que*

$$0 \le U(\mathcal{P},f,\alpha) - L(\mathcal{P},f,\alpha) < \varepsilon. \tag{2.42}$$

Demonstração:

Suponhamos que (2.42) ocorre e mostremos que $f\in\mathfrak{R}(\alpha)$.

Observemos que se $\mathcal{P}\in\mathfrak{P}$ então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P},f,\alpha) &\le \sup_{\mathcal{P}'\in\mathfrak{P}} L(\mathcal{P}',f,\alpha) = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \overset{\text{Teor. acima}}{\le} \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \\ &= \inf_{\mathcal{P}'\in\mathfrak{P}} U(\mathcal{P}',f,\alpha) \le U(\mathcal{P},f,\alpha). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ tal que

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f\, d\alpha - \overline{\int_a^b} f\, d\alpha \overset{(2.43)}{\leq} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \overset{\text{Hipótese}}{<} \varepsilon, \tag{2.44}$$

ou seja,

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f\, d\alpha - \overline{\int_a^b} f\, d\alpha < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, mostrando que

$$\underline{\int_a^b} f\, d\alpha - \overline{\int_a^b} f\, d\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \overline{\int_a^b} f\, d\alpha,$$

isto é, a função $\underline{f}$ é Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$ relativamente à função $\underline{\alpha}$, ou ainda, $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$.

Por outro lado, se $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, dado $\varepsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{P}$ tais que

$$U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) \overset{\text{Teor. } (2.1.1)}{<} \overline{\int_a^b} f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$
$$L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) \overset{\text{Teor. } (2.1.2)}{>} \underline{\int_a^b} f\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2},$$

o que implicará em:

$$0 \leq U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) < \int_a^b f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.45}$$
$$0 \leq \int_a^b f\, d\alpha < \frac{\varepsilon}{2} + L(\mathcal{P}_1, f, \alpha). \tag{2.46}$$

Seja $\mathcal{P}$ o refinamento comum das partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ (isto é, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$).

Com isto teremos

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) &\overset{(2.30}{\leq} U(\mathcal{P}_2, f, \alpha) \overset{(2.45)}{<} \int_a^b f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\overset{(2.46)}{<} \left[\frac{\varepsilon}{2} + L(\mathcal{P}_1, f, \alpha)\right] + \frac{\varepsilon}{2} = L(\mathcal{P}_1, f, \alpha) + \varepsilon \overset{(2.29)}{\leq} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implicará em (2.42), completando a demonstração do resultado.

□

Temos alguns outros resultados semelhantes que são dados pelo:

Teorema 2.2.2 *Temos que:*

1. *Se (2.42) ocorrer para uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ e para $\varepsilon > 0$ então (2.42) também ocorrerá trocando-se a partição $\mathcal{P}$ por uma outra que é refinamento da mesma (com o mesmo $\varepsilon > 0$).*

2. *Se (2.42) ocorrer para a partição*

$$\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

e se para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ temos $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\, \Delta\alpha_i < \varepsilon. \tag{2.47}$$

3. *Se* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$, *a partição* $\mathcal{P}$ *é como no item acima e para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *se* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *então*
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon. \tag{2.48}$$

11.08.2011 - 4.a

Demonstração:

Suponhamos que vale (2.42) para a partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$.

De 1.:

Se a partição $\mathcal{P}^*$ é um refinamento da partição $\mathcal{P}$ então, de (2.29) e (2.30), segue que
$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \quad \text{e} \quad L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq L(\mathcal{P}^*, f, \alpha),$$
o que implicará em
$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \overset{(2.42)}{<} \varepsilon,$$
completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Sabemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, se $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ teremos $f(s_i), f(t_i) \in [m_i, M_i]$, o que implicará em
$$|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i.$$

Portanto
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\, \Delta\alpha_i &\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta\alpha_i \\ &\overset{(2.15) \text{ e } (2.16)}{=} U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \overset{(2.42)}{<} \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.49}$$
completando a demonstração do item 2. .

De 3.:

Como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, do Corolário (2.2.1) segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ tal que
$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.50}$$

Sabemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, se $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ teremos $f(t_i) \in [m_i, M_i]$, o que implicará em
$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) &\overset{(2.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta\alpha_i \overset{m_i \leq f(t_i)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i \overset{f(t_i) \leq M_i}{\leq} \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta\alpha_i \\ &\overset{(2.16)}{=} U(\mathcal{P}, f, \alpha) \overset{(2.50)}{<} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$
em particular,
$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2},$$
ou seja,
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta\alpha_i - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.51}$$

Por outro lado, da definição

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha = \overline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \overset{(2.50)}{<} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

em particular,

$$L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq \int_a^b f\, d\alpha < L(\mathcal{P}, f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ou seja,

$$\left| L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.52}$$

Portanto

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f\, d\alpha \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \right|}_{\overset{(2.51)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| L(\mathcal{P}, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right|}_{\overset{(2.52)}{<} \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{2.53}$$

completando a demonstração do item 3. .

□

Com estes resultados podemos demonstrar o:

Teorema 2.2.3 $C([a, b]; \mathbb{R}) \subseteq \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$.

Demonstração:

Lembremos que estamos supondo que $\alpha(b) > \alpha(a)$.

Dado $\varepsilon > 0$ escolhamos $\eta > 0$ tal que

$$\eta < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}. \tag{2.54}$$

Se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ então a função $\underline{f}$ será uniformemente continua em $[a, b]$ (pois $[a, b]$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$).

Logo existirá $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$x, t \in [a, b], \ |x - t| < \delta \quad \text{então teremos} \quad |f(x) - f(t)| < \eta. \tag{2.55}$$

Consideremos uma partição $\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$ de modo que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ tenhamos

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}| < \delta. \tag{2.56}$$

Notemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, como a função $\underline{f}$ é contínua em $[a, b]$ (em particular, em $[x_{i-1}, x_i]$ que é compacto) segue que existem $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(t_i) = m_i \quad \text{e} \quad f(t_i) = M_i, \tag{2.57}$$

ou seja, a função $\underline{f}$ assume o máximo e o mínimo absolutos em $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Com isto teremos

$$|M_i - m_i| = |f(s_i) - f(t_i)| \overset{|s_i - t_i| \leq |x_i - x_{i-1}| \overset{(2.56)}{<} \delta \text{ e } (2.55)}{<} \eta. \tag{2.58}$$

Assim teremos

$$
\begin{aligned}
U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{=|M_i - m_i| \overset{(2.58)}{<} \eta} \Delta\alpha_i \\
&< \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \underbrace{\eta}_{\overset{(2.54)}{<} \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}} [\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon. \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, completando a demonstração.

□

Temos também o:

Teorema 2.2.4 *Suponhamos que a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é monótona em* $[a, b]$ *e que a função* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seja monótona crescente e contínua em* $[a, b]$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$.

Demonstração:

Lembremos, uma vez mais que que estamos supondo que $\alpha(b) > \alpha(a)$.

Vamos exibir a demonstração para o caso em que a função $\underline{f}$ ser monótona crescente em $[a, b]$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(a) < f(b),$$

caso contrário a função $\underline{f}$ será constante (logo contínua em $[a, b]$) e, do Teorema anterior teremos que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$.

A demonstração para o caso em que a função $\underline{f}$ é monótona decrescente em $[a, b]$ é semelhante e será deixada como exercício para o leitor.

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $N \in \mathbb{N}$, escolhamos uma partição $\mathcal{P}_N \doteq \{a = x_o, \cdots, x_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$, de modo que

$$[f(b) - f(a)]\, \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{\varepsilon} < N, \qquad (2.60)$$

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \leq \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}. \qquad (2.61)$$

Notemos que a última condição é possível pois a função $\underline{\alpha}$ é uma função contínua em $[a, b]$, em particular, em $[x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Observemos também que

$$\underbrace{\alpha(x_o)}_{=\alpha(a)} < \underbrace{\alpha(x_o)}_{=\alpha(a)} + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N}. \qquad (2.62)$$

Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
(N-1)\alpha(a) < (N-1)\alpha(b) \;&\Rightarrow\; N\alpha(a) - \alpha(a) < N\alpha(b) - \alpha(b) \\
&\Rightarrow\; N\alpha(a) + \alpha(b) - \alpha(a) < N\alpha(b) \\
&\Rightarrow\; \alpha(a) + \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{N} < \alpha(b),
\end{aligned}
$$

que juntamente com (2.62) implicará em

$$\alpha(a) < \alpha(x_o) + \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N} < \alpha(b). \tag{2.63}$$

Logo como a função $\underline{\alpha}$ é contínua em $[a,b]$, segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe um menor $x_1 \in [a,b]$ tal que

$$\alpha(x_1) = \alpha(\underbrace{x_o}_{=a}) + \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}. \tag{2.64}$$

Como a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $[a,b]$ segue que $a = x_o < x_1 \leq b$.

Com isto teremos

$$\alpha(a) = \alpha(x_o) < \alpha(x_1) \leq \alpha(b). \tag{2.65}$$

Se $x_1 = b$ nada mais temos a fazer, caso contrário, isto é, se $x_o < x_1 < b$, notamos que

$$\alpha(x_1) < \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}. \tag{2.66}$$

Se

$$\alpha(x_1) + \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N} \geq \alpha(b), \tag{2.67}$$

consideraremos

$$x_2 \doteq b$$

e com isto, de (2.67), teremos

$$\alpha(x_2) - \alpha(x_1) = \alpha(b) - \alpha(x_1) \stackrel{(2.67)}{\leq} \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N},$$

e concluímos a construçao da partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a,b]$ satisfazendo (2.61).

Caso contrário, isto é, se

$$\alpha(x_1) < \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N} < \alpha(b), \tag{2.68}$$

como a função $\underline{\alpha}$ é contínua em $[x_1,b]$, segue, novamente, do Teorema do Valor Intermediário, que existe um menor $x_2 \in [x_1,b]$ tal que

$$\alpha(x_2) = \alpha(x_1) + \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}.$$

Como a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $[a,b]$ segue que $a = x_o < x_1 < x_2 \leq b$.

Com isto teremos

$$\alpha(x_o) < \alpha(x_1) < \alpha(x_2) \leq \alpha(b). \tag{2.69}$$

Repetindo o argumento acima um número finito de vezes (devido a compacidade do intervalo $[a,b]$ e o fato que $\dfrac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N} > 0$) obteremos a partição $\mathcal{P}$ satisfazendo (2.61).

Como a função $\underline{f}$ é monótona crescente segue que, para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$ teremos

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad M_i = f(x_i). \tag{2.70}$$

Deste modo teremos

$$
\begin{aligned}
U(\mathcal{P},f,\alpha)-L(\mathcal{P},f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i}_{f(x_i)}\,\Delta - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i}_{f(x_{i-1})}\,\Delta\alpha_i\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})] \quad \underbrace{\Delta\alpha_i}_{\leq \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N}} \leq \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]}_{=f(b)-f(a)} \\
&\leq [f(b)-f(a)]\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{N} \overset{(2.60)}{<} \varepsilon
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, completando a demonstração.

$\square$

Um outro resultado interessante é dado pela

Teorema 2.2.5 *Sejam* $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a,b]$ *que tem um número finito de pontos de descontinuidade e* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função monótona crescente que é contínua em todos os pontos onde a função* $\underline{f}$ *é descontínua.*

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$.

16.08.2011 - 5.a

Demonstração:

Seja $E \subseteq [a,b]$ o conjunto formado por todos os pontos onde a função $\underline{f}$ é descontínua (E é finito por hipotese).

Como a função $\underline{f}$ é limitada em $[a,b]$ existe

$$M \doteq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

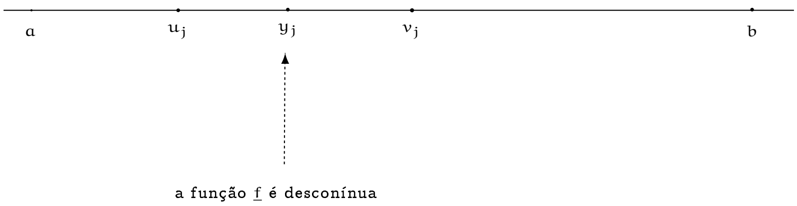
Dado $\varepsilon > 0$, como E é um conjunto finito e a função $\underline{\alpha}$ é contínua em cada um dos pontos de E, podemos cobrir o conjunto E com um número finito de intervalos disjuntos, que denotaremos por $[u_j, v_j] \subseteq [a,b]$, $j \in \{1,\cdots,m\}$, de modo que

$$\sum_{j=1}^{m}[\alpha(v_j)-\alpha(u_j)] < \frac{\varepsilon}{4M}. \tag{2.72}$$

De fato, suponhamos que (figura abaixo)

$$E = \{y_1,\cdots,y_m\} \subseteq [a,b],$$

com $y_{j-1} < y_j$ para $j \in \{1,\cdots,m\}$.



Vamos considerar o caso em que $a < y_1 < y_2 < b$.

Os outros caso serão deixados como exercício para o leitor. **Exercício 2: +0.5**

Observemos que, para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$, como a função $\underline{\alpha}$ é contínua em cada y_j, existe $\delta_j > 0$ tal que se

$$|x - y_j| < \delta_j \quad \text{deveremos ter} \quad |\alpha(x) - \alpha(y_j)| < \frac{\varepsilon}{8Mm}. \tag{2.73}$$

Seja

$$\delta \doteq \min\left\{\frac{\delta_j}{2}, \frac{y_j - y_{j-1}}{4}, \frac{y_1 - a}{2}, \frac{b - y_m}{2}; j = 1, \cdots, m\right\} > 0.$$

Consideremos

$$u_j \doteq y_j - \delta \quad \text{e} \quad v_j \doteq y_j + \delta. \tag{2.74}$$

Notemos que

$$y_1 + 2\delta \overset{\delta \leq \frac{y_2 - y_1}{4}}{\leq} y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_1 + y_2}{2} \overset{y_1 < y_2}{<} \frac{y_2 + y_2}{2} = y_2,$$

ou seja,

$$v_1 = y_1 + \delta < y_2 - \delta = u_2.$$

De modo análogo, podemos mostrar que (deixaremos a elaboração do mesmo como exercício para o leitor)

$$v_j < u_{j+1}, \quad j = 1, \cdots, m-1, \quad \text{ou seja,} \quad a < u_j < v_j < u_{j+1} < v_{j+1} < b, \quad j = 1, \cdots, m-1,$$

logo, para $j = 1, \cdots, m-1$, os intervalos $[u_j, v_j] \subseteq [a, b]$ são disjuntos.

Notemos que para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$ teremos:

$$|v_j - y_j| = |u_j - y_j| = \delta \leq \frac{\delta_j}{2} < \delta_j,$$

o que implicará, por (2.73), que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} [\alpha(v_j) - \alpha(u_j)] &= \sum_{j=1}^{m} \underbrace{[\alpha(v_j) - \alpha(y_j)]}_{\overset{(2.73)}{<} \frac{\varepsilon}{8Mm}} + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{[\alpha(y_j) - \alpha(u_j)]}_{\overset{(2.73)}{<} \frac{\varepsilon}{8Mm}} \\ &< m\frac{\varepsilon}{8Mm} + m\frac{\varepsilon}{8Mm} = \frac{\varepsilon}{4M},\end{aligned} \tag{2.75}$$

mostrando (2.72).

Observemos também que, para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$ temos que $y_j \in [u_j, v_j]$ e assim teremos:

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (u_j, v_j)$$

Além disso temos que o conjunto $K \doteq [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (u_j, v_j)$ será um subconjunto compacto de $[a,b]$.

Dessas duas observações segue que a restrição da função $\underline{f}$ ao conjunto K será uniformemente contínua, assim, existirá $\eta > 0$ tal que se

$$s, t \in K, \ |s - t| < \eta \quad \text{deveremos ter} \quad |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}. \tag{2.76}$$

Vale observar que **<u>não</u>** temos, necessariamente:

$$v_j - u_{j+1} < \delta.$$

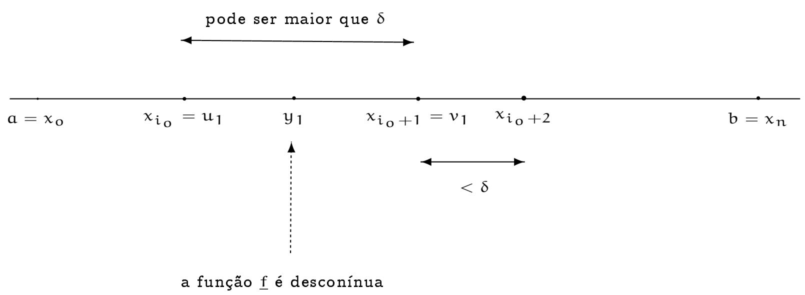
Devido a este fato, precisaremos considerar uma partição $\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1 \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ construída da seguinte forma (veja figura abaixo):

(i) para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$ temos que $u_j \in \mathcal{P}$;

(ii) para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$ temos que $v_j \in \mathcal{P}$;

(iii) para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$ temos que $(u_j, v_j) \cap \mathcal{P} = \emptyset$;

(iv) se $x_{i-1} \neq u_j$ para todo $j \in \{1, \cdots, m\}$ então $\Delta x_i < \delta$.



Notemos que para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ teremos

$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq K.$$

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, denotemos por:

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Como, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, a função $\underline{f}$ é contínua em $[x_{i-1}, x_i]$ segue que existem $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$f(t_i) = m_i \quad \text{e} \quad f(s_i) = M_i. \tag{2.77}$$

Além disso, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ teremos:

$$M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \leq 2 \sup_{x \in [a,b]} f(x) = 2M,$$

ou seja,

$$M_i - m_i \leq 2M, \tag{2.78}$$

Lembremos que, de (iv), se $x_{i-1} \neq u_j$ para todo $j \in \{1, \cdots, m\}$ teremos $\Delta x_i < \delta$.

Nestes casos, da continuidade uniforme da função $\underline{f}$ em $[x_{i-1}, x_i] \subseteq K$, do fato que $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e de $\Delta x_i < \delta$, segue que

$$M_i - m_i = f(s_i) - f(t_i) < \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}. \tag{2.79}$$

Logo

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \, \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{x_{i-1} = u_j \text{ para algum } j} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\overset{(2.78)}{\leq} 2M} \Delta\alpha_i + \sum_{x_{i-1} \neq u_j, \forall j} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\overset{(2.79)}{<} \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}} \Delta\alpha_i \\
&\leq 2M \sum_{x_{i-1} = u_j \text{ para algum } j} \underbrace{\Delta\alpha_i}_{= \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})} + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} \sum_{x_{i-1} \neq u_j, \forall j} \Delta\alpha_i \\
&\leq 2M \underbrace{\sum_{j=1}^{m} [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]}_{\overset{x_i \leq v_j \text{ e } x_{i-1} = u_j}{\leq} \alpha(v_j) - \alpha(u_j) \overset{(2.72)}{<} \frac{\varepsilon}{4M}} + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i}_{= \alpha(b) - \alpha(a)} \\
&< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]} [\alpha(b) - \alpha(a)] = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, completando a demonstração.

□

Temos também o

Teorema 2.2.6 *Suponhamos que* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$,

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \in [a, b],$$

e $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[m, M]$.

Consideremos $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$h(x) \doteq (\phi \circ f)(x), \quad x \in [a, b].$$

Então $h \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$.

Demonstração:

Se a função ϕ for identidamente nula nada teremos a fazer, logo podemos supor, sem perda de generalidade, que a função ϕ não é identicamente nula em $[m, M]$.

Dado $\varepsilon > 0$, como a função ϕ é contínua em $[m, M]$, que é compacto em $\mathbb{R}$, segue que ela será uma função limitada e uniformemente contínua em $[m, M]$, ou seja, existirá

$$K \doteq \sup_{y \in [m, M]} |\phi(y)| > 0. \tag{2.81}$$

e exitirá $\delta > 0$, com

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}, \tag{2.82}$$

tal que se

$$s, t \in [m, M], \ |s - t| < \delta \quad \text{deveremos ter} \quad |\phi(s) - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}. \tag{2.83}$$

Como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$, existirá uma partição $\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ tal que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \frac{\delta^2}{2K}. \tag{2.84}$$

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, denotemos, por:

$$\begin{aligned}
m_i &\doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \\
m_i* &\doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) \quad \text{e} \quad M_i^* \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x), \\
A &\doteq \{i \in \{1, \cdots, n\}\,;\ M_i - m_i < \delta\} \\
B &\doteq \{i \in \{1, \cdots, n\}\,;\ M_i - m_i \geq \delta\}.
\end{aligned}$$

Notemos que $A \cap B = \emptyset$.

Se $i \in A$ teremos

$$\begin{aligned}
M_i^* &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \phi(f(x)) \overset{m_i \leq f(x) \leq M_i, \text{ se } x \in [x_{i-1}, x_i]}{\leq} \sup_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) \\
m_i^* &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \phi(f(x)) \overset{m_i \leq f(x) \leq M_i, \text{ se } x \in [x_{i-1}, x_i]}{\geq} \inf_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y),
\end{aligned}$$

logo segue que

$$M_i^* - m_i^* \leq \sup_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y) - \inf_{y \in [m_i, M_i]} \phi(y).$$

Por outro aldo, se $y, z \in [m_i, M_i]$, como $M_i - m_i < \delta$ (pois $i \in A$) segue que

$$|y - z| < \delta, \qquad \text{e (2.83) implicará} \quad -\frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} < \phi(y) - \phi(z) < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}.$$

Tomando-se o supremo, para $y \in [m_i, M_i]$, e o ínfimo, para $z \in [m_i, M_i]$, na deisgualdade acima, obteremos:

$$-\frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1} \leq M_i^* - m_i^* \leq \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a) + 1}, \tag{2.85}$$

para $i \in A$.

Por outro lado, se $i \in B$ teremos

$$M_i^* - m_i^* \leq K + K = 2K, \tag{2.86}$$

logo

$$\begin{aligned}
\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i &\overset{i \in B \Rightarrow \delta \leq M_i - m_i}{\leq} \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i \\
&= U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) \overset{(2.84)}{<} \frac{\delta^2}{2K},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \frac{\delta}{2K}. \tag{2.87}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P},h,\alpha)-L(\mathcal{P},h,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^*\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i^*\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i\in A} \underbrace{(M_i^*-m_i^*)}_{\overset{(2.85)}{<}\frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}} \Delta\alpha_i - \sum_{i\in B} \underbrace{(M_i^*-m_i^*)}_{\overset{(2.86)}{\leq} 2K}\Delta\alpha_i \\
&< \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1} \underbrace{\sum_{i\in A}\Delta\alpha_i}_{\leq\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i} + 2K \underbrace{\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i}_{\overset{(2.87)}{<}\frac{\delta}{2K}} \\
&= \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i}_{=\alpha(b)-\alpha(a)} + 2K\frac{\delta}{2K} = \frac{\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]}{\alpha(b)-\alpha(a)+1} + \underbrace{\delta}_{\overset{(2.82)}{<}\frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)+1}} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $h \in \mathfrak{R}(\alpha)$, completando a demonstração.

□

2.3 Propriedades da integral de Riemann-Stieltjes

Temos as seguintes propriedades básicas da integral de Riemann-Stieltjes em un intervalo $[a,b]$:

Proposição 2.3.1 *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções limitadas em* $[a,b]$, $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções monótonas crescentes em* $[a,b]$. *Com isto teremos:*

1. *Se* $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *então* $(f+g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$.

   Além disso
   $$\int_a^b (f+g)\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha.$$

2. *Se* $c \in \mathbb{R}$ *e* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *então* $(cf) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$.

   Além disso
   $$\int_a^b (cf)\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha.$$

3. $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *é tal que*
   $$f(x) \leq g(x), \quad x \in [a,b]$$
   então
   $$\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b g\,d\alpha.$$

4. *Se* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *e* $c \in (a,b)$ *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,c]$ *e em* $[c,b]$.

   Além disso
   $$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha.$$

5. *Se* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *e*

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in [a,b]$$

então

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

6. *Se* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *e* $f \in \mathfrak{R}(\beta)$ *em* $[a,b]$ *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha+\beta)$ *em* $[a,b]$.
Além disso

$$\int_a^b f\,d(\alpha+\beta) = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b f\,d\beta.$$

7. *Se* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *e* $c > 0$ *então* $f \in \mathfrak{R}(c\alpha)$ *em* $[a,b]$.
Além disso

$$\int_a^b f\,d(c\alpha) = c\int_a^b f\,d\alpha.$$

Demonstração:

18.08.2001 - 6.a

De 1.:
Denotemos por

$$m_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

$$n_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x), \qquad N_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x).$$

$$m_i^* \doteq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f+g)(x), \qquad M_i^* \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f+g)(x).$$

Observemos que

$$m_i^* = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f+g)(x) \geq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) = m_i + n_i \tag{2.88}$$

$$M_i^* = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f+g)(x) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) = M_i + N_i \tag{2.89}$$

Observemos que dado $\varepsilon > 0$, como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, segue que existem partições $\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ do intervalo $[a,b]$ tais que

$$U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) - L(\mathcal{P}_f, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.90}$$

$$U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) - L(\mathcal{P}_g, g, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.91}$$

Notemos que se $\mathcal{P} \doteq \{a = x_o, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ então

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f, \alpha) + L(\mathcal{P}, g, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m_i\,\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^n n_i\,\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^n (m_i + n_i)\,\Delta\alpha_i \\ &\overset{(2.88)}{\leq} \sum_{i=1}^n m_i^*\,\Delta\alpha_i = L(\mathcal{P}, f+g, \alpha), \end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f, \alpha) + U(\mathcal{P}, g, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M_i\,\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^n N_i\,\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^n (M_i + N_i)\,\Delta\alpha_i \\ &\overset{(2.89)}{\geq} \sum_{i=1}^n M_i^*\,\Delta\alpha_i = U(\mathcal{P}, f+g, \alpha) \end{aligned} \tag{2.93}$$

Seja $\mathcal{P}^*$ o refinamento comum das partições $\mathcal{P}_f$ e $\mathcal{P}_g$ do intervalo $[a,b]$ (ou seja, $\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$). Logo

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) &\overset{(2.93)\text{ e }(2.92)}{\leq} [U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + U(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] - [L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + L(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] \\
&= [U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, f, \alpha)] + [U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) - L(\mathcal{P}^*, g, \alpha)] \\
&\overset{\mathcal{P}_f,\mathcal{P}_g\subseteq\mathcal{P}^*,(2.29)\text{ e }(2.30)}{\leq} \underbrace{[U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) - L(\mathcal{P}_f, f, \alpha)]}_{\overset{(2.90)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{[U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) - L(\mathcal{P}_g, g, \alpha)]}_{\overset{(2.91)}{<}\frac{\varepsilon}{2}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto pelo Corolário (2.2.1) segue que $(f+g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$.

Como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, segue da definição de ínfimo que, podemos encontrar duas partições $\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ tais que

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) &< \int_a^b f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \\
U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) &< \int_a^b g\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Considerando o refinamento comum a estas duas partições, isto é, $\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$, teremos

$$U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \overset{\mathcal{P}_f\subseteq\mathcal{P}^*,(2.30))}{\leq} U(\mathcal{P}_f, f, \alpha) < \int_a^b f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.94}$$

$$U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \overset{\mathcal{P}_g\subseteq\mathcal{P}^*,(2.30))}{\leq} U(\mathcal{P}_g, g, \alpha) < \int_a^b g\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.95}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)\, d\alpha \leq U(\mathcal{P}^*, f+g, \alpha) &\overset{(2.93)}{\leq} U(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + U(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \\
&\overset{(2.94)\text{ e }(2.95)}{\leq} \left(\int_a^b f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\int_a^b g\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha + \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$, assim deveremos ter

$$\int_a^b (f+g)\, d\alpha \leq \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha. \tag{2.96}$$

Por outro lado, como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, segue da definição de supremo que, podemos encontrar duas partições $\mathcal{P}_f, \mathcal{P}_g \in \mathfrak{P}$ tais que

$$L(P_f, f, \alpha) > \int_a^b f\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad L(P_g, g, \alpha) > \int_a^b g\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.97}$$

Considerando o refinamento comum a estas duas partições, isto é, $\mathcal{P}^* \doteq \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$, teremos

$$L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) \overset{(2.29)}{\geq} L(P_f, f, \alpha) \overset{(2.97)}{>} \int_a^b f\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.98}$$

$$L(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \overset{(2.29)}{\geq} L(P_g, g, \alpha) \overset{(2.97)}{>} \int_a^b g\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.99}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)\,d\alpha &\geq L(\mathcal{P}^*, (f+g), \alpha) \overset{(2.92)}{\geq} L(\mathcal{P}^*, f, \alpha) + L(\mathcal{P}^*, g, \alpha) \\ &\overset{(2.98)\text{ e }(2.99)}{>} \left(\int_a^b f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\int_a^b g\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Portanto de (2.96) e (2.100) segue que

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha,$$

completando a demonstração do item 1. .

Deixaremos a elaboração das demonstrações dos itens 2., 3., 4., 5., 6. e 7. como exercício para o leitor. $\boxed{\textbf{Exercício 3: +0.5 cada item}}$

□

Como consequência temos o:

Corolário 2.3.1 *Se* $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *então:*

1. $f.g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$;
2. $|f| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e*

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\,d\alpha. \tag{2.101}$$

Demonstração:

De 1.:

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como a função ϕ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ segue, do Teorema (2.2.6) que a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ f)(x)}_{f^2(x)}, \quad x \in [a, b]$$

está em $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, ou seja, $f^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$. (*)

Observemos que

$$f.g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]. \tag{2.102}$$

Como $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, segue da Proposição acima que $(f+g), (f-g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.

Logo, de (*) segue que $(f+g)^2, (f-g)^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e novamente da Proposição acima e de (2.102), teremos que $f.g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, completando a demonstração do item 1. .

De 2.:

Consideremos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq |t|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como a função ϕ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$ segue, do Teorema (2.2.6) que a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ f)(x)}_{=|f(x)|}, \quad x \in [a,b]$$

está em $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, ou seja, $|f| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$.

Além disso, se considerarmos $c = 1$ ou $c = -1$ de modo que

$$c \int_a^b f \, d\alpha \geq 0,$$

segue que

$$\left| \int_a^b f \, d\alpha \right| = c \int_a^b f \, d\alpha \overset{\text{Prop. (2.3.1) item 2.}}{=} \int_a^b (cf) \, d\alpha \overset{cf \leq |f| \text{ e Prop. (2.3.1) item 3.}}{\leq} \int_a^b |f| \, d\alpha,$$

completando a demonstração do item 2. .

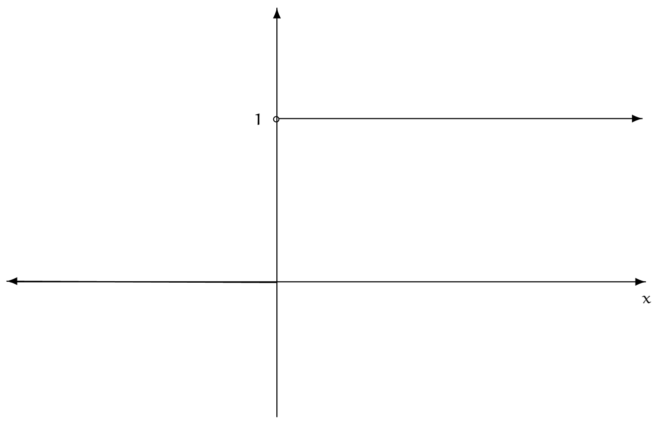
$\square$

A seguir consideraremos um exemplo importante, a saber:

Definição 2.3.1 *A função* $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$I(x) \doteq \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

será denominada **<u>função degrau unitário</u>**.



Com isto temos a

Proposição 2.3.2 *Sejam* $s \in (a,b)$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada em* $[a,b]$ *e contínua em* <u>s</u>.

Consideremos a função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\alpha(x) \doteq I(x - s), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.103}$$

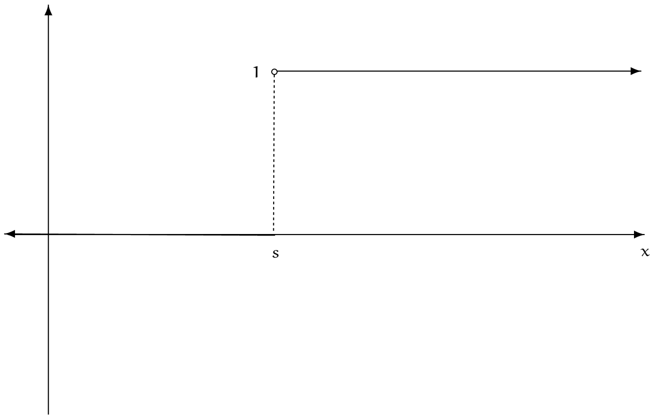
onde a função I *é a função degrau unitário .*

Então $f \in \Re(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b f\,d\alpha = f(s). \tag{2.104}$$

<u>**Demonstração:**</u>

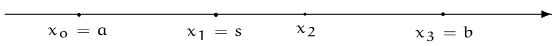
A figura abaixo nos fornece a representação geométrica do gráfico da função α:



Observemos que a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$, em particular em $[a, b]$.

Consideremos $\mathcal{P}_o \doteq \{a = x_o, x_1, x_2, x_3 = b\}$, a seguinte partição do intervalo $[a, b]$:

$$x_o \doteq a, \quad x_1 \doteq s, \quad x_3 \doteq b \quad \text{e} \quad x_2 \in (x_1, x_3) = (s, b).$$



Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, definamos

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Logo

$$\begin{aligned}
U(\mathcal{P}_o, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{3} M_i\,\Delta\alpha_i \\
&= M_1[\alpha(\underbrace{x_1}_{=s}) - \alpha(\underbrace{x_o}_{=a})] + M_2[\alpha(x_2) - \alpha(\underbrace{x_1}_{=s})] + M_3[\alpha(\underbrace{x_3}_{=b}) - \alpha(x_2)] \\
&= M_1[\underbrace{\alpha(s)}_{=0} - \underbrace{\alpha(a)}_{=0}] + M_2[\underbrace{\alpha(x_2)}_{=1} - \underbrace{\alpha(s)}_{=0}] + M_3[\underbrace{\alpha(b)}_{=1} - \underbrace{\alpha(x_2)}_{=1}] \\
&= M_2 = \sup_{x \in [x_1, x_2]} f(x).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

De modo semelhante, teremos:

$$
\begin{aligned}
L(\mathcal{P}_o, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{3} m_i \, \Delta\alpha_i \\
&= m_1[\alpha(\underbrace{x_1}_{=s}) - \alpha(\underbrace{x_o}_{=a})] + m_2[\alpha(x_2) - \alpha(\underbrace{x_1}_{=s})] + m_3[\alpha(\underbrace{x_3}_{=b}) - \alpha(x_2)] \\
&= m_1[\underbrace{\alpha(s)}_{=0} - \underbrace{\alpha(a)}_{=0}] + m_2[\underbrace{\alpha(x_2)}_{=1} - \underbrace{\alpha(s)}_{=0}] + m_3[\underbrace{\alpha(b)}_{=1} - \underbrace{\alpha(x_2)}_{=1}] \\
&= m_2 = \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x). \qquad (2.106)
\end{aligned}
$$

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $\underline{s}$, segue que (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor) quando

$$
x_2 \to s = x_1, \quad \text{segue que} \quad M_2 = \sup_{x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{=[s, x_2]}} f(x), \quad m_2 = \inf_{x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{=[s, x_2]}} f(x) \ \to \ f(s). \qquad (2.107)
$$

Logo

$$
m_2 = \underbrace{L(\mathcal{P}_o, f, \alpha)}_{\overset{(2.106)}{=} m_2} \le \underbrace{\sup_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} L(P, f, \alpha)}_{= \underline{\int_a^b} f \, d\alpha} \overset{(2.17)}{\le} \underbrace{\inf_{\mathcal{P} \in \mathfrak{P}} U(P, f, \alpha)}_{= \overline{\int_a^b} f \, d\alpha} \le \underbrace{U(\mathcal{P}_o, f, \alpha)}_{\overset{(2.105)}{=} M_2} = M_2, \qquad (2.108)
$$

ou ainda,

$$
\inf_{x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{=[s, x_2]}} f(x) = m_2 = \underline{\int_a^b} f \, d\alpha \overset{(2.108)}{\le} \overline{\int_a^b} f \, d\alpha \overset{(2.108)}{\le} M_2 = \sup_{x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{=[s, x_2]}} f(x), \qquad (2.109)
$$

para todo $x_2 \in (x_1, x_3) = (s, b)$.

Fazendo $x_2 \to s$ nas desigualdades acima e utilizando (2.107) obteremos

$$
f(s) \le \underline{\int_a^b} f \, d\alpha \le \overline{\int_a^b} f \, d\alpha \le f(s),
$$

assim

$$
f(s) = \underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \overline{\int_a^b} f \, d\alpha,
$$

mostrando que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e (2.104), completando a demonstração.

□

Como consequência temos o

Corolário 2.3.2 *Suponhamos que $c_n \ge 0$ e $s_n \in (a, b)$, para $n \in \{1, \cdots, N\}$ satisfazendo $s_n < s_{n+1}$, para $n \in \{1, \cdots, N_1\}$.*

Consideremos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$
\alpha(x) \doteq \sum_{n=1}^{N} c_n \, I(x - s_n), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (2.110)
$$

Se, para cada $n \in \{1, \cdots, N\}$, *a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* s_n *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e além disso*

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{n=1}^{N} c_n f(s_n). \tag{2.111}$$

Demonstração:

Observemos que a função α é monótona crescente em $\mathbb{R}$, pois se $x_1 \leq x_2$ teremos, para cada $n \in \{1, \cdots, N\}$ fixado, que

$$I(x_1 - s_n) \leq I(x_2 - s_n),$$

logo

$$\alpha(x_1) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x_1 - s_n) \overset{0 \leq c_n}{\leq} \sum_{n=1}^{N} c_n I(x_2 - s_n) = \alpha(x_2).$$

Logo, para completar a demonstração basta aplicar a Proposição (2.3.1) itens 1. e 2. e a Proposição acima a cada uma das parcelas e assim obteremos que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b \sum_{n=1}^{N} c_n I(. - s_n) \, d\alpha \overset{\text{Prop. (2.3.1) itens 1. e 2.}}{=} \sum_{n=1}^{N} c_n \underbrace{\int_a^b I(. - s_n) \, d\alpha}_{\overset{(2.104)}{=} f(s_n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_n f(s_n), \tag{2.112}$$

completando a demonstração.

□

Podemos estender esse resultado, como afirma a:

Proposição 2.3.3 *Suponhamos que* $c_n \geq 0$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *é tal que a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *é convergente em* $\mathbb{R}$ *e* $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente de pontos distintos em* (a, b).

Consideremos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$\alpha(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, I(x - s_n), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.113}$$

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$ *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e além disso*

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n). \tag{2.114}$$

23.08.2011 - 7.a

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f \neq 0$, caso contrário (isto é, se $f = 0$) o resultado segue trivialmente.

Notemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ temos

$$|c_n I(x - s_n)| \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

e como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente em $\mathbb{R}$ segue que a função $\underline{\alpha}$ está bem definida em $\mathbb{R}$, (na verdade, do Teste M de Weierstrass, segue que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, I(x-s_n)$ converge uniformente em $\mathbb{R}$).

Observemos que a função $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $\mathbb{R}$, pois se $x_1 \leq x_2$ teremos, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, que

$$I(x_1 - s_n) \leq I(x_2 - s_n),$$

logo

$$\alpha(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x_1 - s_n) \overset{0\leq c_n}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x_2 - s_n) = \alpha(x_2).$$

Seja

$$M \doteq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \overset{f \text{ é cont. em}[a,b]}{=} \max_{x\in[a,b]} |f(x)| > 0. \tag{2.115}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente em $\mathbb{R}$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{2.116}$$

Definamos $\alpha_1, \alpha_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\alpha_1(x) \doteq \sum_{n=1}^{N_o} c_n\, I(x - s_n) \quad \text{e} \quad \alpha_2 \doteq \sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n\, I(x - s_n), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.117}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{I(a - s_n)}_{=0,\ \text{pois } a<s_n, \forall n\in\mathbb{N}} = 0, \\ \alpha(b) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{I(b - s_n)}_{=1,\ \text{pois } s_n<b, \forall n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n. \end{aligned} \tag{2.118}$$

Como a função $\underline{\ f\ }$ é contínua em $[a,b]$ e as funções $\underline{\ \alpha_1\ }$ e $\underline{\ \alpha_2\ }$ são monótonas crescentes em $[a,b]$ segue do Teorema (2.2.3) segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1) \cap \mathfrak{R}(\alpha_2)$ em $[a,b]$.

Além disso,, do Corolário acima segue que

$$\int_a^b f\, d\alpha_1 \overset{(2.111)}{=} \sum_{n=1}^{N_o} c_n f(s_n). \tag{2.119}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \alpha_2(b) - \underbrace{\alpha_2(a)}_{=\sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n \underbrace{I(a-s_n)}_{=0 \text{ pois } a<s_n, \forall n\in\mathbb{N}} = 0} &= \alpha_2(b) = \sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n \underbrace{I(b - s_n)}_{=1,\ \text{pois } s_n<b, \forall n\in\mathbb{N}} \\ &= \sum_{n=N_o+1}^{\infty} c_n \overset{(2.117)}{<} \frac{\varepsilon}{M}. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Por outro lado, como $f \in \mathfrak{R}(\alpha_2)$ segue, da Proposição (2.3.1) item 5., que

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha_2\right| \leq \underbrace{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|}_{=M}[\alpha_2(b)-\alpha_2(a)] \overset{(2.120)}{<} M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \tag{2.121}$$

Mas

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

logo, da Proposição (2.3.1) item 6., segue que

$$\left|\underbrace{\int_a^b f\,d\alpha}_{\overset{\text{Prop. (2.3.1) item 6.}}{=} \int_a^b f\,d\alpha_1 + \int_a^b f\,d\alpha_2} - \sum_{i=1}^{N_o} c_n f(s_n)\right| = \left|\underbrace{\int_a^b f\,d\alpha_1}_{\overset{(2.119)}{=}\sum_{i=1}^{N_o} c_n f(s_n)} + \int_a^b f\,d\alpha_2 - \sum_{i=1}^{N_o} c_n f(s_n)\right|$$
$$= \left|\int_a^b f\,d\alpha_2\right| \overset{(2.121)}{<} \varepsilon, \tag{2.122}$$

mostrando que a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n)$ é convergente e sua soma será $\int_a^b f\,d\alpha$, completando a demonstração.

□

A seguir temos um resultado que relaciona a integral de Riemann com a integral de Riemann-Stieltjes, a saber:

Teorema 2.3.1 *Sejam* $f, \alpha : [a,b]$ *funções definidas em* $[a,b]$ *tais que a função* $\underline{f}$ *é uma função limitada em* $[a,b]$ *e a função* $\underline{\alpha}$ *é monótona crescente, diferenciável em* $[a,b]$ *e além disso* α' *é uma função Riemann integrável em* $[a,b]$ *(ou seja,* $\alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a,b]$*).*

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *se, e somente se,* $f\alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a,b]$.

Neste caso teremos:

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx. \tag{2.123}$$

Demonstração:

Seja

$$M \doteq \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|. \tag{2.124}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\alpha' \in \mathfrak{R}$, do Corolário (2.2.1) (tomado-se naquele resultado $\alpha(x) = x$, $x \in [a,b]$ e utilizando a Observação (2.2.4) item 4.), segue que existe uma partição $\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que

$$0 \leq U(\mathcal{P},\alpha') - L(\mathcal{P},\alpha') < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{2.125}$$

Definamos, para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$:

$$M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$
$$M_i^* \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f\alpha')(x). \tag{2.126}$$

Observemos que a função α' está definida em $[a,b]$, logo a função $\underline{\alpha}$ deverá ser contínua em $[a,b]$.

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, aplicando-se o Teorema do Valor Médio à função α no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, obteremos $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ de modo que

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \overset{\text{Teor. Valor Médio}}{=} \alpha'(t_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \alpha'(t_i)\Delta x_i. \tag{2.127}$$

Temos também que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ segue, de (2.125) e do Teorema (2.2.2) item 2. (tomando-se naquele $\alpha(x) \doteq x$, $x \in [a, b]$), que

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{2.128}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i.\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\left[\Delta\alpha_i - \alpha'(s_i)\Delta x_i\right]\right| \\
&\overset{(2.127)}{=} \left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)[\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)]\Delta x_i\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|f(s_i)|}_{\overset{(2.124)}{\leq} M} \left|\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)\right| \Delta x_i \\
&\leq M \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)\right| \Delta x_i}_{\overset{(2.128)}{<} \frac{\varepsilon}{M}} < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Em particular, teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i &< \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(s_i)\alpha'(s_i)}_{\leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f\alpha')(x) = M_i^*} \Delta x_i + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M_i^*\Delta x_i + \varepsilon = U(\mathcal{P}, f\alpha') + \varepsilon, \qquad (2.129) \\
\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i &< \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(s_i)}_{\leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = M_i} \Delta\alpha_i + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i + \varepsilon = U(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon. \qquad (2.130)
\end{aligned}$$

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, tomando-se, no lado esquerdo de (2.129), o supremo para $s \in [x_{i-1}, x_i]$, obteremos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(s_i)\Delta\alpha_i}_{=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i = U(\mathcal{P},f,\alpha)} \leq U(\mathcal{P}, f\alpha') + \varepsilon,$$

ou seja,

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f\alpha') + \varepsilon. \tag{2.131}$$

De modo semelhante, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, tomando-se, no lado esquerdo de (2.130), o supremo para $s \in\in [x_{i-1}, x_i]$, obteremos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i}_{=\sum_{i=1}^{n} M_i^* \Delta x_i = U(\mathcal{P}, f\alpha')} \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon,$$

ou seja,

$$U(\mathcal{P}, f\alpha') \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) + \varepsilon. \tag{2.132}$$

Portanto de (2.131) e (2.132) segue que

$$U(\mathcal{P}, f\alpha') - \varepsilon \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leq U(\mathcal{P}, f\alpha') + \varepsilon \tag{2.133}$$

Notemos também que (2.125) ocorrerá se trocarmos a partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ por uma partição que é um refinamento da mesma, implicando que (2.133) também ocorrerá se trocarmos a partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ por uma outra partição que é um refinamento da mesma.

Logo tomando-se o ínfimo em (2.133) sobre todas as partições $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ obteremos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx + \varepsilon, \tag{2.134}$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ teremos

$$\left| \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

mostrando que

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx. \tag{2.135}$$

De modo semelhante mostra-se que (exercício para o leitor) $\boxed{\textbf{Exercício 3: } +0.5}$

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx. \tag{2.136}$$

Finalmente, notamos que

$$\begin{aligned} f \in \mathfrak{R}(\alpha) \text{ em } [a, b] \quad &\Leftrightarrow \overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \overset{(2.135)\text{ e }(2.136)}{\Leftrightarrow} \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow (f\alpha') \in \mathfrak{R} \text{ em } [a, b]. \end{aligned} \tag{2.137}$$

Além disso, neste caso, teremos a validade de (2.124), completando a demonstração do resultado. □

Temos também um resultado que trata da mudança de variáveis na integral de Riemann-Stieltjes, mas precisamente:

Teorema 2.3.2 *Seja* $\phi : [A, B] \to [a, b]$ *uma função contínua e estritamente crescente em* $[a, b]$.

Suponhamos que a função $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seja monótona crescente em* $[a, b]$ *e a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *seja Riemann-Stieltjes integrável em* $[a, b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$.

Consideremos as função $\beta, g : [A, B] \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$g(y) \doteq f(\phi(y)), \quad \beta(y) \doteq \alpha(\phi(y)), \quad y \in [A, B]. \tag{2.138}$$

Então $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ *e*

$$\int_A^B g \, d\beta = \int_a^b f \, d\alpha. \tag{2.139}$$

Demonstração:

Notemos que a função $\underline{\phi}$ será bijetora e assim, do Teorema da Continuidade da Função Inversa, segue que a função $\underline{\phi}$ admitirá função inversa $\phi^{-1} : [a, b] \to [A, B]$ que também será uma função estritamente crescente e contínua em $[a, b]$.

Como as funções $\underline{\alpha}$ é monótona crescente em $[a, b]$ e a função $\underline{\phi}$ é monótona crescente em $[A, B]$, segue que a função $\beta = \alpha \circ \phi$ também será monótona crescente em $[A, B]$.

Além disso, como a função $\underline{f}$ é limitada em $[a, b]$ e a função $\underline{\phi}$ é contínua em $[A, B]$, que é um compacto de $\mathbb{R}$ (logo $\phi([A, B]$ é limitado), segue que a função $\underline{g}$ será limitada em $[A, B]$.

Notemos que se

$$\mathcal{P} \doteq \{x_o = a, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

é uma partição do intervalo $[a, b]$, como a função $\underline{\phi}$ é estritamente crescente em $[A, B]$, seguirá que

$$\mathcal{Q} \doteq \{y_o \doteq \phi^{-1}(a) = A, y_1 \doteq \phi^{-1}(x_1), \cdots, y_{n-1} \doteq \phi^{-1}(x_{n-1}), y_n \doteq \phi^{-1}(b) = B\} \subseteq [A, B] \tag{2.140}$$

será uma partição do intervalo $[A, B]$ e reciprocamente, ou seja, a cada partição do intervalo $[a, b]$ corresponderá uma partição do intevalo $[A, B]$, por meio da função (bijetora estritamente crescente em $[a, b]$) $\underline{\phi}$ e reciprocamente.

Notemos que para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$s \in [y_{i-1}, y_i] \quad \text{se, e somente, se} \quad t = \phi(s) \in [x_{i-1}, x_i].$$

Com isto teremos

$$U(\mathcal{Q}, g, \beta) = U(\mathcal{P}, f, \alpha), \tag{2.141}$$
$$L(\mathcal{Q}, g, \beta) = L(\mathcal{P}, f, \alpha). \tag{2.142}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$, pelo Corolário (2.2.1), segue que existe uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ tal que

$$0 \leq U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{2.143}$$

Logo, tomando-se a partição $\mathcal{Q} \doteq \phi(\mathcal{P})$ do intervalo $[A, B]$ (como em (2.140)), de (2.141) e (2.142), teremos

$$0 \leq \underbrace{U(\mathcal{Q}, g, \beta)}_{U(\mathcal{P}, f, \alpha)} - \underbrace{L(\mathcal{Q}, g, \beta)}_{L(\mathcal{P}, f, \alpha)} < \varepsilon, \tag{2.144}$$

que, pelo Corolário (2.2.1), implicará $g \in \mathfrak{R}(\beta)$ em $[A, B]$.

Além disso, tomando-se o ínfimo no lado esquerdo de (2.141) sobre todas as partições de $[a, b]$ e no lado direito de (2.141) sobre todas as partições de $[A, B]$ obteremos:

$$\underbrace{\overline{\int_a^b} f \, d\alpha}_{=\int_a^b f \, d\alpha} = \underbrace{\overline{\int_A^B} g \, d\beta}_{=\int_A^B g \, d\beta} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \, d\alpha = \int_A^B g \, d\beta,$$

mostrando (2.139) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 2.3.1 *Notemos que se a função* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$\alpha(x) \doteq x, \quad x \in [a,b]$$

então tomando-se a função $\beta : [A,B] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\beta(y) \doteq \phi(y), \quad y \in [A,B],$$

teremos que se a função $\phi : [A,B] \to [a,b]$ *é estritamente crescente, diferenciável em* $[A,B]$ *e* $\phi' \in \mathfrak{R}$ *em* $[A,B]$ *então o resultado acima juntamente com o Teorema (2.3.1) implicarão em:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f[\phi(y)]\,\phi'(y)\,dy,$$

que é um resultado importante do Cálculo 1 e nos diz como fazer para mudar de variáveis na integral definida (ou seja, na integral de Riemann em intervalos fechados e limitados).

De fato,

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\textit{Teor. (2.3.1) com } \alpha(x)=x}{=} \int_a^b f\,d\alpha \overset{(2.139)}{=} \int_A^B g\,d\beta$$
$$\overset{g=\phi\circ f,\beta=\phi,A=\phi^{-1}(a),B=\phi^{-1}(b)}{=} \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} (f\circ\phi)\,d\phi \overset{\textit{Teor. (2.3.1) com } \alpha(x)=\phi(x)}{=} \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} (f\circ\phi)(x)\phi'(x)\,dx,$$

mostrando a identidade acima.

2.4 Relações ente integração e diferenciação

Começaremos com o Teorema Fundamental do Cálculo, a saber:

Teorema 2.4.1 *Seja* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a,b]$.

Consideremos a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{2.145}$$

Então a função $\underline{F}$ *é uniformemente contínua em* $[a,b]$.

Além disso, se a função $\underline{f}$ *for contínua em* $x_o \in [a,b]$ *então a função* $\underline{F}$ *será diferenciável em* $x_o \in [a,b]$ *e além disso*

$$F'(x_o) = f(x_o). \tag{2.146}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Como $f \in \mathfrak{R}$ em $[a,b]$ segue que a função $\underline{f}$ é limitada em $[a,b]$, logo existe $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M, \quad t \in [a,b].$$

Notemos que, para cada $a \leq x < y \leq b$, da Proposição (2.3.1) item 4., segue que $f \in \mathfrak{R}$ em $[a,x]$ e em $[a,y]$, logo a função $\underline{F}$ está bem definida e além disso teremos:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \overset{\text{Prop. (2.3.1)}}{=} \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq M}\,dt$$
$$\leq M|y-x|. \tag{2.147}$$

Logo, dado $\varepsilon >$, seja

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{M} > 0. \tag{2.148}$$

Assim, se

$$|y-x| < \delta \quad \text{teremos, por (2.147), que} \quad |F(y)-F(x)| \overset{(2.147)}{\leq} M \underbrace{|y-x|}_{<\delta} M\delta \overset{(2.148)}{=} M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Se a função $\underline{f}$ for contínua em $x_o \in [a, b]$ então, dado $\varepsilon > 0$, existirá $\delta = \delta(x_o, \varepsilon) > 0$ tal que se

$$|t - x_o| < \delta \quad \text{teremos} \quad |f(t) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Suponhamos que $x_o < t < x_o + \delta$.

Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(t)-F(x_o)}{t-x_o} - f(x_o)\right| &= \left|\frac{\int_a^t f(s)\,ds - \int_a^{x_o} f(s)\,ds}{t-x_o} - \frac{\int_{x_o}^t f(x_o)\,ds}{t-x_o}\right| \\
&\overset{\text{Prop. (2.3.1)}}{=} \left|\frac{\int_{x_o}^t f(s)\,ds}{t-x_o} - \frac{\int_{x_o}^t f(x_o)\,ds}{t-x_o}\right| = \left|\frac{\int_{x_o}^t [f(s)-f(x_o)]\,ds}{t-x_o}\right| \\
&\leq \frac{1}{t-x_o}\int_{x_o}^t \underbrace{|f(s)-f(x_o)|}_{<\varepsilon,\ \text{pois}\ |s-x_o|\leq|t-x_o|<\delta} ds < \frac{1}{t-x_o}\varepsilon(t-x_o) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{t\to x_o^+} \frac{F(t)-F(x_o)}{t-x_o} = f(x_o),$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é diferenciável à direita de $x_o \in (a, b]$.

De modo semelhante podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que

$$\lim_{t\to x_o^-} \frac{F(t)-F(x_o)}{t-x_o} = f(x_o),$$

mostrando que a função $\underline{F}$ é diferenciável à esquera de $x_o \in [a, b)$ que juntamente como o que fizemos acima mostrará que a função $\underline{F}$ é diferenciável em $[a, b]$ e que vale (2.146), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o (também conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo):

Teorema 2.4.2 *Seja* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$ *e* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $[a, b]$ *tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2.149}$$

25.08.2011 - 8.a

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$ como $f \in \mathfrak{R}$ em $[a,b]$, do Teorema (2.2.2) item 3. (e da Observação (2.2.4) item 4.), segue que existe uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[a,b]$ tal que se, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, escolhermos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ teremos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Por outro lado, como a função $\underline{F}$ é diferenciável em $[a,b]$ seguirá que ela será uma função (uniformemente) contínua em $[a,b]$.

Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, do Teorema do Valor Médio aplicado ao intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, segue que existirá $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = \underbrace{F'(t_i)}_{=f(t_i)}\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\Delta x_i} = f(t_i)\,\Delta x_i. \tag{2.150}$$

Assim teremos

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i \overset{(2.150)}{=} \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \overset{\text{Soma telescópica}}{=} F(b) - F(a). \tag{2.151}$$

Assim teremos

$$\left| [F(b) - F(a)] - \int_a^b f(x)\,dx \right| \overset{(2.151)}{=} \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon, \tag{2.152}$$

como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

mostrando que identidade (2.149) e completando a demonstração do resultado.

□

Podemos mostrar um resultado relacionado com a integração por partes para integrias de Riemann, mais precisamente:

Teorema 2.4.3 *Suponhamos que as funções* $F : G : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são continuamente diferenciáveis em* $[a,b]$ *e que as funções* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f(x) \doteq F'(x), \quad g(x) = G'(x), \quad x \in [a,b].$$

Então a $Fg, fG \in \mathfrak{R}$ *em* $[a,b]$ *e além disso*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx, \tag{2.153}$$

ou seja,

$$\int_a^b F(x)\,G'(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x)\,G(x)\,dx, \tag{2.154}$$

Demonstração:

Como as funções F, G são continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ segue que as funções f, g serão funções contínuas em $[a,b]$, logo as funções Fg e fG serão funções contínuas em $[a,b]$ e assim, pelo Teorema (2.2.3), elas serão funções Riemann integráveis em $[a,b]$.

Consideremos a função $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) \doteq F(x)\,G(x), \quad x \in [a,b]$$

que será continuamente diferenciável em $[a,b]$.

Temos que $H \in \mathfrak{R}$ em $[a,b]$ (pois é, em particular, uma função contínua em $[a,b]$) e como

$$H'(x) = F'(x)\,G(x) + F(x)\,G'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

e F', G' são funções contínuas em $[a,b]$ segue que $H' \in \mathfrak{R}$ em $[a,b]$.

Logo do Teorema (2.4.2) segue que

$$\int_a^b H'(x)\,dx = H(b) - H(a) = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a).$$

Mas

$$\int_a^b H'(x)\,dx = \int_a^b [\underbrace{F'(x)}_{=f(x)}\,G(x) + F(x)\,\underbrace{G'(x)}_{=g(x)}]\,dx = \int_a^b f(x)G(x)\,dx + \int_a^b F(x)g(x)\,dx,$$

ou seja,

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b f(x)G(x)\,dx + \int_a^b F(x)g(x)\,dx,$$

de onde podemos obter (2.154), completando a demonstração do resultado.

□

2.5 Integração de funções vetoriais

Começaremos com a

Definição 2.5.1 *Consideremos a função vetorial* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *cujas funções componentes são as funções* $f_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, *para* $j \in \{1, \cdots, n\}$, *e a função* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *monótona crescente em* $[a,b]$.

Diremos que a função vetorial $\underline{f}$ *é* **Riemann-Stieltjes integrável em** $[a,b]$, *indicando por* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *se, e somente se, para cada* $j \in \{1, \cdots, n\}$, $f_j \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$.

Neste caso, definiremos a **integral de Riemann-Stieltjes da função** $\underline{f}$ **em** $[a,b]$, *indicada por* $\int_a^b f\,d\alpha$, *como sendo a* k*-upla:*

$$\int_a^b f\,d\alpha \doteq \left(\int_a^b f_1\,d\alpha, \cdots, \int_a^b f_n\,d\alpha\right) \in \mathbb{R}^k. \tag{2.155}$$

Observação 2.5.1

1. *A definição acima nos diz que uma função definida no intervalo* $[a, b]$ *a valores vetoriais será Riemann-Stieltjes integrável em* $[a, b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$, *se, e somente se, cada função componente associada à mesma for uma função Riemann-Stieltjes integrável em* $[a, b]$, *relativamente à função* $\underline{\alpha}$.

   Neste caso a integral de Riemann-Stieltjes da função vetorial no intervalo $[a, b]$ *será obtida integrando-se cada uma das funções componentes associadas à mesma.*

2. *Diremos que a função vetorial* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *é uma* **função limitada em** $[a, b]$ *se existir* $M > 0$ *tal que*
$$\|f(x)\| \leq M, \quad x \in [a, b],$$
   onde $\|.\|$ *denota a norma usual de* $\mathbb{R}^k$, *isto é,*
$$\|(a_1, \cdots, a_n)\| \doteq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

3. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *é uma função vetorial, cujas funções componentes são as funções* $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}$, *para* $j \in \{1, \cdots, n\}$, *e* $x_o \in (a, b)$.

   Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** x_o *se para cada* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *a função componente* $\underline{f_j}$ *é uma função diferenciável em* x_o.

   Neste caso definimos a **derivada da função** $\underline{f}$ **em** x_o, *que será indicada por* $f'(x_o)$, *como sendo*
$$f'(x_o) \doteq \big(f_1'(x_o), \cdots, f_n'(x_o)\big) \in \mathbb{R}^k.$$

Com isto temos a:

Proposição 2.5.1

1. *Se* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *funções vetoriais,* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a, b]$ *com* $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *então* $(f + g) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e*
$$\int_a^b (f + g)\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha;$$

2. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *função vetorial,* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a, b]$ *com* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *então* $(cf) \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e*
$$\int_a^b (cf)\, d\alpha = c \int_a^b f\, d\alpha;$$

3. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *função vetorial,* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a, b]$ *com* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, b]$ *e* $c \in [a, b]$ *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a, c]$ *e em* $[c, b]$ *e*
$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha;$$

4. *Se as funções* $\alpha_1, \alpha_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são monótonas crescentes em* $[a, b]$ *e a função vetorial* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *satisfaz* $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1) \cap f \in \mathfrak{R}(\alpha_2)$ *em* $[a, b]$ *então* $f \in \mathfrak{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *em* $[a, b]$ *e*
$$\int_a^b f\, d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2;$$

5. *Se* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é monótona crescente em* $[a,b]$, *a função vetorial* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *satisfaz* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *e* $c \geq 0$ *então* $f \in \mathfrak{R}(c\alpha)$ *em* $[a,b]$ *e*

$$\int_a^b f\, d(c\alpha) = c \int_a^b f\, d\alpha;$$

6. *Sejam* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é diferenciável e monótona crescente em* $[a,b]$ *tal que* $\alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a,b]$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *uma função vetorial limitada em* $[a,b]$.

   Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *se, e somente se,* $f\alpha' \in \mathfrak{R}$ *em* $[a,b]$.

   Neste caso teremos

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, d\alpha.$$

7. *Sejam* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é monótona crescente em* $[a,b]$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *uma função vetorial tal que* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *e definamos a função* $F : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *por*

$$F(x) \doteq \int_a^b f(t)\, dt, \quad x \in [a,b].$$

   Então a função vetorial $\underline{F}$ *será contínua em* $[a,b]$.

   Além disso, se a função $\underline{f}$ *vetorial for contínua em* $x_o \in [a,b]$ *então a função vetorial* $\underline{F}$ *será diferenciável em* $x_o \in [a,b]$ *e*

$$F'(x_o) = f(x_o).$$

8. *Sejam* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é monótona crescente em* $[a,b]$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *uma função tal que* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$ *e exista uma função* $F : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *diferenciável em* $[a,b]$ *tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a,b].$$

   Então

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração:

Para demonstrar os itens 1. até 5. basta aplicar os itens 1., 2., 4., 6.e 7. da Proposição (2.3.1) a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1).

Para demonstrar o item 6. basta aplicar o Teorema (2.3.1) a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1).

Para demonstrar os itens 7. e 8. basta aplicar, respectivamente, os Teoremas (2.4.1) e (2.4.2), a cada uma das componentes das funções vetoriais envolvidas e a Definição (2.5.1), completando a demonstração do resultado.

□

Um outro resultado interessante é dado pela:

Proposição 2.5.2 *Sejam* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função monótona crescente em* $[a,b]$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ *função vetorial tal que* $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ *em* $[a,b]$.

Então $\|f\| \in \mathfrak{R}$ *em* $[a,b]$ *e*

$$\left\| \int_a^b f\, d\alpha \right\| \leq \int_a^b \|f\|\, d\alpha, \tag{2.156}$$

onde $\|.\|$ *denota a norma usual de* $\mathbb{R}^k$ *(veja Observação (2.5.1) item 2.).*

<u>**Demonstração:**</u>

Observemos que se as funções componentes da função vetorial $\underline{f}$ são as funções $f_j ; [a,b] \to \mathbb{R}$, para $j \in \{1, \cdots, n\}$ então

$$\|f(x)\| = \sqrt{[f_1(x)]^2 + \cdots + [f_1(x)]^n}, \quad x \in [a,b].$$

Notemos que para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$ temos que $f_j \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, logo do Corolário (2.3.1) item 1., segue que $f_j^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$.

Logo para Proposição (2.3.1) item 1., segue que $F \doteq \sum_{j=1}^{n} f_j^2 \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$.

Consideremos $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi(t) \doteq \sqrt{t}, \quad t \in [0,\infty).$$

Notemos que

$$\|f(x)\| = \sqrt{F(x)} = (\phi \circ F)(x), \quad x \in [a,b].$$

Como a função ϕ é contínua em $[0,\infty)$ e $F \in \mathfrak{R}(\alpha)$ segue, do Teorema (2.2.6) que a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \underbrace{(\phi \circ F)(x)}_{=\|f(x)\|}, \quad x \in [a,b]$$

pertencerá a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, ou seja, $\|f\| \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, como afirmamos.

Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, definamos

$$y_j \doteq \int_a^b f_j \, d\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \doteq \int_a^b f \, d\alpha \in \mathbb{R}^k.$$

Observemos que

$$\|y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\int_a^b f_j \, d\alpha \right) \overset{\text{Prop. (2.3.1) itens 1. e 2.}}{=} \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} y_j f_j \right) d\alpha. \tag{2.157}$$

Para cada $t \in [a,b]$, aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz às k-uplas $(y_1, \cdots, y_k)$ e $(f_1(t), \cdots, f_k(t))$, segue que

$$\sum_{j=1}^{n} y_j . f_j(t) \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} [f_j(t)]^2} = \|y\| \, \|f(t)\|.$$

Logo, da Proposição (2.3.1) item 3., segue que

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} y_j f_j \right) d\alpha \le \int_a^b (\|y\| \, \|f\|) \, d\alpha \overset{\text{Prop. (2.3.1) itens 2.}}{=} \|y\| \int_a^b \|f\| \, d\alpha.$$

Susbstituindo-se em (2.157) obteremos

$$\|y\|^2 \le \|y\| \int_a^b \|f\| \, d\alpha. \tag{2.158}$$

Temos duas possibilidades:

(i) Se $\|y\| = 0$ (ou seja, $\int_a^b f\,d\alpha = 0$) segue que (2.156) vale trivialmente.

(ii) Por outro lado, se $\|y\| \neq 0$, dividindo-se (2.158) por $\|y\| > 0$ obteremos

$$\underbrace{\|y\|}_{\left\|\int_a^b f\,d\alpha\right\|} \leq \int_a^b \|f\|\,d\alpha \quad \Rightarrow \quad \left\|\int_a^b f\,d\alpha\right\| \leq \int_a^b \|f\|\,d\alpha,$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

□

2.6 Curvas retificáveis

Começaremos introduzindo alguns conceitos básicos e mais adiante entraremos no que nos interessa propriamente, a saber, o comprimento de uma curva "bem comportada" do $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.6.1 *Uma função $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ contínua em $[a, b]$ será dita* **curva parametrizada em $\mathbb{R}^k$**.

O conjunto $\gamma([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^k$ será dito **traço da curva parmetrizada γ**.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ for injetora (isto é, $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ se $t, s \in [a, b]$, $t \neq s$) diremos que a curva parametrizada é **simples**.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ é tal que

$$\gamma(a) = \gamma(b),$$

diremos que a curva parametrizada é **fechada**.

Se a curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ for injetora em (a, b) e $\gamma(a) = \gamma(b)$, diremos que a curva parametrizada é **fechada e simples**.

Observação 2.6.1 *Duas curvas parametrizadas distintas podem ter o mesmo traço.*

Para ilustrar consideremos $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e $\gamma_2 : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\gamma_1(t) \doteq t, \;\; t \in [0, 1] \quad e \quad \gamma_2(s) \doteq 2s, \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

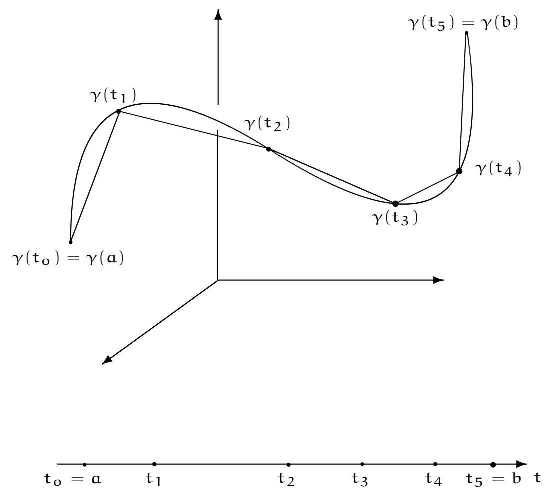
As curvas parmetrizadas são distintas mas teêm o mesmo traço (que é o intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, verifique!).

Sejam $\gamma : [a.b] \to \mathbb{R}^k$ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^k$ e $\mathcal{P} \doteq \{t_o = a, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e definamos

$$\Lambda(\mathcal{P}, \gamma) \doteq \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Observemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$ nos fornece a distância do ponto $\gamma(t_{i-1})$ ao ponto $\gamma(t_i)$.

Logo $\Lambda(\mathcal{P}, \gamma)$ nos dá o comprimento de uma poligonal que tem como vértices os pontos $\gamma(t_i)$, para $i \in \{0, \cdots, n\}$ (veja figura abaixo).



Em princípio, quanto maior o número de pontos da partição $\mathcal{P}$ mais perto $\Lambda(\mathcal{P},\gamma)$ ficará do valor do comprimento do traço da curva γ (se este exisitr!).

Devido a este fato, empírico, introduziremos a

Definição 2.6.2 *Na situação acima, definiremos o* **comprimento da curva parametrizada** γ*, denotado por* $\Lambda(\gamma)$*, como sendo*

$$\Lambda(\gamma) \doteq \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P},\gamma). \tag{2.159}$$

Diremos que a curva parametrizada γ *é* **retificável** *se* $\Lambda(\gamma) < \infty$.

Em certos casos, o comprimento da curva parametrizada γ será dado por uma integral de Riemann, como mostra o:

Teorema 2.6.1 *Seja* $\gamma : [a.b] \to \mathbb{R}^k$ *uma curva parametrizada que é continuamente diferenciável em* $[a,b]$.

Então γ *é uma curva retificável e*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt. \tag{2.160}$$

Demonstração:

Notemos que $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ é uma função contínua em $[a,b]$, logo a função $\|\gamma'\| : [a,b] \to \mathbb{R}$ também será uma função contínua em $[a,b]$ (pois a norma é uma função contínua), portanto a integral de Riemann do lado direito de (2.160) existirá.

Observemos também que se $\mathcal{P} \doteq \{t_o = a, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$ é uma partição do intervalo $[a,b]$ teremos

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \overset{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{=} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(s)\, ds \right\| \overset{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\gamma'(s)\right\|\, ds. \tag{2.161}$$

Assim teremos

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{P},\gamma) &= \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \overset{(2.161)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\gamma'(s)\right\|\, ds \\ &= \int_a^b \left\|\gamma'(s)\right\|\, ds. \end{aligned} \tag{2.162}$$

Tomando-se o supremo sobre todas as partições do intervalor $[a, b]$, obteremos

$$\Lambda(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P}, \gamma) \overset{(2.162)}{\leq} \int_a^b \left\|\gamma'(s)\right\| \, ds. \tag{2.163}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, como a função γ' é contínua em $[a, b]$, que é compacto, segue que a função γ' é uniformemente contínua em $[a, b]$.

Logo existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$s, t \in [a, b] \quad \text{e} \quad |s - t| \in \delta \quad \text{deveremos ter} \quad \left\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\right\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.164}$$

Seja $\mathcal{P} \doteq \{t_o = a, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n = b\}$ é uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\Delta t_i \doteq t_i - t_{i-1} < \delta. \tag{2.165}$$

Notemos que, para cada $i \in \{a, \cdots, n\}$, se $t \in [t_{i-1}, t_i]$ segue que

$$\underbrace{\left\|\gamma'(t) - \gamma'(t_i)\right\|}_{\geq \|\gamma'(t)\| - \|\gamma'(t_i)\|} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

ou seja,

$$\left\|\gamma'(t)\right\| \leq \|\gamma(t_i)\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.166}$$

Logo, para cada $i \in \{a, \cdots, n\}$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\|\gamma'(t)\right\| \, dt &\overset{(2.166)}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\|\gamma(t_i)\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) dt \\
&= \underbrace{\|\gamma(t_i)\|(t_i - t_{i-1})}_{\|\gamma(t_i)\,(t_i - t_{i-1})\|} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i} \\
&= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \gamma'(t) + \left[\gamma'(t_i) - \gamma'(t)\right] \right\} \, dt \right\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) \, dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\gamma'(t) + \gamma'(t_i)\right] \, dt \right\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&\overset{\text{Des. triangular}}{\leq} \left\| \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) \, dt}_{\overset{\text{Prop. (2.5.1) item 8.}}{=} \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})} \right\| + \underbrace{\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma'(t) + \gamma'(t_i)] \, dt \right\|}_{\overset{\text{Prop. (2.5.2)}}{\leq} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) + \gamma'(t_i)\| \, dt} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\left\|\gamma'(t) + \gamma'(t_i)\right\|}_{<\varepsilon \text{ por } (2.166), \text{ pois } |t_i - t_{i-1}| < \delta} \, dt + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&< \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i \\
&= \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \Delta t_i.
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\|\, dt \\
&\overset{(2.167}{<} \sum_{i=1}^{n} \left(\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \frac{\varepsilon}{(b-a)}\, \Delta t_i \right) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}_{=\Lambda(\mathcal{P},\gamma)} + \frac{\varepsilon}{(b-a)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta t_i}_{=b-a} \\
&= \underbrace{\Lambda(\mathcal{P},\gamma)}_{\leq \sup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} \Lambda(\mathcal{P},\gamma) = \Lambda(\gamma)} + \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) \\
&\leq \Lambda(\gamma) + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

para todo $\varepsilon > 0$, ou seja,

$$
\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leq \Lambda(\gamma),
$$

que juntamente com (2.163) mostram que (2.160) ocorrerá, completando a prova do resultado.

□

2.7 Exercícios

Capítulo 3

Sequência e Séries de Funções

30.08.2011 - 9.a

Neste capítulo trataremos da convergência pontual e uniforme das sequências e das séries de funções e algumas aplicações.

Começaremos com a convergência pontual das sequências e das séries de funções.

3.1 Convergência pontual de sequências e séries de funções

Definição 3.1.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções, onde para cada* $n \in \mathbb{N}$ *a função* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$*.*

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge pontualmente (ou ponto a ponto) para a função $\underline{f}$ em E** *se, para cada* $x \in E$ *fixado, a sequência numérica* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente para* $f(x)$*, isto é, dado* $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar* $N_o = N_o(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ *tal que se*

$$n \geq N_o \quad \textit{deveremos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Neste caso escreveremos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in E, \quad \textit{ou} \quad f_n \xrightarrow{E} f, \quad \textit{ou ainda} \quad f_n \xrightarrow{p} f. \tag{3.2}$$

Com isto podemos introduzir a

Definição 3.1.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções, onde para cada* $n \in \mathbb{N}$ *temos que* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$*..*

Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge pontualmente (ou ponto a ponto) para a função $\underline{f}$ em E** *se, para cada* $x \in E$ *fixado, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *for convergente para* $f(x)$*, ou seja, a sequência das somas parcias* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente pontualmente para a função* $\underline{f}$ *em* E*, onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, temos que:*

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x), \quad x \in E. \tag{3.3}$$

Neste caso escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E \tag{3.4}$$

e diremos que a função $\underline{f}$ *é a* <u>**soma da série de funções**</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Observação 3.1.1

1. *Algumas questões podem ser colocadas:*

   (a) *Se* $f_n \xrightarrow{E} f$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* f_n *for contínua em* $x_o \in E$ *isto implicará,* <u>*necessariamente*</u>, *que a função* $\underline{f}$ *será contínua em* x_o*?*

   (b) *Se* $f_n \xrightarrow{E} f$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* f_n *for diferenciável em* $x_o \in E$ *isto implicará,* <u>*necessariamente*</u>, *que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* x_o*?*

   (c) *Se* $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ *e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *a função* f_n *for Riemann integrável em* $[a,b]$ *isto implicará,* <u>*necessariamente*</u>, *que a função* $\underline{f}$ *será diferenciável em* $[a,b]$*?*

2. *Podemos colocar as questões análogas as acima para a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

3. *Antes de responder as questões acima lembremos que uma função* $\underline{f}$ *é contínua em* x_o *se, e somente se,*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o).$$

4. *Sob este ponto de vista, a resposta para a questão (a) acima pode ser colocada da seguinte forma:*

   Por um lado teremos:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \overset{f_n \xrightarrow{E} f}{=} \lim_{x \to x_o} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right), \tag{3.5}$$

   por outro, deveremos ter

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_o} f(x) &\overset{f \text{ é cont. em } x_o}{=} f(x_o) \overset{f_n \xrightarrow{E} f}{=} \lim_{n \to \infty} f_n(x_o) \\ &\overset{f_n \text{ é cont. em } x_o}{=} \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_o} f_n(x) \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

   Comparando (3.5) como (3.6) segue que deveremos ter

$$\lim_{x \to x_o} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_o} f_n(x) \right), \tag{3.7}$$

   ou seja, precisamos saber se a "troca" dos limites acima é sempre possível, se $f_n \xrightarrow{E} f$.

5. *Veremos em alguns exemplos a seguir que isto em geral não pode ser feito.*

Exemplo 3.1.1 *Para cada* $m, n \in \mathbb{N}$ *consideremos*

$$S_{m,n} \doteq \frac{m}{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Pergunta-se:

$$\lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} S_{m,n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} S_{m,n} \right) \ ?$$

Resolução:

Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, teremos:

$$\lim_{n\to\infty} S_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{m+n} = 0.$$

Logo

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right) = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{m\to\infty} S_{m,n} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+n} = 1.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} S_{m,n}\right) = 1 \neq 0 = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} S_{m,n}\right).$$

Um outro exemplo é dado por:

Exemplo 3.1.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

e consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Afirmamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, pontualmente em $\mathbb{R}$, onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1+x^2, & x \neq 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

*Caso isto seja verdade, notamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função f_n é contínua em $\mathbb{R}$ mas a função $\underline{f}$ **não** é contínua em $x = 0$ (pois $\lim_{x\to 0} f(x) \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1 \neq 0 = f(0)$).*

Resolução:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$f_n(0) = \left(\frac{0^2}{1+0^2}\right)^n = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = 0.$$

Por outro lado, se $x \neq 0$, como, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, temos

$$0 < \frac{x^2}{1+x^2} < 1,$$

segue que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n \overset{\text{Série geom. de razão } \frac{x^2}{1+x^2}}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1+x^2-x^2} = 1+x^2,$$

mostrando que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge para a função $\underline{f}$ dada por (3.8).

Temos também o

Exercício 3.1.1 *Para cada* $m \in \mathbb{N}$ *fixado consideremos a função* $f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_m(x) \doteq \lim_{n\to\infty} [\cos(m!\pi x)]^{2n}, \quad x \in [0,1]. \tag{3.9}$$

Afirmamos que $f_m \xrightarrow{E} f$ *onde a função* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{I} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ *fixado, temos que* $f_m \in \mathfrak{R}$ *em* $[0,1]$ *mas* $f \notin \mathfrak{R}$ *em* $[0,1]$ *(verifique!).*

<u>**Resolução:**</u>

Observemos que

(i) Se $m!x \in \mathbb{Z}$ teremos

$$\cos(m!x\pi) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad [\cos(m!x\pi)]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_m(x) = \lim_{n\to\infty} [\cos(m!\pi x)]^{2n} = 1.$$

Neste caso

$$f(x) = 1.$$

(ii) Se $m!x \notin \mathbb{Z}$ segue que

$$-1 < \cos(m!x\pi) < 1 \quad \Rightarrow \quad [\cos(m!x\pi)]^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad f_m(x) = \lim_{n\to\infty} [\cos(m!\pi x)]^{2n} = 0.$$

Neste caso

$$f(x) = 0.$$

Para finalizar, notemos que

(i') Se $x \in \mathbb{Q}$ então $m!x \in \mathbb{Z}$, para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

De fato, se $x \in \mathbb{Q}$ então $x = \dfrac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$.

Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > q$.

Então

$$\begin{aligned} m!x = m!\frac{p}{q} &= [m.(m-1).\cdots.(q-1)q.(q+1).\cdots.2.1]\,\frac{p}{q} \\ &= [m.(m-1).\cdots.(q-1).(q+1).\cdots.2.1]\,.p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Logo do item 1. acima, segue que $f(x) = 1$.

(ii') Se $x \in \mathbb{I}$ então $m!x \notin \mathbb{Z}$ (verifique!), logo do item 2. acima, segue que $f(x) = 0$.

Com isto teremos que $f_m \xrightarrow{p} f$ em $[0,1]$.

Temos também o:

Exemplo 3.1.3 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, consideremos a função* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que $f_m \xrightarrow{p} f$ *em* $\mathbb{R}$*, onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado temos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{n}} = 0 = f(x).$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a função f_n é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}.n = \sqrt{n}\cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, a sequência de funções $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ **não** é convegente para a função f', pois, por exemplo $f_n(0) = \sqrt{n} \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Para finalizar temos o

Exercício 3.1.2 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, consideremos a função* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_n(x) \doteq n^2 x(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1].$$

Afirmamos que $f_n \xrightarrow{p} f$ *em* $[0,1]$*, onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in [0,1].$$

Resolução:

Observemos que:

(i) Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$f_n(0) = 0 \to 0 = f(0), \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

(ii) se $x \in (0,1]$ teremos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \left[n^2 x(1-x^2)^n\right] = x \lim_{n\to\infty} \left[n^2(1-x^2)^n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{(1-x^2)^n}(1-x^2)^{2n}\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como

$$0 < (1-x^2)^{2n} < 1,$$

se mostrarmos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(1-x^2)^n} = 0, \tag{3.11}$$

segurirá de (3.10), que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Para mostrar (3.12), mostraremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{(1+p)^n} = 0, \quad \text{para} \quad r > 0 \ \text{ e } p \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Notemos que se $p \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ está fixado, teremos

$$\begin{aligned}(1+p)^n &\overset{\text{Binômio de Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} p^k 1^{n-k} > \binom{n}{k} p^k \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k = \frac{n.(n-1).\cdots.(n-k+1)}{k!} p^k.\end{aligned} \tag{3.13}$$

para todo $k \in \{0, \cdots, n\}$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que (lembremos que $n \to \infty$)

$$r < \frac{n}{2} + 1$$

e seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \in (r, \frac{n}{2} + 1).$$

Com isto teremos

$$n.(n-1).\cdots.(n-k+1) > \left(\frac{n}{2}\right)^k. \tag{3.14}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned}0 < k < \frac{n}{2} + 1 &\Leftrightarrow 0 < 2k < n + 2 \ \Leftrightarrow \ 0 < n - 2k + 2 \\ &\Leftrightarrow \ n < 2n - 2k + 2 \ \Leftrightarrow \ \left(\frac{n}{2}\right)^k < n - k + 1.\end{aligned}$$

Em particular, vale (3.14).

Lodo de (3.13) e (3.14), teremos, para $k \in \mathbb{N}$ fixado com $2k < n + 2$, que:

$$(1+p)^n > \frac{n^k}{2^k\, k!} p^k \Leftrightarrow 0 < \frac{n^r}{(1+p)^n} < \underbrace{\frac{2^k k!}{p^k}}_{\text{n.o real fixado}} n^{r-k} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \tag{3.15}$$

pois $r - k < 0$.

Em particular, (3.12) ocorrerá.

Conclusão: $f_n \xrightarrow{p} f$ em $[0,1]$.

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 n^2 x (1-x^2)^n \, dx \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{n^2}{2(n+1)} \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \infty \neq 0 = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Deixaremos a cargo do leitor a resolução do:

Exercício 3.1.3 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, consideremos a função* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_n(x) \doteq nx(1-x^2)^n, \quad x \in [0,1].$$

Então $f_m \xrightarrow{p} f$ *em* $[0,1]$, *onde a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in [0,1].$$

Além disso

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \ !$$

3.2 Convergência uniforme de sequências e séries de funções

Nesta seção trataremos de outro tipo de convergência de sequências e séries de funções que nos fornecerá várias propriedades as quais a convergência pontual não pode nos garantir.

Começaremos com a

Definição 3.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$, *onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Diremos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente para a função $\underline{f}$** *em* E, *se dado* $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar* $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *tal que se*

$$n \geq N_o \quad \textit{deveremos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \tag{3.16}$$

Neste caso escrevermos: $f_n \xrightarrow{u} f$ *em* E.

Observação 3.2.1 *Na situação acima temos que se a sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$ *em* E *então ela será convergente pontualmente para* $\underline{f}$ *em* E.

A recíproca é falsa, como veremos em exemplos mais adiante.

Com isto podemos introduzir a

Definição 3.2.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$, *onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Diremos que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente para a função $\underline{f}$** *em* E, *se a sequência de funções das somas parciais* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$ *em* E, *onde, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *temos*

$$S_n(s) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x), \quad x \in E. \tag{3.17}$$

A seguir exibiremos alguns resultados relacionados com a convergêncua uniforme de sequências de funções.

Começaremos pelo **Critério de Cauchy** para a convergência uniforme de uma sequência de funções:

Teorema 3.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$, *onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

A sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$ *em* E *se, e somente se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que se:*

$$m, n \geq N_o \quad \textit{deveremos ter} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \tag{3.18}$$

Demonstração:

Suponhamos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em E.

Logo dado $\varepsilon > 0$ existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se:

$$n \geq N_o \quad \text{deveremos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad x \in E. \tag{3.19}$$

Portanto, se $m, n \geq N_o$ teremos, para $x \in E$, que:

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &= |[f_m(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \\ &\leq \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\overset{(3.19)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\overset{(3.19)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

mostrando que (3.18) ocorrerá.

Por outro lado, se dado $\varepsilon > 0$ existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que (3.18) ocorre, então para cada $x \in E$ segue que a sequência numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ será uma sequência numérica de Cauchy em A, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.

Mas A, munido da métrica usual (isto é, $|.|$) é completo, logo existe $f(x) \in A$ tal que

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

para cada $x \in E$.

Seja $N_o \in \mathbb{N}$ como em (3.18) e consideremos $m, n \geq N_o$.

Então

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Passando o limite na desigualdade acima quando $m \to \infty$, utilizando o fato que a função $|.|$ é contínua e que $f_m(x) \to f(x)$ para $x \in E$, seguirá que

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in E,$$

mostrando que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em E, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.2.2

1. *Quando (3.18) ocorre diremos que a sequência se funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma* **sequência uniformemente de Cauchy** *em E.*

2. *Podemos substituir $E \subseteq \mathbb{R}$ por um subconjunto de um espaço métrico (X, d) que a conclusão do resultado permanecerá válida.*

   Deixaremos a verifação deste fato como exercício para o leitor.

Proposição 3.2.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \to A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \to A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$M_n \doteq \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Então $f_n \overset{u}{\to} f$ em E se, e somente se, $M_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Demonstração:

Notemos que $f_n \stackrel{u}{\to} f$ em E se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_o$ deveremos ter

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in E,$$

que é equivalente a escrever

$$\underbrace{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|}_{=M_n} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq M_n \leq \varepsilon, \quad \text{se} \quad n \geq N_o,$$

ou ainda, que $M_n \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$, completando a demonstração do resultado.

□

Para a convergência uniforme de séries de funções temos o <u>**Teste M. de Weierstrass**</u>:

Teorema 3.2.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, $f : E \to A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \to A$, onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Suponhamos que existe uma sequência numérica $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por números reais não negativos tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \tag{3.20}$$

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ for convergente então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será uniformemente convergente em E para alguma função definida em E.

1.09.2011 - 10.a

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, segue que a sequência das somas parciais desta série, que indicaremos por $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deverá ser uma sequência numérica de Cauchy, isto é, deverá existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que, se

$$m > n \geq N_o, \quad \text{deveremos ter} \quad \underbrace{|\underbrace{s_m}_{\sum_{i=1}^m M_i} - \underbrace{s_n}_{\sum_{i=1}^n M_i}|}_{=\sum_{i=n+1}^m M_i} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left|\sum_{i=n+1}^m \underbrace{M_i}_{\geq 0}\right|}_{\sum_{i=n+1}^m M_i} < \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=n+1}^m M_i < \varepsilon. \tag{3.21}$$

Afirmamos que a sequência das somas parciais da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (dada por (3.17)), é uma sequência uniformemente de Cauchy em E.

De fato, se $m > n \geq N_o$ teremos

$$\begin{aligned}
|S_m(x) - S_n(x)| &= \left|\sum_{i=1}^m f_i(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x)\right| \\
&= \left|\sum_{i=n+1}^m f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^m \underbrace{|f_i(x)|}_{\stackrel{(3.20)}{\leq} M_i} \leq \sum_{i=n+1}^m M_i \stackrel{(3.21)}{<} \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando a afirmação.

Logo, do Teorema (3.2.1) segue que a a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente em E, ou ainda, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ será uniformemente convergente em E para alguma função definida em E, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.3 *O Teste M. de Weierstrass nos fornece uma condição* **suficiente** *para que uma série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *seja uniformemente convergente em* E.

Pode-se mostrar que esta condição **não é necessária** *para que uma série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *seja uniformemente convergente em* E.

Deixaremos a cargo do leitor encontrar um contra-exemplo para esta situação.

3.2.1 Convergência uniforme e continuidade

A seguir exibiremos alguns consequências da convergência uniforme entre estas destaca-se a que nos diz, como veremos, que a convergência uniforme preserva continuidade.

Começaremos pelo

Teorema 3.2.3 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *não vazio,* $f : E \to A$ *uma função e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : E \to A$*, onde* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Suponhamos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $\underline{f}$ *em* E.

Seja $x_o \in \overline{E}$ *(o feche do conjunto* E *em* $\mathbb{R}$*) tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenhamos*

$$L_n \doteq \lim_{x\to x_o} f_n(x) \in A. \tag{3.22}$$

Então existe $L \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$L_n \to L, \quad \textit{quando} \quad n \to \infty, \tag{3.23}$$

existe $\lim_{x\to x_o} f(x)$ *e além disso*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = L, \tag{3.24}$$

ou seja,

$$\lim_{x\to x_o}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right].$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em E, do Teorema (3.2.1), segue que existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m, n \geq N_o \quad \text{deveremos ter} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in E. \tag{3.25}$$

Fazendo $x \to x_o$ na desigualdade acima (utilizando-se o fato que a função $|.|$ é contínua em A e $\lim_{x\to x_o} f_k(x) = L_k$), obteremos

$$|L_m - L_n| < \varepsilon,$$

ou seja, a sequência numérica $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência numérica de Cauchy em A, que é uma espaço métrico completo.

Logo existe $L \in A$ tal que

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n. \tag{3.26}$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in E$ teremos

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - L]| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L| \\ &= |f(x) - f_n(x)| + |[f_n(x) - L_n] + [L_n - L]| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L|. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Como a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em E, existe $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_1 \quad \text{deveremos ter} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo} \quad x \in E. \tag{3.28}$$

Por outro lado, de (3.26), segue que existe $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_2 \quad \text{deveremos ter} \quad |L_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.29}$$

Por fim, de (3.22), para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, existe $\delta > 0$ tal que se

$$x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \cap E \quad \text{deveremos ter} \quad |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.30}$$

Portanto se $t \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \cap E$ e $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, de (3.27), (3.28), (3.29) e (3.30), teremos

$$|f(x) - L| \overset{(3.27)}{\leq} \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\overset{(3.28)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - L_n|}_{\overset{(3.30)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|L_n - L|}_{\overset{(3.29)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, mostrando (3.24) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.4 *Podemos reescrever a conclusão do resultado acima da seguinte forma:*

$$\lim_{x\to x_o} \underbrace{f(x)}_{=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)} = \underbrace{L}_{\lim\limits_{n\to\infty} L_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{L_n}_{=\lim\limits_{x\to x_o} f_n(x)} . \tag{3.31}$$

isto é,

$$\lim_{x\to x_o} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{x\to x_o} f_n(x)\right], \tag{3.32}$$

ou seja, o resultado acima nos fornece condições <u>**suficientes**</u> *para que possamos trocar a ordem dos limites no duplo limite que estamos interessados em calcular.*

Como consequência do resultado acima temos o

Corolário 3.2.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto, $f : E \to A$ uma função e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : E \to A$, que vamos supor ser contínua em $x_o \in E$, , onde $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$.*

Suponhamos a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$ em E. Então a função $\underline{f}$ será contínua em x_o.

Demonstração:

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é contínua em x_o teremos

$$\lim_{x \to x_o} f_n(x) = f_n(x_o),$$

ou seja, podemos considerar $L_n \doteq f_n(x_o)$.

Logo, do Teorema acima teremos

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \overset{f_n \overset{u}{\to} f}{=} L = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} f_n(x_o) \overset{f_n \overset{u}{\to} f}{=} f(x_o), \tag{3.33}$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em x_o, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.5

1. *A hipósete da convergência uniforme no resultado acima é necessaria para obtermos a conclusão do mesmo.*

   Para ver isto basta ver o Exercício (3.1.1).

2. *Em geral,* **não** *vale a recíproca do Corolário acima, mais precisamente, existem sequências de funções contínuas em* $[a, b]$ *que convergem para uma função em contínua* $[a, b]$ *sem que a convergência da sequência de funções seja uniforme em* $[a, b]$.

   Deixaremos como exercício para o leitor a construção de um exemplo que tenha essas propriedades.

3. *Diremos que* $K \subseteq \mathbb{R}$ *é um* **conjunto compacto** *se o conjunto* K *for fechado e limitado em* $\mathbb{R}$.

Um resultado interessante que relaciona convergência pontual com convergência uniforme de sequências de funções é dado pelo:

Teorema 3.2.4 *Sejam* $K \subseteq \mathbb{R}$ *um compacto de* $\mathbb{R}$, $f : K \to \mathbb{R}$ *uma função e* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções definidas em* K.

Suponhamos que:

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$ *a função* $f_n : K \to \mathbb{R}$ *seja contínua em* K*;*

(ii) $f_n \overset{p}{\to} f$ *em* K*;*

(iii) a função $\underline{f}$ *seja contínua em* K*;*

(iv) a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência monótona decrescente em* K*, isto é, se* $x \in K$ *temos*

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.34}$$

Então $f_n \overset{u}{\to} f$ *em* K.

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $g_n : K \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_n(x) \doteq f_n(x) - f(x), \quad x \in K. \tag{3.35}$$

Como a função $\underline{f}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ também é contínua em K segue que a função $\underline{g_n}$ será contínua em K.

Notemos também que, da hipótese (ii), segue que

$$g_n \xrightarrow{p} 0, \quad \text{em } K. \tag{3.36}$$

Da hipótese (iv) segue que a sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente em K.

Mostremos que

$$g_n \xrightarrow{u} 0, \quad \text{em } K. \tag{3.37}$$

Para isto, dado $\varepsilon > 0$, consideremos

$$K_n \doteq \{x \in K\,;\, g_n(x) \geq \varepsilon\} \subseteq K. \tag{3.38}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\underline{g_n}$ será contínua em K e

$$K_n = g_n^{-1}([\varepsilon, \infty)),$$

segue que K_n é um subconjunto fechado de K, logo também será um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (pois é um subconjunto fechado e como está contido em K que é limitado, também será limitado em $\mathbb{R}$).

Por outro lado, como a sequência de funções $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente em K, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$x \in K_{n+1} \;\Rightarrow\; \varepsilon \leq g_{n+1}(x) \overset{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow}{\leq} g_n(x) \;\Rightarrow\; x \in K_n,$$

ou seja,

$$K_{n+1} \subseteq K_n. \tag{3.39}$$

Seja $x \in K$ fixado.

De (3.36) teremos

$$g_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

logo existirá $N_o \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_o \quad \text{devemos ter:} \quad |g_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{em particular,} \quad 0 \overset{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow \text{ e } g_n(x)\to 0}{\leq} g_n(x) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$x \notin K_n, \quad \text{para} \quad n \geq N_o. \tag{3.40}$$

Em particular

$$x \notin \bigcap_{n\geq N_o} K_n \quad\Rightarrow\quad \bigcap_{n\geq N_o} K_n = \emptyset \quad\Rightarrow\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset.$$

Logo temos que, a sequência de conjuntos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de subconjuntos compactos de K, cuja intersecção de todos é vazia.

Logo do Corolário do Teorema 2.36 do Rudin, página 38, segue que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que a intersecção finita

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{N_1} K_n \overset{K_{i+1}\subseteq K_i}{=} K_{N_1},$$

ou seja,

$$K_{N_1} = \emptyset,$$

ou ainda, da definição de K_{N_1}, segue que

$$0 \leq g_{N_1}(x) < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in K. \tag{3.41}$$

Para finalizar, notemos que se $n \geq N_1$ teremos

$$0 \leq g_n(x) \overset{(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\downarrow}{\leq} g_{N_1}(x) \overset{(3.41)}{<} \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in K,$$

ou seja, (3.37) ocorrerá, e portanto $f_n \xrightarrow{u} f$ em K, completando a demonstração.

□

Observação 3.2.6 *Notemos que a compacidade do conjunto K é condição necessária para a conclusão do resultado acima, como mostra o seguinte exemplo:*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq x^n, \quad x \in [0,1)$$

e a função $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq 0, \quad x \in [0,1).$$

Para cada $x \in [0,1)$ temos que

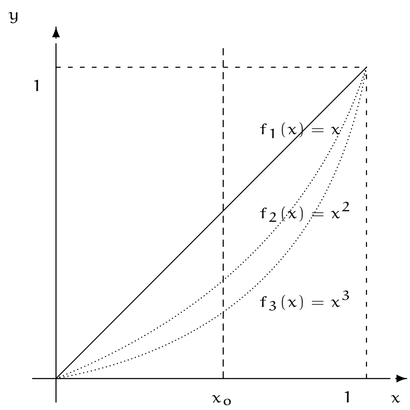
$$f_n(x) = x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Notemos também que se $m \geq n$ e $x \in [0,1)$, então

$$f_m(x) = x^m \overset{n\leq m \text{ e } x\in[0,1)}{\leq} x^n = f_n(x),$$

ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções decrescente em $[0,1)$.

Apesar disso a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não** *converge uniformemente para a função f em $[0,1)$ (veja figura abaixo).*



A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

A seguir estudaremos de um modo mais profundo o conjunto formado por todas as funções a valores reais contínuas e limitadas definidas em um espaço (X,d).

Começaremos introduzindo a:

Definição 3.2.3 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico e* $A = \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) munido da métrica usual (isto é, induzida pelo* $|\cdot|$*).*

Definiremos

$$C_b(X; A) \doteq \{f : X \to A\,;\ \ \textit{a função } f \textit{ é contínua e limitada em } X\}.$$

Observação 3.2.7

1. $(C_b(X; A), +, .)$ *é um espaço vetorial sobre* A*, onde* $\underline{+}$ *indica a adição usual de funções e* $\underline{.}$ *denotará a multiplicação de elementos de* A *por funções.*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

2. *Com isto podemos definir a função* $\|.\|_b : C_b(X; A) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\|f\|_b \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{3.42}$$

   Notemos que:

   (i) *se* $f \in C_b(X; A)$ *então a função* $\underline{f}$ *será limitada em* X*, logo existe* $\sup_{x\in X} |f(x)| \in [0, \infty)$*, ou seja a função* $\|.\|_b$ *está bem definida;*

   (ii) *se* $f \in C_b(X; A)$ *teremos*
$$\|f\|_b = \sup_{x\in X} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} \geq 0;$$

   (iii) *se* $f \in C_b(X; A)$ *então*
$$0 = \|f\|_b = \sup_{x\in X} \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| = 0,\ \forall x \in X \quad \Leftrightarrow \quad f = 0.$$

   (iv) *se* $f \in C_b(X; A)$ *e* $\lambda \in A$ *teremos*
$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_b &= \sup_{x\in X} |(\lambda f)(x)| = \sup_{x\in X}[|\lambda|\,|f(x)|] \overset{|\lambda|\geq 0}{=} |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| \\ &= |\lambda|\,\|f\|_b;\end{aligned}$$

   (v) *se* $f, g \in C_b(X; A)$ *teremos*
$$\begin{aligned}\|f + g\|_b &= \sup_{x\in X} |(f + g)(x)| = \sup_{x\in X}[f(x) + g(x)|] \overset{|f(x)+g(x)|\leq|f(x)|+|g(x)|}{=} \sup_{x\in X}[|f(x)| + |g(x)|] \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\|_b + \|g\|_b,\end{aligned}$$

   ou seja, $\|.\|_b$ *é uma* **norma** *no espaço vetorial sobre* A*,* $(C_b(X; A), +, .)$*.*

3. *Na situação acima temos que a função* $d : C_b(X; A) \times C_b(X; A) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d_b(f, g) \doteq \|f - g\|_b, \quad f, g \in C_b(X; A), \tag{3.43}$$

   será uma **métrica** *em* $C_b(X; A)$*, que será denominada de* **métrica da convergência uniforme em** $C_b(X; A)$*.*

4. *A Proposição (3.2.1) afirma que:*

$$f_n \stackrel{u}{\to} f \text{ em } X \quad \Leftrightarrow \quad f_n \stackrel{\|.\|_b}{\to} f$$

5. *Seja $\mathcal{A} \subseteq C_b(X; A)$.*

   Então o fecho de $\mathcal{A}$, segundo a métrica d_b, isto é $\overline{\mathcal{A}}$, será denominado **fecho uniforme do conjunto $\mathcal{A}$** *e $\overline{\mathcal{A}}$ será dito* **uniformemente fechado** *em $C_b(X; A)$.*

Podemos agora demonstrar o:

Teorema 3.2.5 *O espaço vetorial $(C_b(X; A), +, .)$ quando munido da métrica d_b (dada por (3.43)) é um espaço métrico completo, ou seja, toda sequência de Cauchy segundo a métrica d_b deverá ser convergente em $C_b(X; A)$, relativamente à métrica d_b.*

Demonstração:

Consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C_b(X; A)$, relativamente à métrica d_b, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m > n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad \underbrace{d_b(f_m, f_n)}_{\|f_m - f_n\|} < \varepsilon \quad \text{ou ainda} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Logo, do Teorema (3.2.1) juntamente com o Corolário (3.2.1), segue que existe uma função $f : X \to A$ contínua em X tal que $f_n \stackrel{u}{\to} f$ em X, que pela Proposição (3.2.1) implicará que $f_n \stackrel{d_b}{\to} f$.

Falta mostrar que a função $\underline{f}$ é uma função limitada em X.

Para isto observemos que como $f_n \stackrel{u}{\to} f$ em X, dado $\varepsilon = 1$, podemos encontrar $N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - f_{N_1}\| < \varepsilon = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{|f(x) - f_{N_1}(x)|}_{\geq |f(x)| - |f_{N_1}(x)|} < 1, \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

que implicará

$$|f(x)| < 1 + \underbrace{|f_{N_1}(x)|}_{\leq R, \text{ pois } f_{N_1} \text{ é limitada em } X} \leq 1 + R, \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

mostrando que q função $\underline{f}$ é uma função limitada em X, completando a demonstração do resultado.

□

13.09.2011 - 11.a

3.2.2 Convergência uniforme e integração

O resultado principal desta subseção é o:

Teorema 3.2.6 *Sejam $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente em $[a, b]$, $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $f : [a, b] \to A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a, b] \to A$ que pertence a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$.*

Suponhamos que $f_n \stackrel{u}{\to} f$ em $[a, b]$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a, b]$ e além disso

$$\int_a^b f \, d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, d\alpha. \tag{3.44}$$

Demonstração:

Podemos supor, sem perda de generalidade, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenhamos $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, ou seja, é uma função a valores reais.

Isto se deve ao fato que se a função f_n for a valores complexos podemos escrevê-la como $f_n = \Re(f_n) + i\,\Im(f_n)$ e podemos aplicar as idéias da demonstração do caso real à parte real e à parte imaginária da mesma (que são funções a valores reais) e com isto obter a identidade (3.44) para o caso em que a função f é uma função a valores complexos.

Notemos que as funções f_n são limitadas em $[a, b]$ e que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, assim a função f também será uma função limitada em $[a, b]$ (isso foi provado no final da demonstração do Teorema (3.2.5)).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$\varepsilon_n \doteq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \geq 0. \tag{3.45}$$

Com isto teremos que, para todo $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n \;&\Leftrightarrow\; -\varepsilon_n \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon_n \\ &\Leftrightarrow\; f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] &= \int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n \int_a^b d\alpha = \underline{\int_a^b} (f_n - \varepsilon_n)\,d\alpha \\ &\overset{f_n - \varepsilon_n \overset{(3.46)}{\leq} f \text{ e } f \text{ é limitada}}{\leq} \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha \\ &\overset{f \overset{(3.46)}{\leq} f_n + \varepsilon}{\leq} \overline{\int_a^b} (f_n + \varepsilon_n)\,d\alpha \overset{f, f_n \in \Re(\alpha)}{=} \int_a^b (f_n + \varepsilon_n)\,d\alpha \\ &= \int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n \int_a^b d\alpha = \int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)], \end{aligned} \tag{3.47}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \left(\int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]\right) - \left(\int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]\right) \\ &= 2\varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \overset{n\to\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

pois $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a, b]$, logo (3.45) implicará que $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$ (ver Proposição (3.2.1)).

Logo

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \underline{\int_a^b} f\,d\alpha,$$

mostrando que $f \in \Re(\alpha)$ em $[a, b]$.

Além disso, de (3.47), segue que

$$\int_a^b f_n\,d\alpha - \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq \int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b f_n\,d\alpha + \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

ou seja,

$$\left|\int_a^b f_n\,d\alpha - \int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

pois $f_n \overset{u}{\to} f$ em $[a,b]$, ou seja,

$$\int_a^b f_n \, d\alpha \overset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f \, d\alpha,$$

mostrando (3.44) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.8 *Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, d\alpha = \int_a^b \underbrace{f}_{\lim\limits_{n\to\infty} f_n} \, d\alpha = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \, d\alpha.$$

Como consequência temos o

Corolário 3.2.2 *Sejam $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função monótona crescente em $[a,b]$, $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $f : [a,b] \to A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a,b] \to A$ que pertence a $\mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$.*

Suponhamos que a série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ seja convergente uniformemente para a função $\underline{f}$ em $[a,b]$.

Então $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$ e além disso

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n \, d\alpha. \tag{3.48}$$

Demonstração:

Como a série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ seja convergente uniformemente para a função $\underline{f}$ em $[a,b]$ temos que a sequência das somas parciais da série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, isto é, a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é uniformemente convergente para a $\underline{f}$ em $[a,b]$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x), \quad x \in [a,b].$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$, segue que que $S_n \in \mathfrak{R}(\alpha)$ em $[a,b]$.

Como $S_n \overset{u}{\to} f$ em $[a,b]$, do resultado acima segue que $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$ e

$$\int_a^b f \, d\alpha \overset{(3.44)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \underbrace{S_n}_{=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i} \, d\alpha \overset{\text{soma finita}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i \, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n \, d\alpha,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.9 *Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n \, d\alpha = \int_a^b \underbrace{f}_{=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n} \, d\alpha = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\alpha.$$

3.2.3 Convergência uniforme e diferenciação

O resultado principal desta subseção é o:

Teorema 3.2.7 *Sejam $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $g : [a,b] \to A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a,b] \to A$ que vamos supor ser diferenciável em $[a,b]$.*

Suponhamos que a sequência numérica $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente em A e $f'_n \xrightarrow{u} g$ em $[a,b]$.

Então a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente para uma função $\underline{f}$, onde a função $f : [a,b] \to A$ é diferenciável em $[a,b]$ e

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a,b].$$

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como a sequência numérica $(f_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{R}$ segue que ela será uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo poderemos encontrar $N_1 = N_1(\varepsilon, x_o) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m > n \geq N_1 \quad \text{teremos} \quad |f_m(x_o) - f_n(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.49}$$

Por outro lado, como a sequência de funções $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função $\underline{g}$ em $[a,b]$, segue, do Teorema (3.2.1), que ela será uma sequência de funções que é uniformente de Cauchy em $[a,b]$, ou seja, podemos encontrar $N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$m > n \geq N_2 \quad \text{teremos} \quad |f'_m(t) - f'_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \tag{3.50}$$

para todo $t \in [a,b]$.

Seja

$$N_o \doteq \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}.$$

Com isto, se $m > n \geq N_o$, para $t, x \in [a,b]$, $x \leq t$, segue do, Teorema do valor Médio aplicado à função $h : [x,t] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(s) \doteq f_m(s) - f_n(s), \quad s \in [x,t]$$

, que existe $s_o \in [x,t] \subseteq [a,b]$ tal que:

$$\begin{aligned} |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(t) - f_n(t)]| &\overset{\text{Teor. Valor Médio à } h}{=} |h'(s_o)(x-t)| \\ &= \underbrace{|f'_m(s_o) - f'_n(s_o)|}_{\overset{N_o \geq N_2, \text{ e } (2.50)}{<} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \underbrace{|x-t|}_{\leq b-a} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Logo se $m > n \geq N \geq N_o$ segue que

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_o) - f_n(x_o)] + [f_m(x_o) - f_n(x_o)]| \\ &\leq \underbrace{|[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_o) - f_n(x_o)]|}_{\overset{(3.51)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f_n(x_o) - f_m(x_o)|}_{\overset{(3.49)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$, ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções que é uniformente de Cauchy em $[a,b]$.

Logo segue, do Teorema (3.2.1), que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções uniformemente convergente para uma função $\underline{f}$ em $[a,b]$.

Para cada $x \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados, consideremos as funções ϕ, $\phi_n : [a,b] \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\phi_n(t) \doteq \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) \doteq \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad t \in [a,b] \setminus \{x\}. \tag{3.52}$$

Notemos qu,e para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é diferenciável em $[a,b]$ logo

$$\lim_{t \to x} \phi_n(t) = \lim_{t \to x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \overset{\text{Def. de derivada}}{=} f_n'(x). \tag{3.53}$$

Por outro, se $m > n \geq N_o$, teremos, para todo $t \in [a,b]$, que:

$$\begin{aligned}
|\phi_m(x) - \phi_n(x)| &= \left| \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} - \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \right| \\
&= \frac{1}{|t - x|} \left| [f_m(t) - f_m(x)] - [f_n(t) - f_n(x)] \right| \\
&= \frac{1}{|t - x|} \underbrace{\left| [f_m(t) - f_n(x)] - [f_m(t) - f_n(x)] \right|}_{\substack{\text{como em } (3.51) \\ < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (|t-x|}} \\
&< \frac{1}{|t - x|} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |t - x| = \frac{\varepsilon}{2(b-a)},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

ou seja, a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções que é uniforme de Cauchy em $[a,b] \setminus \{x\}$.

Logo segue, do Teorema (3.2.1), que a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções uniformemente convergente para uma função em $[a,b] \setminus \{x\}$.

Como $f_n \overset{u}{\to} f$ em $[a,b]$, segue, de (3.52), que $\phi_n \overset{u}{\to} \phi$ em $[a,b] \setminus \{x\}$.

Aplicando o Teorema (3.2.3) a sequência de funções $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ segue que, para cada $x \in [a,b]$ fixado, teremos:

$$f'(t) = \lim_{t \to x} \phi(t) \overset{L_n \doteq \lim_{t \to x} \phi_n(t) = f_n'(x)}{=} \lim_{n \to \infty} L_n \doteq \lim_{n \to \infty} f_n'(t),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ é diferenciável em $[a,b]$ e $f' = g$ em $[a,b]$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.10 *Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:*

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = g(x) = f'(x) = \left(\lim_{n \to \infty} f_n \right)'(x), \quad x \in [a,b].$$

Como consequência temos o

Corolário 3.2.3 *Sejam $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$, $g : [a,b] \to A$ uma função e, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f_n : [a,b] \to A$ que vamos supor ser diferenciável em $[a,b]$.*

Suponhamos que a séria numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ seja convergente em A e a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ seja uniformemente convergente para a função g em $[a,b]$.

Então a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformente para uma função $\underline{f}$, onde a função $f : [a,b] \to A$ é diferenciável em $[a,b]$ e

$$f'(x) = g(x), \quad x \in [a,b].$$

Demonstração:

Como a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_o)$ é convergente em A e a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente para uma função $\underline{g}$ em $[a,b]$, temos que a sequência numérica $(S_n(x_o))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em A e a sequência de funções $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente para uma $\underline{g}$ em $[a,b]$, onde, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos:

$$S_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_i(x), \quad x\in[a,b].$$

Como para cada $n\in\mathbb{N}$, a função $\underline{f_n}$ é diferenciável em $[a,b]$, segue que a função S_n também será diferenciável em $[a,b]$ (pois é soma finita de funções diferenciáveis em $[a,b]$).

Logo do resultado acima segue que a sequência de funções $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente para uma função $\underline{f}$, onde a função $f:[a,b]\to A$ é diferenciável em $[a,b]$ e

$$f'(x) = g(x), \quad x\in[a,b],$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.2.11 *Na situação acima a conclusão do resultado acima pode ser reescrita como:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) = g(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x\in[a,b].$$

A seguir exibiremos um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que **<u>não</u>** é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

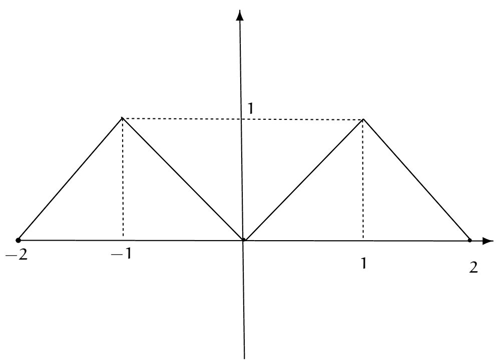
Teorema 3.2.8 *Existe uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que é contínua em $\mathbb{R}$ que **<u>não</u>** é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Consideremos a função $\phi:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) \doteq |t|, \quad t\in[-1,1] \quad \phi(x+2) = \phi(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

ou seja, a extensão 2-periódica da função módulo definida no intervalo $[-1,1]$ (veja figura abaixo)



Notemos que se $s, t \in [-1, 1]$ então

$$|\phi(s) - \phi(t)| = |\,|s| - |t|\,| \overset{\text{Des. triangular}}{\leq} |s - t|. \tag{3.55}$$

Como a função ϕ é 2-periódica segue que

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |s - t|. \tag{3.56}$$

vale para $s, t \in \mathbb{R}$.

De fato, notemos que:

1. se $|t - s| \leq 2$, existem $k \in \mathbb{Z}$ e $\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1]$ tais que

$$s \doteq \bar{s} + 2k \quad \text{e} \quad t = \bar{t} + 2k.$$

Com isto segue que

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |\phi(\bar{s}) - \phi(\bar{t})| \overset{\bar{s},\bar{t}\in[-1,1] \text{ e } (3.55)}{\leq} \leq |\underbrace{\bar{s}}_{=s-2k} - \underbrace{\bar{t}}_{=t-2k}| = |(s - 2k) - (t - 2k)| = |s - t|.$$

2. se $|t - s| > 2$, existem $k, m \in \mathbb{Z}$ e $\bar{s}, \bar{t} \in [-1, 1]$ tais que

$$s \doteq \bar{s} + 2k, \quad t = \bar{t} + 2m.$$

Logo

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq |\phi(\bar{s}) - \phi(\bar{t})| \overset{\bar{s},\bar{t}\in[-1,1] \text{ e } (3.55)}{\leq} |\bar{s} - \bar{t}| \leq 2 < |s - t|,$$

completando a demonstração de (3.56).

De (3.56) que a função ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ (na verdade uniformemente contínua em $\mathbb{R}$).

Podemos agora definir a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.57}$$

Notemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$ fixado teremos

$$\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right)\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{\left|\phi\left(4^n x\right)\right|}_{\leq 1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Como a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ é convergente (é uma série geométrica de razão $\dfrac{3}{4} < 1$) segue, do Teste M de Weierstrass, que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right)$ converge uniformemente para a função $\underline{f}$.

Observemos que também que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, definido-se a função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) \doteq \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi\left(4^n x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

segue que a mesma será contínua em $\mathbb{R}$.

Logo do Corolário (3.2.1) segue que a função $\underline{f}$ será uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Para finalizar, mostraremos que a função $\underline{f}$ **não** é diferenciável em nenhum $x \in \mathbb{R}$.

Para isto mostraremos que, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, podemos encontrar uma sequência numérica $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de modo que, quando $m \to \infty$, teremos

$$\delta_m \to 0 \quad \text{mas} \quad \left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| \to \infty,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ não é diferenciável em $x \in [a, b]$, ou seja, não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ escolhamos

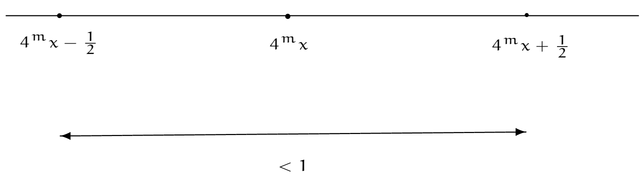
$$\delta_m \doteq \pm\frac{1}{2}4^{-m},$$

onde o sinal $\pm$ deverá ser escolhido de modo que não existe nenhum inteiro no intervalo aberto (veja figura abaixo):

$$(4^m x, \overbrace{4^m(x+\delta_m)}^{=4^m x + \frac{1}{2}}), \quad \text{para} \quad \delta_m > 0$$

ou no intervalo aberto

$$(\underbrace{4^m(x+\delta_m)}_{=4^m x - \frac{1}{2}}, 4^m x), \quad \text{para} \quad \delta_m < 0.$$



Podemos fazer a escolha acima pois se existir um interiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k \in \left(4^m x, 4^m x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (k-1) \in \left(4^m x - 1, 4^m x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (k-1) \notin \left(4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x\right).$$

De modo semelhante se $k \in \left(4^m x - \frac{1}{2}, 4^m x\right)$ mostra-se (semelhante ao caso acima) que $(k-1) \notin \left(4^m x, 4^m x + \frac{1}{2}\right)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados definamos

$$\gamma_{n,m} \doteq \frac{\phi\,[4^n(x+\delta_m)] - \phi\,(4^n x)}{\delta_m} = \frac{\phi\,(4^n x + 4^n\delta_m) - \phi\,(4^n x)}{\delta_m} \tag{3.58}$$

Notemos que se $n > m$ segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$4^n\delta_m = 2k$$

De fato, pois

$$|4^n\delta_m| = 4^n\left(\frac{1}{4^m}\frac{1}{2}\right) = \frac{4^{\overbrace{n-m}^{>0}}}{2} \qquad \text{é par!},$$

mostrando a afirmação acima (notemos também que caso contrário, isto é, se $0 \leq n \leq m$, tal número **não** será par).

Neste caso teremos

$$\phi\left(4^n x + \underbrace{4^n \delta_m}_{2k}\right) \overset{\phi \text{ é 2-periódica}}{=} \phi(4^n x),$$

implicando que se

$$n > m \quad \Rightarrow \quad \gamma_{n,m} = 0. \tag{3.59}$$

Por outro lado, se $0 \leq n \leq m$ teremos

$$\begin{aligned}
|\gamma_{n,m}| &= \left|\frac{\phi\left(4^n x + 4^n \delta_m\right) - \phi\left(4^n x\right)}{\delta_m}\right| = \frac{1}{|\delta_m|}\left|\phi\left(4^n x + 4^n \delta_m\right) - \phi\left(4^n x\right)\right| \\
&\overset{(3.56)}{\leq} \frac{1}{|\delta_m|}\left|(4^n x + 4^n \delta_m) - 4^n x\right| = \frac{1}{|\delta_m|} 4^n |\delta_m| = 4^n,
\end{aligned}$$

ou seja, se $0 \leq n \leq m$ teremos:

$$|\gamma_{n,m}| \leq 4^n. \tag{3.60}$$

Observemos também que, no caso acima $4^m \delta_m$ **não** será par, e existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
&t \doteq 4^m x + 4^m \delta_m,\ s \doteq 4^m x \in (2k, 2k+1), \quad \text{se} \quad 4^m \delta_m = \frac{1}{2} \\
&t \doteq 4^m x + 4^m \delta_m,\ s \doteq 4^m x \in (2k-1, 2k), \quad \text{se} \quad 4^m \delta_m = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

o que implicará em

$$\left|\phi\left(4^m x + \overbrace{4^m \delta_m}^{=\pm\frac{1}{2}}\right) - \phi\left(4^m x\right)\right| \overset{|\phi(t)-\phi(s)|=|t-s|}{=} \left|(4^m x + 4^m \delta_m) - 4^m x\right| = 4^m |\delta_m|.$$

Logo, se $0 \leq n \leq m$ teremos também:

$$|\gamma_{m,m}| = \left|\frac{\phi\left(4^m x + \overbrace{4^m \delta_m}^{=\pm\frac{1}{2}}\right) - \phi\left(4^m x\right)}{\delta_m}\right| \frac{1}{|\delta_m|} 4^m |\delta_m| = 4^m. \tag{3.61}$$

Portanto

$$\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| = \frac{1}{|\delta_m|}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \phi[4^n(x+\delta_m)] - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n(x)\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{\left(\frac{\phi[4^n(x+\delta_m)]-\phi(4^n(x)}{\delta_m}\right)}_{\overset{(3.58)}{=}\gamma_{n,m}}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n,m}\right| \overset{\gamma_n=0 \text{ se } n>m}{=} \left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n,m}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{3}{4}\right)^m \gamma_{m,m} + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n,m}\right| \geq \frac{3^m}{4^m}\underbrace{|\gamma_{m,m}|}_{\overset{(3.61)}{=}4^m} - \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n,m}\right|$$

$$= 3^m - \left|\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_{n,m}\right| \geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{|\gamma_{n,m}|}_{\overset{(3.60)}{\leq} 4^n}$$

$$\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{1-3^{m-1}}{1-3} = 3^m + \frac{1-3^m}{2}$$

$$= \underbrace{3^m - \frac{3^m}{2}}_{=\frac{3^m}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3^m+1) \geq \frac{3^m}{2}.$$

Portanto, quando $m \to \infty$ temos que $\delta_m = \pm\frac{1}{24^m} \to 0$ mas, $\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right| \to \infty$, mostrando que a função $\underline{f}$ não é diferenciável em $x \in \mathbb{R}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, completando a demonstração.

□

15.09.2011 - 12.a

3.3 Família de funções equicontínuas

A seguir introduziremos alguns conceitos que nos fornecerão condições suficientes para que a convergência pontual de uma sequência de funções implique na existência de uma subsequência que seja uniformemente convergente.

Para isto precisaremos, entre outras, da:

Definição 3.3.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n : E \to \mathbb{R}$ uma função.*

Diremos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **pontualmente limitada em E** *se existir uma função $\phi : E \to [0,\infty)$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq \phi(x), \quad x \in E. \tag{3.62}$$

Diremos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **uniformente limitada em E** *se existir $M \geq 0$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in E. \tag{3.63}$$

Observação 3.3.1 *Na situação aicma, uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é pontualmente limitada erá uniformemente limitada se a função ϕ for limitada em E.*

Com isto temos a:

Proposição 3.3.1 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n : E \to \mathbb{R}$ uma função.*

Suponhamos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é pontualmente limitada em E e que $E_1 \subseteq E$ é um subconjunto enumerável.

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é pontualmente convergente em E_1.

<u>**Demonstração:**</u>

Seja

$$E_1 \doteq \{x_1, x_2, \cdots\} \subseteq E.$$

Por hipótese temos que a sequência numérica $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}$.

Logo, do curso de Análise I, segue que existe uma subsequência $\left(f_{n_{k_1}}(x_1)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$ da sequência numérica $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ que será convergente para a_1 em $\mathbb{R}$.

Mas a sequência numérica $\left(f_{n_{k_1}}(x_2)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$ também é limitada em $\mathbb{R}$, logo pelo mesmo motivo acima, existirá uma subsequência $\left(f_{n_{k_2}}(x_2)\right)_{n_{k_2}\in\mathbb{N}}$ da sequência numérica $\left(f_{n_{k_1}}(x_1)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$ que será convergente a_2 em $\mathbb{R}$.

Notemos que

$$\begin{aligned} f_{n_{k_2}}(x_1) &\to a_1, \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty, \\ f_{n_{k_2}}(x_2) &\to a_2, \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty, \end{aligned}$$

Prosseguindo no processo acima, encontramos uma subsequência $\left(f_{n_{k_j}}\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ teremos que a sequência numérica $\left(f_{n_{k_j}}(x_i)\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$ que será convergente para a_i em $\mathbb{R}$, mostrando que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é pontualmente convergente em E_1, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.3.2 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto e para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $f_n : K \to \mathbb{R}$ uma função contínua em K.*

*Notemos que mesmo que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uniformemente limitada em K, pode <u>**não**</u> existir uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convegindo pontualmente para alguma função definida em K, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 3.3.1 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos a função $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f_n(x) \doteq \operatorname{sen}(nx), \quad x \in [0, 2\pi].$$

*Afirmamos que <u>**não exite**</u> uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convegindo pontualmente para alguma função em $[0, 2\pi]$.*

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que neste caso o compacto $K \doteq [0, 2\pi]$.

Suponhamos, por absurdo, que exite uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convegindo pontualmente para alguma função $\underline{f}$ definida $[0, 2\pi]$.

Neste caso teremos

$$\lim_{k\to\infty}\left[f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right] = \lim_{k\to\infty}[\operatorname{sen}(n_k x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}x)] = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}[\operatorname{sen}(n_k x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}x)]^2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{3.64}$$

Mas

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}[\operatorname{sen}(n_k x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}x)]^2\, dx \overset{\text{Exercício}}{=} \int_0^{2\pi}\lim_{k\to\infty}[\operatorname{sen}(n_k x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}x)]^2\, dx$$
$$= 0. \tag{3.65}$$

Por outro lado, observemos que:

$$\int_0^{2\pi}[\operatorname{sen}(n_k x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}x)]^2\, dx = \int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}^2(n_k x) - 2\operatorname{sen}(n_k x)\operatorname{sen}(n_{k+1}x) + \operatorname{sen}^2(n_{k+1}x)\right] dx.$$

Mas

$$\int \operatorname{sen}^2(n_k x)\, dx \overset{u \doteq n_k x \Rightarrow du = n_k\, dx}{=} \int \operatorname{sen}^2(u)\frac{1}{n_k}\, du \overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2n_k}\left[u - \frac{\operatorname{sen}(2u)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2n_k}\left[n_k x - \frac{\operatorname{sen}(2n_k x)}{2}\right],$$

logo

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(n_k x)\, dx = \frac{1}{2n_k}\left[n_k x - \frac{\operatorname{sen}(2n_k x)}{2}\right]\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \frac{n_k 2\pi}{2n_k} = \pi.$$

De modo semelhante teremos

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(n_{k+1}x)\, dx \overset{\text{Exercício}}{=} \pi.$$

Finalmente

$$\int \operatorname{sen}(n_k x)\operatorname{sen}(n_{k+1}x)\, dx \overset{\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{\cos(a-b)\cos(a+b)}{2}}{=} \int \frac{1}{2}[\cos(n_k x - n_{k+1}x) - \cos(n_k x + n_{k+1}x)]\, dx$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(n_k x - n_{k+1}x)}{n_k - n_{k+1}} - \frac{\operatorname{sen}(n_k x + n_{k+1}x)}{n_k + n_{k+1}}\right],$$

assim

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(n_k x)\operatorname{sen}(n_{k+1}x)\, dx = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^{2\pi}[\operatorname{sen}(n_k x) - \operatorname{sen}(n_{k+1}x)]^2\, dx = 2\pi \neq 0,$$

contrariando (3.65), o que nos mostra que não poderá existir uma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convegindo pontualmente para alguma função $\underline{f}$ definida $[0, 2\pi]$.

Observação 3.3.3 *Uma outra questão importante é saber se uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que é pontualmente convergente, pode conter uma subsequência que seja uniformemente convergente.*

*O próximo exemplo mostra que isto, em geral, pode **não** ocorrer, mesmo que a convergência pontual da sequência de funções seja em um compacto.*

Exemplo 3.3.2 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f_n(x) \doteq \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Afirmamos que **não exite** *uma subsequência da sequência de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convegindo uniformemente para alguma função em* $[0, 1]$.

Demonstração:

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos:

$$x^2 + (1 - nx)^2 \geq x^2 \quad \text{e} \quad x^2 + (1 - nx)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{1}{n},$$

logo $x^2 + (1 - nx)^2 \neq 0$ assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n está bem definida.

Além disso

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \overset{x^2+(1-nx)^2 \geq x^2}{\leq} 1, \quad x \in [0, 1],$$

ou seja, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $[0, 1]$.

Como

$$x^2 + (1 - nx)^2 \to \infty \text{ quando } n \to \infty,$$

segue

$$f_n \to 0, \quad \text{pontualmente em } [0, 1].$$

Por outro lado

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left[1 - n\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2} = 1. \tag{3.66}$$

Portanto nenhuma subsequência da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poderá convergir uniformemente para alguma função em $[0, 1]$, caso contrário se $f_n \overset{u}{\to} 0$ em $[0, 1]$ deveríamos, em particular, ter:

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f_n\left(\frac{1}{n}\right)}_{\overset{(3.66)}{=} 1} \to 0,$$

. o que seria um absurdo.

Vamos agora introduzir a

Definição 3.3.2 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $E \subseteq X$ *e* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Uma família $\mathfrak{F}$ *formada por funções* $f : E \to A$ *será dita* **equicontínua em** E *se dado* $\varepsilon > 0$ *podemos encontrar* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que se*

$$x, y \in E \text{ tal que } d(x, y) < \delta, \quad \text{devemos ter } |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \text{para toda } f \in \mathfrak{F}. \tag{3.67}$$

Observação 3.3.4 *Notemos que se a família* $\mathfrak{F}$ *é equicontínua em* E *e* $f \in \mathfrak{F}$ *então a função* f *será uniformemente contínua em* E.

Com isto temos o

Teorema 3.3.1 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $E \subseteq X$ *subconjunto enumerável e* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$.

Consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções definidas em* E *tomando valores em* A, *que é pontualmente limitada em* E.

Então a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência que converge pontualmente em* E.

Demonstração:

Seja

$$E \doteq \{x_1, x_2, \cdots\} \subseteq X.$$

Como a sequência numérica $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em A, segue que existe uma subsequência $\left(f_{n_{k_1}}(x_1)\right)_{n_{k_1}\in\mathbb{N}}$ convegente para a_1 em A.

Notemos que a sequência numérica $\left(f_{n_{k_1}}(x_2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em A, logo existe uma subsequência $\left(f_{n_{k_2}}(x_2)\right)_{n_{k_2}\in\mathbb{N}}$ convegente para a_2 em A.

Com isto teremos que

$$\begin{aligned} f_{n_{k_2}}(x_1) &\to a_1, \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty, \\ f_{n_{k_2}}(x_2) &\to a_2, \quad \text{quando} \quad n_{k_2} \to \infty, \end{aligned}$$

Prosseguindo no processo acima, encontramos uma subsequência $\left(f_{n_{k_j}}\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ teremos que a sequência numérica $\left(f_{n_{k_j}}(x_i)\right)_{n_{k_j}\in\mathbb{N}}$ que será convergente para a_i em $\mathbb{R}$, mostrando que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k k\in\mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é pontualmente convergente para cada $x \in E$, completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora enunciar e demonstrar o

Teorema 3.3.2 *Sejam* (X, d) *um espaço métrico,* $K \subseteq X$ *subconjunto compacto,* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$ *e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos* $f, f_n \in C(K; A)$.

Suponhamos que a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência uniformemente convergente para a função* $\underline{f}$ *em* K.

Então a família $\mathfrak{F} \doteq \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ *será uma família equicontínua em* K.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$, como $f_n \xrightarrow{u} f$ em K então existe $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n \geq N_o \quad \text{deveremos ter} \quad \|f_n - f_{N_o}\| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.68}$$

onde

$$\|g\| \doteq \sup_{x\in K} |g(x)|.$$

Como a função f_{N_o} é contínua em K, que é compacto em (X, d), segue que a função f_{N_o} será uniformemente contínua em K (visto em Análise I), ou seja, podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal quese

$$x, y \in K, \quad \text{satisfaz } d(x, y) < \delta, \qquad \text{segue que} \quad |f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.69}$$

Logo, se $n \geq N_o$ e $x, y \in K$ são tais que $d(x, y) < \delta$, teremos

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &= |f_n(x) - f_n(y) - f_{N_o}(x) + f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y) + f_{N_o}(y)| \\
&\leq |f_n(x) - f_{N_o}(x)| + |f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y)| + |f_{N_o}(y) - f_n(y)| \\
&\leq \underbrace{\|f_n - f_{N_o}\|}_{\overset{(3.68)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_o}(x) - f_{N_o}(y)|}_{\overset{(3.69)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_{N_o} - f_n\|}_{\overset{(3.68)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

mostrando que a família $\mathfrak{F}$ é equicontínua em K, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 3.3.5 *Para o resultado que vem a seguir precisaremos da caracterização de conjunto compacto em um espaço métrico* (X, d) *que é a seguinte:*

Diremos que um subconjunto K *de um espaço métrico* (X, d) *é* **compacto em** X *se para toda família* $\{O_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$*, onde para cada* $\lambda \in \Lambda$ *temos que* O_λ *é um subconjunto aberto de* (X, d)*, satisfazendo* $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$*, podemos encontrar* $i_1, \cdots, i_N \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} O_{i_j},$$

ou seja, toda cobertura aberta de K *possui uma subcobertura finita, que ainda cobre* K.

Podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte importante resultado, conhecido como **Teorema de Árzela-Áscoli**:

Teorema 3.3.3 *Sejam* $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$, (X, d) *um espaço métrico,* $K \subseteq X$ *um subconjuto compacto e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenhamos* $f_n \in C(K; A)$.

Suponhamos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é pontualmente limitada e equicontínua em* K.

Então:

1. *a sequência de funções* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é uniformente limitada em* K*;*

2. *a sequência de funções* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *possui uma subsequência que é uniformemente convergente em* K.

Demonstração:

De 1.:

Dado $\varepsilon > 0$, como a família $\mathfrak{F} \doteq \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua em K segue que existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$x, y \in K \text{ tal que } \ d(x, y) < \delta, \qquad \text{devemos ter: } \ |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.70}$$

Para $a \in X$ e $r > 0$, denotaremos por $B(a; r)$ a bola aberta de centro em $\underline{a}$ e raio $\underline{r}$ em (X, d), ou seja:

$$B(a; r) \doteq \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

Como $K \subseteq X$ é um subconjunto compacto de (X, d) e

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x; \delta), \quad \text{segue que existirão } p_1, \cdots, p_{N_o} \in K \text{ tais que:} \quad K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_o} B(p_i; \delta). \tag{3.71}$$

Por outro lado, como a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é pontualmente limitada em K, segue que, para cada $i \in \{1, \cdots, N_o\}$, existe $M_i > 0$ tal que

$$|f_n(p_i)| < M_i, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.72}$$

Seja

$$M \doteq \max\{M_i\,;\, i = 1, \cdots, N_o\}.$$

Notemos que para $x \in K$, de (3.71), segue que existe $i_o \in \{1, \cdots, N_o\}$ tal que

$$x \in B(p_{i_o}; \delta), \tag{3.73}$$

assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(p_{i_o}) + f_n(p_{i_o})| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(p_{i_o})|}_{d(x,p_{i_o}) \overset{(3.73)}{<} \delta \text{ logo } (3.70) \; \underset{<}{} \; \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(p_{i_o})|}_{\overset{(3.72)}{\leq} M_{i_o} \leq M}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + M,$$

mostrando que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em K, completando a demonstração de 1. .

20.09.2011 - 13.a

De 2.:

Para demonstrarmos 2., notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$ temos que:

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B\left(x; \frac{1}{m}\right)$$

e assim, da compacidade do conjunto K, para cada $m \in \mathbb{N}$, segue que existirão $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m} \in K$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{i_m=1}^{N_m} B\left(x_{i_m}; \frac{1}{m}\right).$$

Consideremos

$$E \doteq \{x_{i_m} : m \in \mathbb{N}\} \subseteq K.$$

Deste modo segue que E será uma subconjunto enumerável e denso em K (ou seja, $\overline{E} = K$).

De fato, pois se $x \in K$, dado $\eta > 0$, podemos escolher $m_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_o} < \eta.$$

Assim

$$x \in K \subseteq \bigcup_{i_m=1}^{N_m} B\left(x_{i_m}; \frac{1}{m}\right),$$

o que implicará que $x \in B\left(i_{m_o}\,;\,\dfrac{1}{m_o}\right)$, para algum $i_{m_o} \in \{1, \cdots, N_m\}$, ou seja,

$$d(x, x_{i_{m_o}}) < \frac{1}{m_o} < \eta,$$

logo, $x \in \overline{E}$.

Logo, do Teorema (3.3.1), segue que existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge pontualmente em E, ou seja, a sequência numérica $(f_{n_k}(x))_{n_k \in \mathbb{N}}$ converge em A, para cada $x \in E$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos a função $g_k : K \to A$ dada por

$$g_k(x) \doteq f_{n_k}(x), \quad x \in K.$$

Afirmamos que a sequência de funções $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformente em K, o que completará a demonstração de 2. (pois a sequência $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é a subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$).

De fato, sem perda de generalidade podemos escrever

$$E \doteq \{x_j : j \in \mathbb{N}\}.$$

Consideremos $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ como em (3.70) (obtido do fato que a família $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua).

Notemos que se $x \in K$, como $\overline{E} = K$, temos que $x \in B(x_{j_x}\,;\,\delta)$ para algum $j_x \in \mathbb{N}$, assim

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x\,;\,\delta) \overset{\overline{E}=K}{\subseteq} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B(x_j\,;\,\delta),$$

e como K é compacto em (X, d) segue que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k\,;\,\delta),$$

renomeando, se necessário, os elementos do conjunto E.

Para cada $j \in \{1, \cdots, N\}$, como a sequência numérica $(g_k(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em A, segue que ela será uma sequência numérica de Cauchy, logo exitirá $N_j = N_j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$i, k \geq N_j \quad \text{então} \quad |g_i(x_j) - g_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, se

$$\overline{N} \doteq \max\{N_j\,;\, j = 1, \cdots, N\} \in \mathbb{N},$$

da desigualdade acima, teremos

$$i, k \geq \overline{N}, \quad \text{implicará} \quad |g_i(x_j) - g_k(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, \cdots, N\}. \tag{3.74}$$

Logo se $x \in K$ teremos que $x \in B(x_{j_o}, \delta)$, para algum $j_o \in \{1, \cdots, N\}$, assim segue que

$$d(x, x_{j_o}) < \delta \quad \text{e, por (3.70), segue} \quad |\underbrace{g_i(x)}_{f_{n_i}(x)} - \underbrace{g_i(x)}_{f_{n_i}(x_{j_o})}| = |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_{j_o})| \overset{(3.70))}{<} \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.75}$$

Portanto se $i, k \geq \overline{N}$ teremos

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_k(x)| &= |[g_i(x) - g_k(x)] + [g_i(x_{j_o}) - g_i(x_{j_o})] + [g_k(x_{i_o}) - g_k(x_{i_o})]]| \\ &\leq \underbrace{|g_i(x) - g_i(x_{j_o})|}_{\overset{d(x,x_{j_o})<\delta \text{ e } (3.75)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_i(x_{j_o}) - g_k(x_{i_o})|}_{\overset{i,k \geq \overline{N} \text{ e } (3.74)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_k(x_{i_o}) - g_k(x)|}_{\overset{d(x,x_{j_o})<\delta \text{ e } (3.75)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uniformemente de Cauchy em K.

Logo do Teorema (3.2.1) (na verdade do item 2. da Observação (3.2.2)) segue que a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será uniformemente convergente em K, ou seja, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente em K, completando a demonstração do item 2. e portanto do resultado.

□

3.4 O teorema de Stone-Weierstrass

O **Teorema de Stone-Weierstrass** nos diz que o conjunto formado pelos polinômios com coeficientes complexos é denso nas funções contínuas definidas em um intervalo fechado e limitado a valores complexos, com a métrica da convergência uniforme, mais especificamente:

Teorema 3.4.1 *Seja* $f \in C([a, b]; \mathbb{C})$.

Então existe uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que*

$$p_n \xrightarrow{u} f, \quad \textit{em} \quad [a, b].$$

Se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ *então a sequência* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *pode ser escolhida com coeficientes reais.*

Demonstração:

Começaremos mostrando as seguintes afirmações:

1. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$[a, b] = [0, 1].$$

De fato, suponhamos que para $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ exista uma sequência $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g, \quad \text{em} \quad [0, 1].$$

Se $f \in C([a, b]; \mathbb{C})$ consideremos a função $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ dada por:

$$g(x) \doteq f[a + x(b - a)], \quad x \in [0, 1]. \tag{3.76}$$

Com isto teremos que $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$, logo existirá uma sequência $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \xrightarrow{u} g, \quad \text{em} \quad [0, 1].$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considerando-se a função $p_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ dada por

$$p_n(x) \doteq q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \quad x \in [a, b],$$

segue que a função p_n será uma função polinomial definida em $[a, b]$.

Com isto teremos que

$$p_n(x) = q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \overset{n\to\infty}{\to} g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \overset{(3.76)}{=} f\left[a + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)(b-a)\right] = f(x), \quad x \in [a, b],$$

ou seja,

$$p_n \overset{u}{\to} f, \quad \text{em} \quad [a, b],$$

mostrando que a afirmação 1. é verdadeira.

2. Também podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$f(0) = f(1) = 0.$$

De fato, suponhamos que para $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ satisfazendo

$$g(0) = g(1) = 0,$$

exista uma sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \overset{u}{\to} g, \quad \text{em} \quad [0, 1].$$

Dada $f \in C([0, 1]; \mathbb{C})$, se considerarmos a função $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(x) \doteq f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)], \quad x \in [0, 1],$$

segue que $g \in C([0, 1]; \mathbb{C})$ e além disso

$$g(0) = f(0) - f(0) - 0.[f(1) - f(0)] = 0,$$
$$g(1) = f(1) - f(0) - 1.[f(1) - f(0)] = 0.$$

Notemos que, neste caso, teremos:

$$f(x) = g(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)], \quad x \in [0, 1]. \tag{3.77}$$

Logo se existir uma sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formada por polinômios (com coeficientes complexos) de modo que

$$q_n \overset{u}{\to} g, \quad \text{em} \quad [0, 1],$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, considerando-se a função $p_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$ (que será uma função polinomial) dada por

$$p_n(x) \doteq q_n(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)], \quad x \in [0, 1],$$

teremos

$$p_n(x) \doteq q_n(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)] \overset{n\to\infty}{\to} g(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)] \overset{(3.77))}{=} f(x), \quad x \in [0, 1],$$

ou seja,

$$p_n \overset{u}{\to} f, \quad \text{em} \quad [0, 1],$$

mostrando que a afirmação 2. é verdadeira.

Resumindo as duas afirmações acima: sem perda de generalidade, podemos supor que $f \in C([0,1];\mathbb{C})$ satisfaz

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Com isto, podemos estender a função $\underline{f}$, continuamente, à reta toda, do seguinte modo (indicaremos a extensão da mesma também por $\underline{f}$):

$$f(x) \doteq \begin{cases} f(x), & x \in [0,1] \\ 0, & x \in [0,1]^c \doteq (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}.$$

Com isto a função $\underline{f}$ será uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos a função $q_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$q_n \doteq c_n (1 - x^2)^n, \quad x \in [-1, 1],$$

onde $c_n \in (0, \infty)$ é tal que

$$\int_{-1}^{1} q_n(x)\, dx = 1. \tag{3.78}$$

Notemos também que para $x \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, pelo Binômio de Newton temos:

$$\begin{aligned}(1-x^2)^n &\overset{\text{Bin. Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} (-1)^k x^{2k} \\ &= 1 - nx^2 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} (-1)^k x^{2k}}_{\geq 0} \geq 1 - nx^2. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Por outro lado, observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx &\overset{(1-x^2)^n \text{ é par}}{=} 2\int_0^1 \underbrace{(1-x^2)^n}_{\geq 0}\, dx \overset{\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1}{\geq} 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n\, dx \overset{(3.79)}{\geq} 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - nx^2)\, dx \\ &= 2\left(x - n\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \underbrace{\frac{n}{3n^{\frac{3}{2}}}}_{=\frac{1}{3n^{\frac{1}{2}}}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned} \tag{3.80}$$

o que implicará em

$$c_n \doteq \frac{1}{\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx} < \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $0 < \delta < 1$ e

$$\delta \leq |x| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \delta^2 \leq x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 \leq 1 - \delta^2 \leq (1 - \delta^2)$$

assim, se

$$\delta \leq |x| \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq q_n(x) = \underbrace{c_n}_{<\sqrt{n}} \underbrace{(1-x^2)}_{\leq 1-\delta^2}{}^n < \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n. \tag{3.81}$$

Mas

$$\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n = n^{\frac{1}{2}}(1-\delta^2)^n = \left(n^{\frac{1}{2n}}(1-\delta^2)^n\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0, \tag{3.82}$$

pois

$$n^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{1}{2n}\ln(n)} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \quad \text{e} \quad (1-\delta^2)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad (\text{pois } 0<\delta<1).$$

Logo, de (3.82) e (3.81), segue que

$$q_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{para} \quad \delta \le |x| \le 1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considermos a função $p_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por

$$p_n(x) \doteq \int_{-1}^{1} f(x+t)q_n(t)\,dt, \quad x \in [0,1].$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções $\underline{f}$ e q_n são funções contínuas em $[-1,1]$ segue que a função p_n está bem definida.

Notemos que para cada $x \in [0,1]$, como $f = 0$ em $(-\infty,0] \cup [1,\infty)$, segue que para

$$t \in [-1,-x] \;\Rightarrow\; t+x \in [x-1,0] \subseteq (-\infty,0] \;\Rightarrow\; f(x+t)=0 \tag{3.83}$$
$$t \in [1-x,1] \;\Rightarrow\; t+x \in [1,1+x] \subseteq [1,\infty) \;\Rightarrow\; f(x+t)=0. \tag{3.84}$$

Logo

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \int_{-1}^{1} f(x+t)q_n(t)\,dt \\ &= \underbrace{\int_{-1}^{-x} f(x+t)q_n(t)\,dt}_{\overset{(3.83)}{=}0} + \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t)\,dt + \underbrace{\int_{1-x}^{1} f(x+t)q_n(t)\,dt}_{\overset{(3.84)}{=}0} \\ &= \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t)\,dt \overset{\left(\begin{array}{c} u \doteq x+t \;\Rightarrow\; du = dt \\ t=-x \;\Rightarrow\; u=0 \\ t=1-x \;\Rightarrow\; u=1 \end{array}\right)}{=} \int_0^1 f(u)q_n(u-x)\,du. \end{aligned}$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o lado direito da igualdade acima é um polinômio na variável $\underline{x}$, ou seja, a sequência de funções $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções polinomiais (que serão reais se a função $\underline{f}$ for real).

Dado $\varepsilon > 0$, como a função $\underline{f}$ é uniformemente contínua, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$|y-x| < \delta \quad \text{teremos} \quad |f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.85}$$

Seja

$$M \doteq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \left(= \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right). \tag{3.86}$$

Com isto teremos, para cada $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, que:

$$
\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} f(x+t) q_n(t)\, dt - f(x) \underbrace{\int_{-1}^{1} q_n(t)\, dt}_{\overset{(3.78)}{=} 1} \right| \\
&= \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)] q_n(t)\, dt \right| \leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| \underbrace{q_n(t)}_{\geq 0}\, dt \\
&= \int_{-1}^{-\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\overset{(3.86)}{\leq} 2M} q_n(t)\, dt + \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\overset{(3.85)}{<} \frac{\varepsilon}{2} \text{ pois } |(x+t)-x| = |t| < \delta} q_n(t)\, dt \\
&\quad + \int_{\delta}^{1} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\overset{(3.86)}{\leq} 2M} q_n(t)\, dt \\
&< 2M \left(\int_{-1}^{-\delta} \underbrace{q_n(t)}_{\overset{(3.81)}{\leq} \sqrt{n}(1-\delta^2)^n} dt + \int_{\delta}^{1} \underbrace{q_n(t)}_{\overset{(3.81)}{\leq} \sqrt{n}(1-\delta^2)^n} dt \right) + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)\, dt}_{\leq \int_{-1}^{1} q_n(t)\, dt \overset{(3.78)}{=} 1} \\
&\leq 2M \left[2\sqrt{n}(1-\delta^2)^n \right] \underbrace{\delta}_{<1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{\text{de (3.82), existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que se } n \geq N \text{ segue que}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

mostrando que

$$p_n \xrightarrow{u} f \quad \text{em} \quad [0,1],$$

completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o

Corolário 3.4.1 *Para cada $a > 0$ fixado, consideremos a função $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) \doteq |x|, \quad x \in [-a, a].$$

Então existe uma sequência de funções polinomiais $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$p_n(0) = 0$$

e

$$p_n \xrightarrow{u} f \quad \textit{em} \quad [-a, a].$$

Demonstração:

Como $f \in C([-a,a];\mathbb{R})$ segue do Teorema de Stone-Weierstrass que existe uma sequência de funções polinomiais $(p_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$p_n^* \xrightarrow{u} f \quad \text{em} \quad [-a, a]. \tag{3.87}$$

Em particular, teremos

$$p_n^*(0) \overset{n\to\infty}{\to} f(0) = 0. \tag{3.88}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_n(x) \doteq p_n^*(x) - p_n^*(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

De (3.87) e (3.88) segue que

$$p_n = \underbrace{p_n^*}_{\overset{u}{\to} f} - \underbrace{p_n^*(0)}_{\to 0} \overset{u}{\to} f \quad \text{em} \quad [-a, a]$$

e

$$p_n(0) = p_n^*(0) - p_n^*(0) = 0,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Temos a

Definição 3.4.1 *Seja* $E \subseteq \mathbb{R}$.

Diremos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E;\mathbb{C}) \doteq \{f\,;\, f : E \to \mathbb{C}$ *é função* $\}$ *é uma* <u>**álgebra**</u> *em* $\mathcal{F}(E;\mathbb{C})$ *se:*

(i) se $f, g \in \mathcal{A}$ *então* $f + g \in \mathcal{A}$;

(ii) se $f, g \in \mathcal{A}$ *então* $f.g \in \mathcal{A}$;

(iii) se $c \in \mathbb{C}$ *e* $f \in \mathcal{A}$ *então* $cf \in \mathcal{A}$.

Se as funções consideradas forem a valores reais no item (iii) consideraremos apenas $c \in \mathbb{R}$.

Na situação acima, podemos introduzir a:

Definição 3.4.2 *Diremos que uma álgebra* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E;\mathbb{C})$ *é* <u>**uniformemente fechada**</u> *se dada uma sequência* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{A}$ *tal que* $f_n \overset{u}{\to} f$ *em* E *implicar* $f \in \mathcal{A}$.

Observação 3.4.1 *O conjunto* $\mathcal{B}$ *formado por todas as funções de* $\mathcal{F}(E;\mathbb{C})$ *que são limites uniformes de sequências de funções* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{A}$ *será dito* <u>**fecho uniforme de $\mathcal{A}$**</u>, *e será indicado por* $\overline{\mathcal{A}}$.

Como exemplo temos o

Exemplo 3.4.1 *Sejam* $E \doteq [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *e*

$$\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ é função polinomial}\}.$$

Então $\mathcal{A}$ *é uma álgebra em* $C([a, b];\mathbb{R})$ *(deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato) e o Teorema de Stone-Weierstrass garante que*

$$\overline{\mathcal{A}} = C([a, b];\mathbb{R}).$$

Para o próximo resultado precisaremos do seguinte exercício (cuja resolução será deixada par o leitor):

Exercício 3.4.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$ *e*

$$\mathcal{A} \doteq \{f\,;\, f : E \to \mathbb{C} \text{ é função limitada}\}.$$

Mostre que $\mathcal{A}$ *é uma álgebra em* $\mathcal{F}(E;\mathbb{C})$.

Com isto temos o

Teorema 3.4.2 *Consideremos* E *e* $\mathcal{A}$ *como no Exercício acima e consideremos*

$$\mathcal{B} \doteq \overline{\mathcal{A}}.$$

Então $\mathcal{B}$ *é uma álgebra uniformemente fechada.*

Demonstração:

Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma álgebra.
Para isto:

1. se $f, g \in \mathcal{B}$ segue que existem sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tais que
$$f_n \overset{u}{\to} f \quad \text{e} \quad g_n \overset{u}{\to} g. \tag{3.89}$$
Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ então $f_n + g_n \in \mathcal{A}$.
Além disso, de (3.89), segue que
$$f_n + g_n \overset{u}{\to} f + g,$$
ou seja, $f + g \in \mathcal{B}$.

2. De modo semelhante, se $c \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{B}$ segue que existe sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tal que
$$f_n \overset{u}{\to} f. \tag{3.90}$$
Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $cf_n \in \mathcal{A}$ então $cf_n \in \mathcal{A}$.
Além disso, de (3.90), segue que
$$cf_n \overset{u}{\to} cf,$$
ou seja, $cf \in \mathcal{B}$

3. se $f, g \in \mathcal{B}$ segue que existem sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tais que
$$f_n \overset{u}{\to} f \quad \text{e} \quad g_n \overset{u}{\to} g. \tag{3.91}$$
Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ então $f_n.g_n \in \mathcal{A}$.
Além disso, de (3.91), segue que
$$f_n.g_n \overset{u}{\to} f.g.$$
De fato, pois, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos
$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |[f_n(x)g_n(x) - f(x).g(x)] + [f_n(x)g(x) - f_n(x).g(x)]| \\ &\leq |f_n(x)[g_n(x) - g(x)] + [f_n(x) - f(x)]g(x)| \\ &\leq \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq N} |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)| \underbrace{|g(x)|}_{\leq M} \to 0 \end{aligned}$$
quando $n \to \infty$, para todo $x \in E$,

ou seja,

$$f_n.g_n \xrightarrow{u} f.g,$$

ou ainda, $f.g \in \mathcal{B}$,

mostrando que $\mathcal{B}$ é uma álgebra.

Assim, por construção, $\mathcal{B}$ é uma álgebra uniformemente fechada.

□

Nosso objetido, no que segue, é estender o Teorema de Stone-Weierstrass.

Para isto precisaremos introduzir alguns conceitos, entre eles, a:

Definição 3.4.3 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$ *e* $\mathcal{F}(E;A) \doteq \{f\,;\, f : E \to A$ *é função*$\}$.

Diremos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}(E;A)$ *é uma família que* **separa pontos de** E *se para cada* $x_1, x_2 \in E$ *com*

$$x_1 \neq x_2 \quad \textit{existe} \quad f \in \mathcal{A}, \quad \textit{tal que} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Por outro lado, diremos que a família $\mathcal{A}$ **não se anula em nenhum ponto de** E *se para cada* $x_o \in E$,

$$\textit{existe} \quad g \in \mathcal{A}, \quad \textit{tal que} \quad g(x_o) \neq 0.$$

Como exemplo destes dois tipos de famílias temos o:

Exemplo 3.4.2 *Seja* $\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é função polinomial*$\} \subseteq \mathcal{F}(E;A)$.

Então $\mathcal{A}$ *é uma álgebra que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de* $\mathbb{R}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E;A)$.

Notemos que se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \neq x_2$ então considerando-se a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou seja, $p \in \mathcal{A}$) dada por

$$p(t) \doteq t, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que

$$p(x_1) = x_1 \neq x_2 = p(x_2),$$

mostrando que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E;A)$ que separa pontos de $\mathbb{R}$.

Notemos que para $x_o \in \mathbb{R}$ temos as seguintes possibilidades:

(i) se $x_o \neq 0$, considerando-se a função polinomial $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou seja, $q \in \mathcal{A}$) dada por

$$q(t) \doteq t - \frac{x_o}{2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que

$$q(x_o) = x_o - \frac{x_o}{2} = \frac{x_o}{2} \neq 0$$

(ii) se $x_o = 0$, considerando-se a função polinomial $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou seja, $q \in \mathcal{A}$) dada por

$$q(t) \doteq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que

$$q(x_o) = 1 \neq 0,$$

ou seja, (i) e (ii) mostram que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E;A)$ que não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.4.3 *Seja*

$$\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é função polinomial par}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$$

(ou seja, se $p \in \mathcal{A}$ *deveremos ter* $p(-t) = p(t)$, $t \in \mathbb{R}$*).*

Então $\mathcal{A}$ *é uma álgebra em* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *que* **não** *separa pontos de* $\mathbb{R}$ *que não se anula em nenhum ponto de* $\mathbb{R}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Notemos que se $x_1 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq 0$ teremos que $x_1 \neq x_2 \doteq -x_1$ e para todo $p \in \mathcal{A}$, como a função $\underline{p}$ é uma função par segue que

$$p(x_2) = p(-x_1) \overset{\text{p é função par}}{=} p(x_1),$$

mostrando que a álgebra $\mathcal{A}$ **não** em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ separa pontos de $\mathbb{R}$.

Notemos que para $x_o \in \mathbb{R}$, considerando-se a função polinomial $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou seja, $q \in \mathcal{A}$) dada por

$$q(t) \doteq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que $q \in \mathcal{A}$ e

$$q(x_o) = 1 \neq 0,$$

ou seja, a álgebra $\mathcal{A}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ que não se anula em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

Observação 3.4.2 *Notemos que se*

$$\mathcal{A} \doteq \{p\,;\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é função polinomial ímpar}\}$$

(ou seja, se $p \in \mathcal{A}$ *deveremos ter* $p(-t) = -p(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *então* $\mathcal{A}$ *é* **não** *é uma álgebra em* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *(pois produto de duas funções ímpares é uma função par).*

Com isto temos o:

Proposição 3.4.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$ *ou* $A = \mathbb{C}$ *e* $\mathcal{A}$ *uma álgebra em* $\mathcal{F}(E;A)$ *que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de* E.

Consideremos $x_1, x_2 \in E$ *tais que* $x_1 \neq x_2$ *e* $c_1, c_2 \in A$.

Então existe $f \in \mathcal{A}$ *tal que*

$$f(x_1) = c_1 \quad e \quad f(x_2) = c_2. \tag{3.92}$$

Demonstração:

□

Como $x_1 \neq x_2$ e a álgebra $\mathcal{A}$ em $\mathcal{F}(E;A)$ que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de E, segue que existem $g, h, k \in \mathcal{A}$ tais que

$$g(x_1) \neq g(x_2), \quad h(x_1) \neq 0 \quad \text{e} \quad k(x_2) \neq 0. \tag{3.93}$$

Consideremos as funções $u, v : E \to A$ dadas por

$$u(x) \doteq g(x)k(x) - g(x_1)k(x), \tag{3.94}$$

$$v(x) \doteq g(x)h(x) - g(x_2)h(x), \quad x \in E. \tag{3.95}$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E;A)$ e $g, h, k \in \mathcal{A}$ teremos que $u, v \in \mathcal{A}$.
Notemos que

$$u(x_1) \doteq g(x_1)k(x_1) - g(x_1)k(x_1) = 0, \tag{3.96}$$
$$u(x_2) \doteq g(x_2)k(x_2) - g(x_1)k(x_2) = \underbrace{[g(x_2) - g(x_1)]}_{\overset{(3.93)}{\neq} 0} \underbrace{k(x_2)}_{\overset{(3.93)}{\neq} 0} \neq 0, \tag{3.97}$$
$$v(x_2) \doteq g(x_2)h(x_2) - g(x_2)h(x_2) = 0, \tag{3.98}$$
$$v(x_1) \doteq g(x_1)h(x_1) - g(x_2)h(x_1) = \underbrace{[g(x_1) - g(x_2)]}_{\overset{(3.93)}{\neq} 0} \underbrace{h(x_1)}_{\overset{(3.93)}{\neq} 0} \neq 0. \tag{3.99}$$

Para finalizar, consideremos a função $f : E \to A$ dada por

$$f(x) \doteq \frac{c_1}{\underbrace{v(x_1)}_{\overset{(3.99)}{\neq} 0}} v(x) + \frac{c_1}{\underbrace{u(x_2)}_{\overset{(3.97)}{\neq} 0}} u(x), \quad x \in E. \tag{3.100}$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E;A)$ e $u, v \in \mathcal{A}$ teremos que $f \in \mathcal{A}$ e, além disso,

$$f(x_1) \doteq \frac{c_1}{v(x_1)} v(x_1) + \frac{c_1}{u(x_2)} \overbrace{u(x_1)}^{\overset{(3.96)}{=} 0} = c_1,$$
$$f(x_2) \doteq \frac{c_1}{v(x_1)} \underbrace{v(x_2)}_{\overset{(3.98)}{=} 0} + \frac{c_1}{u(x_2)} u(x_2) = c_2,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Podemos agora enuciar e demonstrar o **Teorema de Stone**, a saber:

Teorema 3.4.3 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ conjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{A} \subseteq C(K;\mathbb{R})$ uma álgebra em $\mathbb{R}$ que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de E.*
Então

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K;\mathbb{R}). \tag{3.101}$$

Demonstração:

Notemos que, como $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E;A)$, se $f \in \mathcal{A}$ teremos que $|f| \in \mathcal{A}$.

De fato, como K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ e a função $\underline{f}$ é contínua em K segue que ela será limitada em K, ou seja, existe

$$a \doteq \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, do Corolário (3.4.1), segue que existem $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que (para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = p_n(y)$ é um polinômio tal que $p_n(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $p_n(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^i$, $y \in \mathbb{R}$, para alguns $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$):

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon, \quad y \in [-a, a].$$

Definamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(y) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i f^i(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ é uma álgebra em $\mathcal{F}(E;A)$ que contém a álgebra $\mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{A}$, segue que $g \in \overline{\mathcal{A}}$.
Logo

$$|g(x) - |f(x)|| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{f^i(x)}_{=y^i \in [-a,a]} - |\underbrace{f(x)}_{=y \in [-a,a]}| \right| < \varepsilon, \quad x \in K,$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ é uniformemente fechada segue que $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$, como afirmamos.

Afirmamos também que se $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$ então as funções $h, s : K \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h(x) \doteq \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad s(x) \doteq \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in K$$

satisfazem $h, s \in \overline{\mathcal{A}}$.

De fato, pois, para cada $x \in K$ temos que:

(i) se

$$\max\{f(x), g(x)\} = f(x)$$

então

$$\min\{f(x), g(x)\} = g(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \overset{f(x) \geq g(x)}{=} \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

e

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \overset{f(x) \geq g(x)}{=} \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{f(x)-g(x)}{2} = g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

ou seja,

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2},$$
$$s(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}.$$

(ii) de modo semelhante, se

$$\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$$

então

$$\min\{f(x), g(x)\} = f(x)$$

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \overset{g(x) \geq f(x)}{=} \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2} = g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

e

$$\frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \overset{g(x) \geq f(x)}{=} \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

ou seja,

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2},$$
$$s(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}.$$

Portanto, se $x \in K$ teremos

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \overbrace{\frac{f(x)+g(x)}{2}}^{\in \overline{\mathcal{A}}} + \overbrace{\frac{|f(x)-g(x)|}{2}}^{\in \overline{\mathcal{A}}}, \tag{3.102}$$

$$s(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \underbrace{\frac{f(x)+g(x)}{2}}_{\in \overline{\mathcal{A}}} - \underbrace{\frac{|f(x)-g(x)|}{2}}_{\in \overline{\mathcal{A}}}, \tag{3.103}$$

mostrando, em particular, que $h, s \in \overline{\mathcal{A}}$, com afirmamos acima.

Afirmamos também que, se $f \in C(K;\mathbb{R})$ e $x \in K$, dado $\varepsilon > 0$, existe $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$g_x(x) = f(x) \quad \text{e} \quad f(t) - \varepsilon < g_x(t), \quad t \in K.$$

De fato, notemos que, como K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ segue que a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de funções limitadas, logo do Teorema (3.4.2), segue que $\overline{\mathcal{A}}$ será uma álgebra (que será uniformemente fechada) que contém a álgebra $\mathcal{A}$ que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de K, assim a álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ também terá essas propriedades.

Logo para cada $y \in K$, $y \neq x$, da Proposíção (3.4.1) (tomando-se $x_1 \doteq x$, $x_2 \doteq y$, $c_1 \doteq f(x)$ e $c_2 \doteq f(y)$), segue que existe $h_y \in \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$h_y(x) = f(x) \quad \text{e} \quad h_y(y) = f(y). \tag{3.104}$$

Como as funções h_y, f são contínuas em K e $h_y(y) = f(y)$, existe $\delta_y > 0$ de modo que se $t \in K$ e

$$|y - t| < \delta_y \quad \text{segue que} \quad \begin{array}{l} |h_y(t) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \\ |f(t) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \end{array}$$

assim, se $t \in K$ e $|y - t| < \delta_y$ teremos

$$|h_y(t) - f(t)| = |[h_y(t) - f(y)] + [f(y) - f(t)]| \leq \underbrace{|h_y(t) - f(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(y) - f(t)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < h_y(t) - f(t) < \varepsilon,$$

em particular, se $J_y \doteq (y - \delta_y, y + \delta_y) \cap K$ teremos

$$f(t) - \varepsilon < h_y(t), \quad t \in J_y. \tag{3.105}$$

Deste modo teremos $K \subseteq \bigcup_{y \in K} J_y$ e como K é um conjunto compacto em $\mathbb{R}$ (e J_y são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$), segue que existem $y_1, \cdots, y_{N_o} \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_o} J_{y_i}.$$

Para cada $x \in K$ definamos a função $g_x : K \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_x(t) \doteq \max\{h_{y_1}(t), \cdots, h_{y_{N_o}}(t)\}, \quad t \in K.$$

Como, para cada $i \in \{1, \cdots, N_o\}$ temos $h_{y_i} \in \overline{\mathcal{A}}$ segue que $g_x \in \overline{\mathcal{A}}$.

Notemos que se $t \in K$ segue que existe $i_o \in \{1, \cdots, N_o\}$ tal que

$$t \in J_{i_o} \quad \stackrel{(3.105)}{\Rightarrow} \quad h_{i_o}(t) > f(t) - \varepsilon. \tag{3.106}$$

Assim teremos

$$g_x(x) = \max\{\underbrace{h_{y_1}(x)}_{\stackrel{(3.104)}{=} f(x)}, \cdots, \underbrace{h_{y_{N_o}}(x)}_{\stackrel{(3.104)}{=} f(x)}\} = f(x), \tag{3.107}$$

$$g_x(t) = \max\{h_{y_1}(t), \cdots, h_{y_{N_o}}(t) \geq h_{i_o}(t) \stackrel{(3.106)}{>} f(t) - \varepsilon, \tag{3.108}$$

completando a prova da afirmação.

Como, para cada $x \in K$, temos $f, g_x \in C(K; \mathbb{R})$, segue que existe $\eta_x > 0$ tal que se $t \in K$ e

$$|t - x| < \delta_x \quad \text{segue que} \quad |g_x(t) - \overbrace{g_x(x)}^{\stackrel{(3.107)}{=} f(x)}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.109}$$

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.110}$$

assim se $t \in K$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
|t - x| < \delta_x \quad \text{teremos} \quad |g_x(t) - f(t)| &= |[g_x(t) - g_x(x)] + [\overbrace{g_x(x)}^{\stackrel{(3.107)}{=} f(x)} - f(t)]| \\
&\leq \underbrace{|g_x(t) - g_x(x)|}_{\stackrel{(3.109)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - f(t)|}_{\stackrel{(3.110)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \\
&\Rightarrow \quad -\varepsilon < g_x(t) - f(t) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

em particular, segue que se $t \in K$ satisfaz

$$|t - x| < \delta_x, \quad \text{teremos:} \quad f(t) - \varepsilon < g_x(t) < f(t) + \varepsilon. \tag{3.111}$$

Mas $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x; \delta_x)$, como K é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, segue que existem $x_1, \cdots, x_{N_1} \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i; \delta_{x_i}). \tag{3.112}$$

Consideremos a função $h; K \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \doteq \min\{g_{x_1}(x), \cdots, g_{x_{N_1}}(x)\}, \quad x \in K.$$

Como $g_{x_i} \in \overline{\mathcal{A}}$, para $i = 1, \cdots, N$, segue que (como na página 97) que $h \in \overline{\mathcal{A}}$.

Além disso, para $t \in K$, teremos

$$h(t) = \min\{g_{x_1}(t), \cdots, g_{x_{N_1}}(t)\} \stackrel{(3.111)}{>} f(t) - \varepsilon,$$

$$h(t) = \min\{g_{x_1}(t), \cdots, g_{x_{N_1}}(t)\} \stackrel{(3.112) \Rightarrow t \in B(x_{i_o}, \delta_{i_o}) \Rightarrow (3.111)}{<} f(t) + \varepsilon,$$

ou seja

$$|h(x) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{para todo} t \in K,$$

completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 3.4.3

1. *O Teorema de Stone* **não é válido** *para álgebras contidas nas funções contínuas a valores complexos (ver Exercício 21 página 169).*

2. *O Teorema de Stone será válido para álgebras contidas nas funções contínuas a valores complexos se acrescentarmos a hipótese da álgebra $\mathcal{A}$ ser* **auto-adjunta**, *isto é, se*

$$f \in \mathcal{A}, \quad \textit{implicar} \quad \bar{f} \in \mathcal{A},$$

onde se $f : K \to \mathbb{C}$ então definimos a função $\bar{f} : K \to \mathbb{C}$ como sendo

$$\bar{f}(x) \doteq \overline{f(x)}, \quad x \in K,$$

sendo que $\bar{z}$ denota o conjugado do número complexo z.

Mais precisamente, temos o:

Corolário 3.4.2 *Sejam $K \subseteq \mathbb{R}$ conjunto compacto de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{A} \subseteq C(K; \mathbb{C})$ uma álgebra auto-adjunta em K que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de K.*
Então

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K; \mathbb{C}). \tag{3.113}$$

Demonstração:
Consideremos

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \doteq \{f \in \mathcal{A};\ f \text{ é uma função a valores reais}\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ é uma álgebra real (deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor).

Notemos que se $f \in \mathcal{A}$ então podemos escrever

$$f(x) = u(x) + i\,v(x), \quad x \in K,$$

onde $u, v : K \to \mathbb{R}$ são funções a valores reais.

Neste caso teremos

$$u = \frac{f + \bar{f}}{2}. \tag{3.114}$$

Como $\mathcal{A}$ é uma álgebra auto-adjunta em K segue que, $\bar{f} \in \mathcal{A}$ e assim (3.114) implicará que $u \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$.

Notemos também que se $x_1, x_2 \in K$ são tais que $x_1 \neq x_2$ então, como a álgebra $\mathcal{A}$ separa pontos de K, segue, da Proposição (3.4.1), que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que

$$f(x_1) = 1 \quad \text{e} \quad f(x_2) = 0.$$

Isto implicará que

$$u(x_1) = 1 \quad \text{e} \quad u(x_2) = 0,$$

ou seja, a álgebra $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ separa pontos de K.

Por outro lado, se $x_o \in K$, como a álgebra $\mathcal{A}$ não se anula em nenhum ponto de K, segue, da Proposição (3.4.1), que existe $g \in \mathcal{A}$ tal que

$$g(x_o) \neq 0.$$

Seja $\lambda \doteq \overline{g(x_o)}$.

Neste caso teremos que

$$\lambda g(x_o) = |\underbrace{g(x_o)}_{\neq 0}|^2 > 0.$$

Consideremos a função $f : K \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) \doteq \lambda\, g(x), \quad x \in K$$

e sejam $u, v : K \to \mathbb{R}$ as funções a valores reais tais que

$$f = u + i\,v.$$

Neste caso teremos

$$u(x_o) = \Re[f(x_o)] = \Re[\underbrace{\lambda g(x_o)}_{=|\underbrace{g(x_o)}_{\neq 0}|}] = |\underbrace{g(x_o)}_{\neq 0}| > 0,$$

ou seja, a álgebra $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ não se anula em nenhum ponto de K.

Logo do Teorema de Stone (isto é, Teorema (3.4.3)) segue que $\overline{\mathcal{A}_\mathbb{R}} = C(K; \mathbb{R})$.

Por fim, notemos temos que se $f \in C(K; \mathbb{C})$ segue que $f = u + i\,v$, onde $u, v \in C(K; \mathbb{R}) = \overline{\mathcal{A}_\mathbb{R}}$, ou seja, $C(K; \mathbb{C}) = \overline{\mathcal{A}}$, completando a demonstração.

□

Para finalizar temos o

Corolário 3.4.3 *Toda função contínua e 2π-periódica a valores reais pode ser uniformemente aproximada por um* **polinômio trigonométrico** *em $\mathbb{R}$, isto é, por uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo*

$$g(t) = \sum_{n=0}^{N} [A\cos(nt) + B\,\mathrm{sen}(nt)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Denotemos por

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{f\,;\, f \text{ é uma função contínua e } 2\pi\text{-periódica a valore reias definidas } \mathbb{R}\}.$$

Consideremos

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ g\,;\, g(t) = \sum_{n=0}^{N} [a_n \cos(nt) + b_n\,\mathrm{sen}(nt)],\ a_n, b_n \in \mathbb{R},\, n = 0, \cdots, N,\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pode-se mostrar que $\mathcal{A}$ é uma álgebra que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de $[-\pi, \pi]$ (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor).

Logo, do Teorema de Stone segue que $\overline{\mathcal{A}} = C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, como queríamos demonstrar.

□

Observação 3.4.4 *O resultado acima permanece válido se considerarmos funções contínuas e 2π-periódicas a valores complexos, mais precisamente, se denotarmos por*

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C}) = \{f\,;\, f \textit{ é uma função contínua e } 2\pi\textit{-periódicaa valores complexos definida em } \mathbb{R}\}.$$

e

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ g\,;\, g(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int},\ c_n \in \mathbb{C},\, n = 0, \cdots, N,\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

pode-se mostrar que $\mathcal{A}$ é uma álgebra, auto-adjunta, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de $[-\pi, \pi]$ (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor) e assim, do Corolário (3.4.2) segue que $\overline{\mathcal{A}} = C_{2\pi}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, como queríamos demosntrar.

3.5 Exercícios

Capítulo 4

Séries de Potências e de Fourier

Começaremos este capítulo trantando das séries de potências e mais adiante trataremos das séries de Fourier.

4.1 Séries de potências

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um aberto de $\mathbb{R}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Nesta seção consideraremos funções $\underline{f}$, como acima, que podem ser representadas por uma série de funções, denominada <u>**série de potências**</u>, do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-\delta, \delta) \tag{4.1}$$

ou mais geralmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad x \in (a-\delta, a+\delta) \tag{4.2}$$

denominada <u>**série de potências centrada em $x = a$**</u>.

Observação 4.1.1

1. *Se a função $\underline{f}$ que têm a propriedade que em cada ponto $a \in A$ a série de potêncais (4.2) converge para a função $\underline{f}$ em algum intervalo $(a - \delta, a + \delta) \subseteq A$ diremos que esta é uma* <u>**função analítica em A**</u>.

2. *Se existe $R \in (0, \infty]$ tal que a série de funções (4.1) converge em $(-R, R)$ para a função $\underline{f}$, diremos que a função $\underline{f}$ possui uma* <u>**expansão em série de potências em torno de $x = 0$**</u>.

3. *De modo semelhante, se existe $R \in (0, \infty]$ tal que a série de funções (4.2) converge em $(a - R, a + R)$ para a função $\underline{f}$, diremos que a função $\underline{f}$ possui uma* <u>**expansão em série de potências em torno de $x = a$**</u>.

4. *Nosso estudo começará considerando-se $a = 0$, ou seja, estundando a série de potências (4.1).*

   Depois trataremos a série de potências (4.2) que, como veremos, será um caso particular da série de potências (4.1).

Com isto temos o

Proposição 4.1.1 *Sejam* $x_o, x_1 \neq 0$.
Então,

1. *se a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^n$ *for convergente então a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *será absolutamente pontualmente convergente em* $(-|x_o|, |x_o|)$.

2. *se a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ *for divergente então a série de funções* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *será divergente em* $(-\infty - |x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$.

Demonstração:

De 1.:

Sabemos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^n$ é convergente e $x_o \neq 0$, logo

$$\lim_{n\to\infty} c_n x_o^n = 0.$$

Assim a seqüência numérica $(c_n x_o^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|c_n x_o^n| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $x \in (-|x_o|, |x_o|)$, ou sela, $|x| < |x_o|$ teremos

$$|c_n x^n| \overset{x_o\neq 0}{=} |c_n x_o^n| \left|\frac{x^n}{x_o^n}\right| \leq M \left|\frac{x}{x_o}\right|^n = M r^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $r \doteq \left|\dfrac{x}{x_o}\right| < 1$ (pois $|x| < |x_o|$).

Como $0 \leq r < 1$ segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ é convergente (pois é uma série geométrica de razão r menor do que 1).

Logo, do do critério da comparação para séries numérica segue que para cada $x \in (-|x_o|, |x_o|)$ a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ será convergente, portanto a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será absolutamente convergente para $|x| < |x_o|$.

De 2.:

Sabemos que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ é divergente.

Suponhamos, por absurdo, que para algum x_2, $x_2 \in (-\infty - |x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_2^n$ seja convergente.

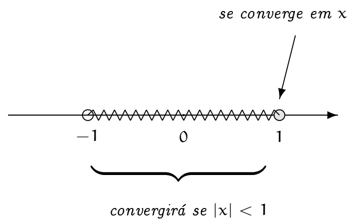
Então do item 1. seguirá que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será convergente em $|x| < |x_2|$, o que é um absurdo, pois x_1 pertence a esse intervalo (pois $|x_2| > |x_1|$) mas a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ é divergente.

Portanto a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ será divergente em $(-\infty - |x_1|) \cup (|x_1|, \infty)$. □

A seguir consideraremos alguns exemplos, a saber:

Exemplo 4.1.1 *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é convergente em* $x_o = 1$, *pois a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *é convergente.*

Logo da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *será absolutamente convergente para* $|x| < |x_o| = 1$ *(veja figura abaixo).*



Exemplo 4.1.2 *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é convergente em* $0 < x_o < 1$, *pois a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_o^{2n}$ *é convergente.*

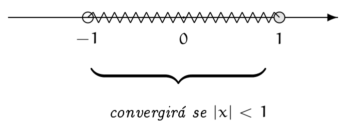
De fato,

$$|(-1)^n x_o^2| \leq x_o^2 \doteq r < 1$$

e a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *é convergente, pois é uma série geométrica de razão* $\underline{r}$ *menor que* 1.

Logo, do Teorema da Comparação para séries numérica (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_o^{2n}$ *é convergente.*

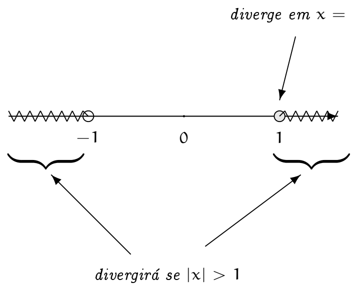
Assim, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *será absolutamente convergente para* $|x| < |x_o| < 1$, *isto é, em* $|x| < 1$.



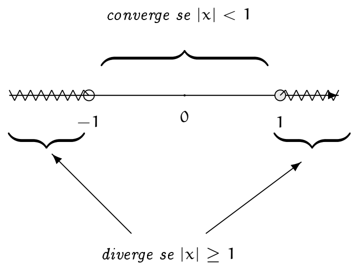
Por outro lado a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é divergente em* $x_1 = 1$ *(pois a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *é divergente).*

Logo, da Proposição (4.1.1) item 2., segue que a a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é divergente em* $|x| > |x_1| = 1$, *isto é, é divergente em* $|x| > 1$ *(veja figura abaixo).*

Além disso é fácil de ver (será deixado como exercício para o leitor) que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ *é divergente em* $x_1 = -1$.



Com isto temos a seguinte situação:



Em geral temos a seguinte situação:

Teorema 4.1.1 *Dada a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *uma, e somente uma, das situações abaixo ocorre:*

1. *a série de potências só converge em* $x = 0$*;*
2. *a série de potências converge absolutamente em toda a reta* $\mathbb{R}$*;*
3. *existe* $R > 0$ *tal que a série de potências é absolutamente convergente em* $|x| < R$ *e divergente em* $|x| > R$.

<u>**Demonstração:**</u>

Se o item 1. ocorrer, 2. e 3. não ocorrerão.

Vamos super que o item 1. não ocorre, ou seja existe $x_o \neq 0$ tal que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^n$ seja convergente.

Logo do item 1. da Proposição (4.1.1), segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergirá absolutamente em $|x| < |x_o| \doteq r$.

Seja S o conjunto formado por todos os $r > 0$ que têm a propriedade acima, isto é, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente em $|x| < r$.

O conjunto S é não vazio (pois r está em S).

Se S não for limitado então o item 3. ocorrerá (ou seja a série de potências convergirá em toda a reta $\mathbb{R}$).

Se S for limitado afirmamos que o item 2. ocorrerá.

De fato, se S é limitado, como ele é não vazio, então existe $0 < R \doteq \sup S$.

Afirmamos que R satisfaz o item 3.

De fato, seja $r \in S$ tal que $0 < r < R$ e $x_o \in \mathbb{R}$ tal que $|x_o| < r$.

Como $r \in S$ e $|x_o| < r$ temos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_o^n$ converge, logo, da Proposição (4.1.1) item 1., a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente em $|x| < r$ o que implica que ela convirgirá absolutamente em $|x| < R$.

Se $|x_1| > R$ afirmamos que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ diverge.

De fato, suponhamos, por absurdo, que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ então, pela Proposição (4.1.1) item 1., a série de potências convirgirá em $|x| < |x_1|$, ou seja $|x_1| \in S$, o que é um absurdo pois $|x_1| > R = \sup S$.

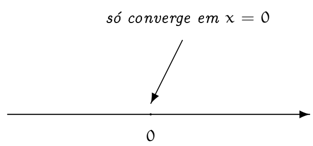
Portanto a série de potência $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverge em $|x| > R$, mostrando que R satisfaz 2., completando a deonstração do resultado.

□

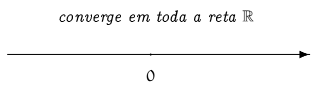
Observação 4.1.2

1. *O Teorema acima nos diz que uma, e somente uma, das possibilidades para uma série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$*:*

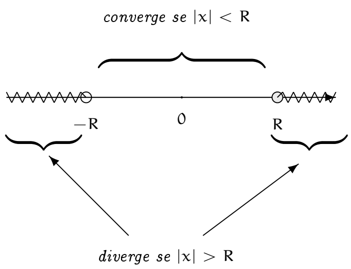
   (i) $R = 0$*:*

   (ii) $R = \infty$*:*

   (iii) $0 < R < \infty$*:*

   Neste último caso pode ocorrer todo tipo de situação em relação a convergência da série de potências nos pontos $x = -R$ *e* $x = R$ *como veremos em exemplos a seguir.*

2. *O número* $0 < R < \infty$ *obtido no item 3. do Teorema acima terá uma importância muito grande no estudo das séries de potências, como veremos.*

   Assim teremos a seguinte definição:

Definição 4.1.1 *Definiremos* **raio de convergência** *da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *como sendo* $R \in [0, \infty]$ *obtido no Teorema acima.*

O conjunto formado por todos os $x \in \mathbb{R}$ *onde a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *converge será dito* **intervalo de convergência** *da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Observação 4.1.3

1. *Segue do teorema acima que toda série de potências tem um (único) raio de convergência e portanto um (único) intervalo de convergência.*

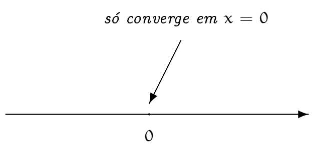
2. *O raio de convergência de uma série de potências pode ser 0, isto é,* $R = 0$ *e portanto o intervalo de convergência da série de potências será* $I = \{0\}$ *(o conjunto formado por um ponto, que na verdade não é um intervalo), como mostra o seguinte exemplo:*

   Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

   Observemos que para todo $x_1 > 0$ *fixado temos que a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x_1^n$ *é divergente.*

   De fato, como
$$\lim_{n\to\infty} (n^n x_1^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n x_1 = \infty > 1,$$
   do Critério da Raiz par Séries Numércias (cujos termoe são não-negativos) segue que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x_1^n$ *é divergente.*

   Assim, segue daProposição (4.1.1) item 2., que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ *só converge quando* $x = 0$*, isto é,* $R = 0$ *e o intervalo de convergência da série de potências é* $I = \{0\}$.



3. *O raio de convergência* R *pode ser infinito e portanto o intervalo de convergência será* $I = \mathbb{R}$*, como mostra o seguinte exemplo:*

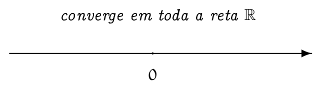
   Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

   Observemos que para todo $x_o > 0$ *fixado que a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_o^n}{n!}$ *é convergente.*

   De fato, como
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_o^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x_o^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_o}{n+1} = 0 < 1,$$

do Critério da Razão par Séries Numéricas (cujos termos são não-negativiso) segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_o^n}{n!}$ *é convergente se* $x_o > 0$.

Assim, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_o^n}{n!}$ *converge em* $\mathbb{R}$, *isto é,* $R = \infty$ *e o intervalo de convergência da série de potências é* $I = \mathbb{R}$.



4. *Se* $0 < R < \infty$, *a priori, nenhuma conclusão podemos tirar sobre o comportamento da série de potência* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *nos pontos* $x = -R$ *e* $x = R$.

Podemos ter situações, como veremos, que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *converge em um dos pontos e diverge no outro, ou diverge nos dois ou ainda converge nos dois.*

Um exemplo de um desses casos será a a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

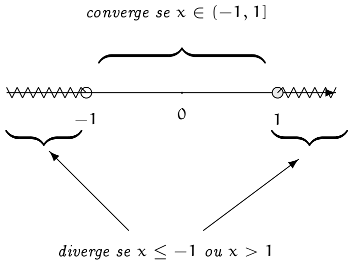
Observemos que a série de potências converge em $x_o = 1$, *pois a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *é convergente (série harmônica alternada).*

Logo, da Proposição (4.1.1) item 1., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *converge em* $|x| < 1$.

Por outro lado, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *diverge em* $x_1 = -1$, *pois a série numérica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente (série harmônica).*

Logo, da Proposição (4.1.1) item 2., segue que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *diverge em* $|x| > 1$.

Com isto temos que o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *será* $R = 1$ *e o seu intervalo de convergência será* $I = (-1, -1]$ *(ou seja, a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ *converge em* $x = R = 1$ *e diverge em* $x = -R = -1$*).*



Com isto podemos demonstrar o:

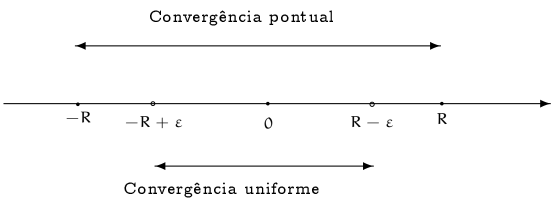
Teorema 4.1.2 *Se existe* $R \in (0, \infty]$ *tal que a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *seja pontualmente convergente para* $x \in (-R, R)$ *e definamos a função* $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R). \tag{4.3}$$

Então para $\varepsilon \in (0, R)$ *a série de funções* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ *será uniformemente em* $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.
Em particular, a função $\underline{f}$ *será diferenciável* $(-R, R)$ *(em particular, contínua) e*

$$f'(x) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R). \tag{4.4}$$

Demonstração:



Dado $\varepsilon \in (0, R)$, para $|x| < R - \varepsilon$, teremos

$$|c_n x^n| \leq |c_n| \, (R - \varepsilon)^n, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $R_\varepsilon \in (-R, R)$ segue, por hipóetese, que a série numérica $\sum_0^{\infty} c_n (R_\varepsilon)^n$ é convergente.

Logo, segue do Teste M de Weierstrass (isto é, Teorema (3.2.2)) que a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ será uniformemente em $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.

Notemos que do Corolário (3.2.3) segue que a a função $\underline{f}$ será diferenciável $(-R, R)$ e vale (4.4), completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.1.4

1. *Notemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \overset{L'Hospital}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

2. *Do item acima temos que, para cada* $x_o \in \mathbb{R}$ *teremos que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nc_n x_o|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\,|x_o| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,|x_o|,$$

logo, do Critério da Raiz para séries numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que, para cada $x_o \in \mathbb{R}$ *fixado, a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x_o^n|$ *converge se, e somente se, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n x_o^{n-1}|$ *converge, isto é, as séries de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *têm o mesmo raio de convergência.*

Conclusão: *uma série de potências pode ser derivada, termo a termo, que a série de funções obtida será uma sériede potências cujo raio de convergência é o mesmo da série de potências dada inicialmente.*

3. *Vale notar, como veremos em exemplos a seguir, que os intervalos de convegência das séries acima podem ser diferentes.*

Podemos resumir as observações acima no:

Corolário 4.1.1 *Nas condições do Teorema (4.1.2) temos que* $f \in C^{\infty}((-R,R);\mathbb{R})$ *e para todo* $k \in \mathbb{N}$ *teremos*

$$f^{(k)}(x) \doteq \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n x^{n-k}, \quad x \in (-R,R). \tag{4.5}$$

Em particular, deveremos ter $f^{(k)}(0) = k!\,c_k$*, ou seja,*

$$c_k = \frac{f^{(k)}}{k!}. \tag{4.6}$$

Demonstração:

Observemos que (4.5) segue da aplicação do Teorema (4.1.2) e da Observação acima (Por indução sobre $k \in \mathbb{N}$).

Por outro lado, fazendo $x = 0$ em (4.5) obteremos

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_k\,0^{n-k} = k(k-1)\cdots 1 = c_k\,k!,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.1.5

1. *Existem funções* $f \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *tais que*

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Como por exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} .$$

Pode-se mostra que $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *e que para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *teremos*

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Assim, se $x \neq 0$ *teremos*

$$f(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(n)}(0)}^{=0}}{n!} x^n$$

Em particular, a função $\underline{f}$ ***<u>não</u>*** *é uma função analítica em* $\mathbb{R}$.

2. *Suponhamos que* $R > 0$ *e que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *converge em* $x = R$.

   Então o Teorema (4.1.2) garante que a função $f \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *será contínua em* $(-R, R)$.

   O que podemos dizer sobre a função $\underline{f}$ *em* $x = R$*?*

   O resultado a seguir, conehcido como **<u>Teorema de ABel</u>**, *afirma que a função* $\underline{f}$ *será contínua em* $x = R$.

Teorema 4.1.3 *Suponhamos que a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *é convergente e seja* $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ *a função dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Então

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = f(1),$$

ou seja, a função $\underline{f}$ *será contínua em* $x = 1$.

Em particular, $f \in C((-1,1];\mathbb{R})$.

<u>Demonstração:</u>

Consideremos a sequência numérica $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}$, temos que

$$s_{-1} \doteq 0,$$
$$s_n \doteq \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Logo para cada $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ fixados teremos

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1}) x^n.$$

Como

$$
\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m &= \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n - \overbrace{\sum_{n=0}^{m-1} s_n x^{n+1}}^{k \doteq n+1} + s_m x^m \\
&= \sum_{n=0}^{m} s_n x^n - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} s_{k-1} x^k}_{\overset{s_{-1}=0}{=} \sum_{n=0}^{m} s_{n-1} x^n} \\
&= \sum_{n=0}^{m} (\underbrace{s_n - s_{n-1}}_{=c_n}) x^n,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m, \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Logo, se $|x| < 1$, tomando-se o limite, quando $m \to \infty$, na identidade acima obteremos

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n + \underbrace{\lim_{m\to\infty} s_m}_{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \in \mathbb{R}} \underbrace{\lim_{m\to\infty} x^m}_{\overset{|x|<1}{=} 0} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \tag{4.7}
$$

Se

$$
s \doteq \lim_{m\to\infty} s_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \in \mathbb{R},
$$

dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_o = N_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se

$$
n \geq N_o \quad \text{teremos} \quad |s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.8}
$$

Por outro lado, se $|x| < 1$ teremos

$$
(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1, \tag{4.9}
$$

pois para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado segue que

$$
\begin{aligned}
(1-x)(1 + x + \cdots + x^m) &= (1 + x + \cdots + x^m) - (x + x^2 + \cdots + x^m + x^{m+1}) \\
&= 1 - x^{m+1} \to 0 \quad \text{quando} \quad m \to \infty, \quad \text{pois} \quad |x| < 1.
\end{aligned}
$$

Com isto teremos

$$
\begin{aligned}
|f(x)-s| &\overset{(4.7),(4.9))}{=} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right| = |1-x| \left|\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)x^n\right| \\
&\overset{x\in(-1,1)}{=} (1-x)\left|\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)x^n\right| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|(s_n-s)x^n| = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|s_n-s|\,|x|^n \\
&= (1-x)\left[\sum_{n=0}^{N_o}|s_n-s|\,\underbrace{|x|^n}_{<1} + \sum_{n=N_o+1}^{\infty}\underbrace{|s_n-s|}_{\overset{(4.8)}{<}\frac{\varepsilon}{2}}|x|^n\right] \\
&< (1-x)\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N_o}|s_n-s|}_{\doteq M}+\frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{n=N_o+1}^{\infty}|x|^n}_{\leq\sum_{n=0}^{\infty}|x|^n=\frac{1}{1-|x|}}\right] = M(1-x)+\frac{1-x}{1-|x|}\,\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Notemos que se $M=0$, a desigualdade acima implicará que

$$|f(x)-s| < \frac{1-x}{1-|x|}\,\frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo para $x \to 1^{-1}$ teríamos, $1-\delta<x<1$, o que implicaria $1-|x|=1-x$, assim

$$|f(x)-s| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ou seja,} \quad f(x)=s, \quad \text{para } x\in(1-\delta,1)$$

e portanto

$$\lim_{x\to 1^-} = s = f(1),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $x=1$.

Por outro lado, se $M>0$ consideremos

$$\delta \doteq \frac{\varepsilon}{2M} > 0.$$

Logo se

$$1-\delta<x<1 \quad \text{teremos} \quad M(1-x) \overset{-x<\delta-1 \text{ e } M>0}{<} M[1-(\delta-1)] = M\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

logo, de (4.10), teremos

$$|f(x)-s| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1-x}{1-\underbrace{|x|}_{=x}}\,\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 1^-} = s = f(1),$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é contínua em $x=1$, completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o

Corolário 4.1.2 *Sejam* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *séries numéricas convergentes com somas* A, B *e* C, *respectivamente, onde, para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *temos:*

$$c_n \doteq a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots, +a_{n-1} b_1 + a_n b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{4.11}$$

Então

$$C = AB.$$

Demonstração:

Consideremos as funções $f, g, h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
$$g(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$
$$h(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in [0, 1).$$

Notemos que as funções acima estão bem definidas pois para cada $x \in [0, 1)$, pela Proposição (4.1.1) item 1. segue que as séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ serão absolutamente convergentes.

Além disso, como as séries convergem absolutamente para $x \in [0, 1)$, as séries acima podem ser multiplicadas (ver Teorema 3.50 página 74 do W.Rudin) , ou seja,

$$h(x) = f(x)\, g(x), \quad x \in [0, 1).$$

Pelo Teorema acima temos que, para $x \to 1^{-1}$ teremos

$$f(x) \to A, \quad g(x) \to B \quad \text{e} \quad h(x) \to C, \tag{4.12}$$

assim deveremos ter $C = AB$, completando a demonstração do resultado.

□

Temos também o seguinte resultado:

Teorema 4.1.4 *Seja* $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais tais que, para cada* $i \in \mathbb{N}$

$$b_i \doteq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \in [0, \infty)$$

e a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *é convergente em* $\mathbb{R}$.

Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{4.13}$$

Demonstração:

Seja

$$E \doteq \{x_o, x_1, x_2 \cdots\}$$

um subconjuto enumerável de modo que

$$x_n \to x_o \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ definamos a função $f_i : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(x_o) \doteq \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}, \tag{4.14}$$

$$f_i(x_n) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.15}$$

Notemos que a função f_i está bem definida pois em x_o ela tem a expressão de uma série numérica que, por hipótese, é convergente e em x_n, para $n \in \mathbb{N}$ ela tem a expressão de uma soma finita.

Como

$$|f_i(x_o)| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$$

e a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é convergente segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x_o)| = \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty.$$

Por outro lado, se $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$|f_i(x_n)| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < b_i. \tag{4.16}$$

Como a série numérica $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ é convergente, do Critério da Comparação para Séries Numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x_n)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty.$$

Com isto podemos definir a função $g : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x), \quad x \in E. \tag{4.17}$$

Notemos que:

(i) Para cada $i \in \mathbb{N}$, a função f_i é contínua em x_o.

De fato, como $x_n \to x_o$ segue que

$$\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) \overset{(4.15)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \overset{(4.14)}{=} f_i(x_o).$$

(ii) 1 A função g é contínua em x_o.

De fato, pois para todo $k \in \mathbb{N}$ teremos

$$|f_i(x_k)| \overset{(4.16)}{\leq} b_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty.$$

Logo do Teste M de Weierstrass segue que a série se funções $g = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge uniformemente em E.

Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, do item (i) a função f_i é contínua em E x_o segue que a função $\underline{g}$ será contínua em x_o.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$ é convergente, logo (a verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right). \tag{4.18}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \overbrace{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}}^{\overset{(4.14)}{=} f_i(x_o)} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_o) \overset{(4.17)}{=} g(x_o) \overset{g \text{ é cont. em} x_o}{=} \lim_{n \to \infty} g(x_n) \\
&\overset{(4.17)}{=} \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) \right] \overset{(4.15)}{=} \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \right] \\
&\overset{(4.18)}{=} \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right) \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij},
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

□

Enunciaremos e demonstraremos o **Teorema de Taylor** que nos diz:

Teorema 4.1.5 *Sejam* $R \in (0, \infty]$ *o raio de convergência da série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *e definamos a função* $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Se $a \in (-R, R)$ *então a função* $\underline{f}$ *pode ser expandida em uma série de potências em torno de* $x = a$ *que converge para a função* $\underline{f}$ *em* $I_a \doteq (a - (R - |a|), a + (R - |a|))$ *e além disso*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad x \in I_a. \tag{4.19}$$

Demonstração:

Notemos que se $x \in (-R, R)$ então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[(x-a)-a]^n \overset{\text{Binômo } \underset{=}{\text{de}} \text{ Newton}}{} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m\right]$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \overset{(*)}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=m}^{\infty} c_n \binom{n}{m} a^{n-m}\right](x-a)^m,$$

que será a expansão da função $\underline{f}$ em série de potências em torno de $x = a$.

Notemos que $a > 0$ segue que $|a| = a$

$$-R < x < R \ \Leftrightarrow\ -R - a < x - a < R - a \ \Leftrightarrow\ -R - |a| < x - a < R - |a|.$$

Vale algo semelhante se $a \leq 0$ (deixaremos os detalhes como exercício para o leitor).

Para terminar precisamos mostra a identidade (*).

Para isto afirmamos que, para cada $x_o \in I_a$, a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} c_n \binom{n}{m} a^{n-m}(x_o - a)^m$ é absolutamente convergente.

De fato, pois

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left|c_n \binom{n}{m} a^{n-m}(x_o-a)^m\right| &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}|c_n|\binom{n}{m}|a|^{n-m}|x_o-a|^m\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\underbrace{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}|a|^{n-m}|x_o-a|^m}_{\text{Binômio } \underset{=}{\text{de}} \text{ Newton}(|x_o-a|+|a|)^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(|x_o-a|+|a|)^n.\end{aligned}$$

Como $x_o \in I_a$ segue que $|x_o - a| + |a| < R$ e portanto a série numérica acima converge absolutamente, logo (*) segue do Teorema (4.1.4).

Para finalizar, notemos que se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n, \quad x \in I_a$$

então, se $I'_a \doteq (-R + |a|, R - |a|)$, definindo-se $g : I'_a \to \mathbb{R}$ como sendo a função dada por

$$g(y) \doteq f(y+a) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n, \quad y \in I'_a, \tag{4.20}$$

teremos que

$$g^{(n)}(0) = n!\, d_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

e como (verifique!)

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a),, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

segue que

$$d_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

e assim

$$f(x) = g(x-a) \overset{(4.20)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad x \in I_a,$$

completando a demonstração.

$\square$

PAra finalizar esta seção temos o

Teorema 4.1.6 *Suponhamos que as séries numéricas* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *são convergentes em* $(-R, R)$.

Seja

$$E \doteq \{x \in (-R, R)\,;\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\}.$$

Se E *tem um ponto de acumulação então*

$$a_n = b_n, \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Em particular, $E = (-R, R)$*, ou seja, as duas séries acima coincidem em* $(-R, R)$.

Demonstração:

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja

$$c_n \doteq a_n - b_n$$

e consideremos a função $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Observemos que se $x_o \in E$ se, e somente se,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_o^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_o^n, \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_o^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_o^n}_{= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x_o^n = f(x_o)}, \quad \Leftrightarrow \quad f(x_o) = 0.$$

Seja $A \subseteq (-R, R)$ o conjunto formado por todos os pontos de acumulação de E e $B \doteq (-R, R) \setminus A$.

Por hipótese temos que $A \neq \emptyset$ e notemos que se $x_o \in A$, como a função $\underline{f}$ é contínua em $(-R, R)$, segue que $f(x_o) = 0$, ou seja, $x_o \in E$.

Em particular, o conjunto E contém todos os seus pontos de acumulação, ou seja, o conjunto E é fechado em $(-R, R)$.

Afirmamos que B é um subconjunto aberto de $(-R, R)$.

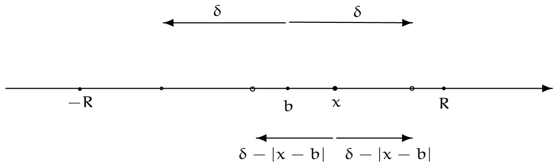
De fato, se $b \in B$, então b não será ponto de acumulação de E em $(-R, R)$, isto é, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(b, \delta) \cap E = \emptyset.$$

Logo se $x \in B(b; \delta)$ afirmamos que x não poderá ser ponto de acumulação de E em $(-R, R)$, isto é, $x \in B$, ou seja, $B(b; \delta) \subseteq B$, o que mostraria que B é um subconjunto aberto de $(-R, R)$.

Para mostrar que x não poderá ser ponto de acumulação de E em $(-R, R)$ notemos que:

- se $x = b$ nada temos a fazer pois $B(b;\delta) \cap E = \emptyset$, ou seja, $B(b;\delta) \subseteq B$.
- Por outro lado, se $x \neq b$ teremos que $B(x;\delta - |x-b|) \subseteq B(b;\delta)$, assim $B(x;\delta - |x-b|) \cap E = \emptyset$, mostrando que x não poderá ser ponto de acumulação de E em $(-R, R)$, isto é, $x \in B$ (figura abaixo).



Afirmamos que o conjunto A é aberto em $(-R, R)$.
Para mostra isto consideremos $x_o \in A \subseteq (-R, R)$.
O Teorema acima garante que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_o)^n, \quad |x - x_o| < R - |x_o|.$$

Com isto teremos que

$$d_n = 0, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

pois, caso contrário, como $f(x_o) = 0$, existe $k_o \in \mathbb{N}$ é o menor natural tal que $d_{k_o} \neq 0$ teremos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=k_o}^{\infty} d_n (x - x_o)^n \overset{m \doteq n-k_o}{=} . \sum_{n=0}^{\infty} d_{m+k_o} (x - x_o)^{m+k_o} \\ &= (x - x_o)^{k_o} \sum_{n=0}^{\infty} d_{m+k_o} (x - x_o)^m, \quad |x - x_o| < R - |x_o|, \end{aligned} \tag{4.21}$$

Logo se considerarmos a função $g : I_{x_o} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{m+k_o} (x - x_o)^m, \quad x \in I_{x_o},$$

onde $I_{x_o} \doteq \{x \in (-R, R)\,;\, |x - x_o| < R - |x_o|\}$ segue que

$$f(x) = (x - x_o)^{k_o} g(x), \quad |x - x_o| < R - |x_o|.$$

Observemos que a função $\underline{g}$ é contínua em x_o (na verdade $g \in C^\infty(I_{x_o};\mathbb{R})$ pois é dada por uma série de potências convergente) e $g(x_o) = d_{k_o} \neq 0$, pela escolha que fizemos acima.
Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que se

$$x \in B(x_o;\varepsilon) \subseteq I_{x_o} \quad \text{deveremos ter} \quad g(x) \neq 0.$$

Assim se $x \in B(x_o;\varepsilon)$ teremos

$$f(x) = \underbrace{(x - x_o)^{k_o}}_{\neq 0} \underbrace{g(x)}_{\neq 0} \neq 0. \tag{4.22}$$

Como $x_o \in A$, segue que x_o é ponto de acumulação de E em $(-R, R)$, ou seja, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e satisfazendo $x_n \to x_o$ quando $n \to \infty$.

Assim $f(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que mostra que $x_n \in B(x_o; \varepsilon)$ para n suficientemente grande, o que contraria (4.22).

Portanto deveremos ter d_n para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou seja, $f(x) = 0$ para $x \in I_{x_o}$ que é uma vizinhança de x_o, mostrando que o conjunto A é aberto em $(-R, R)$.

Logo teremos

$$(-R, R) = A \cup B,$$

onde A, B são abertos em $(-R, R)$ e são disjuntos.

Como o conjunto $(-R, R)$ é conexo em $\mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$ segue que $B = \emptyset$, ou seja, $A = (-R, R)$.

Como a função $\underline{f}$ é contínua em $(-R, R)$ e todo ponto de $(-R, R)$ é ponto de acumulação de E (cujos pontos a função $\underline{f}$ se anula) segue que $f(x) = 0$ para todo $x \in (-R, R)$ o que implicará que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e assim $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou ainda $a_n = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, completando a demonstração do resultado.

□

4.2 As funções Exponencial e Logarítmo

Nesta seção, utilizando as séries de potências, estudaremos as funções logarítmo e exponencial complexas e suas prpriedades e aplicações.

Começaremos pela

Definição 4.2.1 *Definamos a função $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$E(z) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.23}$$

que será denominada **função exponencial (complexa)**.

A seguir exibiremos algumas propriedades da função $\underline{E}$.

Observação 4.2.1

1. *Para cada $z_o \in \mathbb{C}$ a série numérica complexa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_o^n$ será convergente.*

   De fato, notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{z_o^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z_o^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z_o|}{n+1} = 0 < 1, \tag{4.24}$$

   assim, do Critério da Razão para séries numéricas (cujos termos são não-negativos) segue que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z_o|^n$ será convergente, o que implicará que a série numérica complexa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_o^n$ será convergente.

   Em particular a função $\underline{E}$ está bem definida.

2. *Se* $z, w \in \mathbb{C}$ *teremos*

$$E(z+w) = E(z) \cdot E(w).$$

De fato,

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n . \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} w^m$$

$$\overset{\textit{Def. 3.48 Rudin página 73}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n!} z^m w^{n-m} \overset{\textit{Binômio de Newton}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n$$

$E(z+w)$.

3. *Em particular, do item acima, segue que, para todo* $z \in \mathbb{C}$, *teremos*

$$E(z)E(-z) = E[z+(-z)] = E(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 0^n = 1,$$

ou seja, $E(z)$ *é inversível e seu inverso será* $E(-z)$, *isto é,*

$$[E(z)]^{-1} = E(-z).$$

4. *Se* $x_o \in [0, \infty)$ *segue que*

$$E(x_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{>0} \underbrace{x_o^n}_{>0} > 0.$$

Se $x_o \in (-\infty, 0)$, *do item 3., segue que*

$$E(x_o) = [\underbrace{E(-x_o)}_{>0 \textit{ pois } -x_o > 0}]^{-1} > 0,$$

assim

$$E(x) > 0, \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. *Para* $x \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$\lim_{x \to \infty} E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{>0} \underbrace{x^n}_{\to\infty} = \infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} E(x) \overset{y \doteq -x}{=} \lim_{y \to \infty} \underbrace{E(-y)}_{=\frac{1}{E(y)}} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{E(y)} \overset{\lim_{y\to\infty} E(y) = \infty}{=} 0.$$

6. *A função* $\underline{E}$ *é estritamente crescente em* $\mathbb{R}$.

De fato, se $0 \le x < y$ *teremos*

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{x^n}_{<y^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n = E(y).$$

Por outro lado se, $x < y \leq 0$ *teremos* $-x > -y \geq 0$ *e assim*

$$\underbrace{E(-y)}_{=\frac{1}{E(y)}} < \underbrace{E(-x)}_{=\frac{1}{E(x)}} \quad \Rightarrow \quad E(x) < E(y).$$

Os outros casos serão deixados como exercício para o leitor.

7. *A função* $\underline{E}$ *pertence a* $C^{\infty}(\mathbb{C};\mathbb{C})$ *e*

$$E'(z) = E(z), \quad \textit{para todo} \quad z \in \mathbb{C}.$$

De fato, como a função $\underline{E}$ *é dada por uma série de potências que converge em* $\mathbb{C}$ *segue, do Corolário (4.1.1), que ela será uma função pertencerá a* $C^{\infty}(\mathbb{C};\mathbb{C})$.

Além disso a série de potências que define a função $\underline{E}$ *poderá ser derivada, termo a termo, em* $\mathbb{C}$, *ou seja, para todo* $z \in \mathbb{C}$ *teremos*

$$E'(z) = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \overset{m \doteq n-1}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m$$
$$= E(z).$$

8. *Definamos o* **<u>número de Euler</u>**, *que será indicado por* $\underline{e}$, *como sendo*

$$e \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \in (0, \infty).$$

9. *Notemos que se* $n \in \mathbb{N}$ *segue que*

$$e^n = E(1)^n = \underbrace{E(1)\cdots E(1)}_{n \textit{ fatores}} \overset{\textit{item 2.}}{=} E(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \textit{ parcelas}}) = E(n).$$

10. *Se* $p, q \in \mathbb{Z}$ *com* $q \neq 0$ *teremos*

$$e^{\frac{p}{q}} = E\left(\frac{p}{q}\right).$$

De fato,

$$\left[E\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = \underbrace{E\left(\frac{p}{q}\right)\cdots E\left(\frac{p}{q}\right)}_{q \textit{ fatores}} = E\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}}_{q \textit{ parcelas}}\right) = E\left(q\frac{p}{q}\right) = E(p)$$
$$\overset{\textit{item 9.}}{=} e^p,$$

logo

$$e^{\frac{p}{q}} = E\left(\frac{p}{q}\right).$$

Com a função exponencial podemos definir outras funções importantes que serão introduzidas e estudadas a seguir.

Comecemos pela

Observação 4.2.2 *Sejam* $x > 1$ *e* $y \in \mathbb{R}$ *fixados.*

Consideremos

$$\mathcal{P} \doteq \{p \in \mathbb{Q}\,;\, p < y\}.$$

Com isto teremos que o conjunto $\{x^p\,;\, p \in \mathcal{P}\}$ *será limitado superiormente em* $\mathbb{R}$.
A verificção deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Com isto temos a

Definição 4.2.2 *Na situação acima, definiremos*

$$x^y \doteq \sup_{p \in \mathcal{P}} x^p.$$

Com isto temos a:

Observação 4.2.3

1. *Em particular, se* $x \in \mathbb{R}$, *teremos*
$$e^x = \sup_{p \in \mathcal{P}} e^p,$$
onde
$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{Q}\,;\, p < x\}.$$

2. *Como a função* $\underline{E}$ *é contínua e monóntona crescente em* $\mathbb{R}$ *segue que*
$$e^x = E(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
De fato, seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência monótona crescente de números racionais tais que*
$$p_n < x \quad e \quad p_n \to x, \quad quando \quad n \to \infty.$$
Então
$$\underbrace{E(p_n)}_{\text{Obs. acima item 10.} \atop = e^{p_n}} \to E(x), \quad \text{isto é,} \quad e^{p_n} \to E(x),$$
quando $n \to \infty$.
Como a função E *é monótona crescente em* $\mathbb{R}$ *segue que*
$$\underbrace{E(p_n)}_{=e^{p_n}} < \underbrace{E(p_{n+1})}_{=e^{p_{n+1}}} \overset{p_n < x}{\leq} E(x),$$
o que implicará
$$e^x = \sup_{p\in\mathcal{P}} \underbrace{e^p}_{\leq E(x)} \leq E(x). \tag{4.25}$$
Por outro lado, se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência monótona decrescente de números racionais tais que*
$$x < q_n \quad e \quad q_n \to x, \quad quando \quad n \to \infty,$$
segue da continuidade da função $\underline{E}$ *em* $\mathbb{R}$ *que*
$$\underbrace{E(q_n)}_{e^{q_n}} \to E(x), \quad \text{ou seja,} \quad e^{q_n} \to E(x) \quad quando \quad n \to \infty.$$

Como a função E *é monótona crescente em* $\mathbb{R}$ *segue que*

$$E(x) < \underbrace{E(q_n)}_{=e^{q_n}} = e^{q_n},$$

logo fazendo $n \to \infty$, *obteremos o que implicará*

$$E(x) \leq \lim_{n\to\infty} e^{q_n} = e^x. \tag{4.26}$$

Logo de (4.25) e (4.26) segue que $e^x = E(x)$, *para* $x \in \mathbb{R}$, *como afirmamos.*

Com isto introduziremos a

Definição 4.2.3 *Definimos a* **função exponencial (real)**, *indicada por* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como sendo*

$$\exp(x) \doteq e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podemos resumir algumas das propriedades acima bem como outras, no seguinte resultado:

Proposição 4.2.1

1. *Para* $x \in \mathbb{R}$ *teremos*
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$
2. *A função exponencial pertence a* $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *é estritamente cescente em* $\mathbb{R}$ *e maior que zero sempre.*
Além disso
$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$
3. *Se* $x, y \in \mathbb{R}$ *teremos*
$$e^{x+y} = e^x\, e^y.$$
4. *Se*
$$\begin{aligned} x \to \infty \quad &\textit{teremos} \quad e^x \to \infty, \\ y \to -\infty \quad &\textit{teremos} \quad e^y \to 0. \end{aligned}$$
5. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *teremos*
$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Demonstração:

Deixaremos a demosntração dos itens não tratados na Observação anterior como exercício para o leitor.

Notemos que a propriedade 5. segue do fato que

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4.27}$$

Logo, se $x > 0$ teremos

$$0 \leq x^n e^{-x} \overset{(4.27)}{<} \frac{(n+1)!}{x} \quad \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to \infty.$$

$\square$

Observação 4.2.4

1. *Como a função* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é estritamente crescente,* $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)0$*, diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e* $E'(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *segue, do Teorema da Função Inversa (Análise I) que existe sua função inversa* $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *que será estritamente crescente, difereciável em* $(0, \infty)$.

   Em particular, teremos

$$E[L(y)] = y, \quad y \in (0, \infty) \quad e \quad L[E(x)] = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Derivando a segunda identidade em relação a $\underline{x}$ *e utilizando a Regra da Cadeia, obteremos*

$$1 = L'[E(x)].E'(x) = L[E(x)].E(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

   e assim, se $y \doteq E(x)$ *segue, da identidade acima, que*

$$L'(y).y = 1 \quad \text{ou seja,} \quad L'(y) = \frac{1}{y}, \quad y \in (0, \infty).$$

   Notemos que

$$L(1) \stackrel{1=E(0)}{=} L[E(0)] \stackrel{L[E(x)]=x}{=} 0,$$

   logo integrando a identidade anterior, em relação a $\underline{y}$*, de* $\underline{1}$ *a* $\underline{y}$ *obteremos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,*

$$L(y) - \underbrace{L(1)}_{=0} = \int_1^y \frac{1}{t}\, dt, \quad y \in (-0, \infty),$$

   ou seja, a função inversa associada a função exponencial é a função $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$L(y) \doteq \int_1^y \frac{1}{t}\, dt, \quad y \in (-0, \infty). \tag{4.28}$$

2. *Se* $y \in (0, \infty)$ *segue que existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$y = E(x).$$

   Notemos que se $y \to \infty$ *segue que* $x \to \infty$ *(deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor), ou seja,*

$$L(y) = L[E(x)] = x \to \infty \quad se \quad y \to \infty.$$

3. *Por outro lado, se* $y \to 0^+$ *segue que* $x \to -\infty$ *(deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor), ou seja,*

$$L(y) = L[E(x)] = x \to -\infty \quad se \quad y \to 0^+.$$

4. *Observemos que se* $u, v \in (), \infty)$ *segue que existe* $x, y \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$u = E(x) \quad e \quad v = E(y),$$

   ou seja,

$$L(u) = x \quad e \quad L(v) = y.$$

   Com isto teremos

$$L(u.v) = L[E(x).E(y)] \stackrel{\textit{Obs. (4.2.1) item 2.}}{=} L[E(x + y)] = x + y = L(u) + L(v)$$

5. *Em particular, se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $y \in (0, \infty)$ *segue, por indução e a identidade acima, que*

$$L[y^n] = L[\underbrace{y. \cdots .y}_{n-fatores}] = nL(y).$$

Logo

$$y^n = E[L(y^n)], \quad y \in (0, \infty).$$

6. *Como consequência deste fato segue que, se* $y \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$.
Assim se $x \doteq y^m \in (0, \infty)$ *segue que*

$$L[x] = L(y^m) \overset{item\ 5.\ acima}{=} m \cdot L(y) \overset{y=x^{\frac{1}{m}}}{=} L\left(x^{\frac{1}{m}}\right) \quad ou\ seja, \quad L\left(x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}L(x),$$

ou ainda

$$x^{\frac{1}{m}} = E\left[\frac{1}{m}L(x)\right].$$

7. *Dos itens 5. e 6 acima segue que se* $x \in (0, \infty)$ *e* $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *teremos*

$$x^{\frac{n}{m}} = E\left[\frac{n}{m}L(x)\right].$$

8. *Baseado nos itens acima, é natural definirmos para* $x \in (0, \infty)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^{\alpha} = E\left[\alpha L(x)\right].$$

9. *Deixaremos como exercício para o leitro a verificação de que este modo de definir* x^{α} *coinicide como oq eu introduzimos anteriormente na Definição (4.2.2).*

10. *Notemos que se* $alpha \in \mathbb{R}$, *a função* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) \doteq x^{\alpha}, \quad x \in (0, \infty),$$

será diferenciável em $(0, \infty)$ *e além disso,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^{\alpha} &= \frac{d}{dx}\{E\left[\alpha L(x)\right]\} \overset{Regar\ da\ Cadeia}{=} E'\left[\alpha L(x)\right] \cdot \alpha L'(x) \\ &= E\left[\alpha L(x)\right] \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha - 1}, \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

11. *Além disso, se* $\alpha \in (0 infty)$ *segue que existe* $\varepsilon \in (0, \alpha)$ *e para* $x \in (1, \infty)$ *teremos*

$$\begin{aligned} x^{-\alpha}L(x) = x^{-\alpha}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt &\overset{t>1 \Rightarrow t^{1-\varepsilon}<t}{<} x^{-\alpha}\int_1^x t^{\varepsilon-1}\,dt \\ x^{-\alpha}\frac{t^{\varepsilon}}{\varepsilon}\Big|_{t=1}^{t=x} = x^{-\alpha}\frac{x^{\varepsilon}-1}{\varepsilon} &< \frac{x^{\overbrace{\varepsilon-\alpha}^{<0}}}{\varepsilon} \to 0, \quad se \quad x \to \infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{x \to \infty} x^{-\alpha}L(x) = 0.$$

4.3 Funcões trigonométricas complexas

Nesta seção, utilizando a função exponencial complexa definida na seção anterior, introduziremos as funções trigonométricas complexas e estudaremos suas propriedades básicas.

Começaremos pelas:

Definição 4.3.1 *Se $z \in \mathbb{C}$ definiremos as função $C, S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por*

$$C(z) \doteq \frac{1}{2}\left[E(iz) + E(-iz)\right], \tag{4.29}$$

$$S(z) \doteq \frac{1}{2i}\left[E(iz) - E(-iz)\right] \tag{4.30}$$

que serão denominadas **funçoes cosseno e seno (complexos)**, *respectivamnte.*

A seguir temos uma série de propriedades relacionadas com estas duas funções.

Observação 4.3.1

1. *Notemos que se $x \in \mathbb{R}$, utilizando-se a propriedades básica da conjugação, teremos:*

$$\overline{C(x)} = \overline{\frac{1}{2}\left[E(iz) + E(-iz)\right]} = \frac{1}{2}\left[\overline{E(iz)} + \overline{E(-iz)}\right] \overset{\overline{E(z)}=E(\overline{z})}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{E(\overline{iz})}_{=E(-iz)} + \underbrace{E(\overline{-iz})}_{=E[-(-iz)]=E(iz)}\right] = \frac{1}{2}\left[E(-iz) + E(iz)\right] = C(x),$$

ou seja, $C(x) \in \mathbb{R}$.

De modo semelhante temos

$$\overline{S(x)} = \overline{\frac{1}{2i}\left[E(iz) - E(-iz)\right]} = \frac{1}{2}\left[\overline{E(iz)} - \overline{E(-iz)}\right] \overset{\overline{E(z)}=E(\overline{z})}{=}$$
$$= \frac{1}{-2i}\left[\underbrace{E(\overline{iz})}_{=E(-iz)} - \underbrace{E(\overline{-iz})}_{=E[-(-iz)]=E(iz)}\right] = \frac{1}{-2i}\left[E(-iz) - E(iz)\right] = S(x),$$

ou seja, $S(x) \in \mathbb{R}$.

2. *Como consequência, para $x \in \mathbb{R}$, teremos:*

$$\underbrace{C(x)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{S(x)}_{\in\mathbb{R}} = \frac{1}{2}\left[E(ix) + E(-ix)\right] + i\left\{\frac{1}{2i}\left[E(ix) - E(-ix)\right]\right\}$$
$$= E(ix),$$

ou seja,

$$\Re\left[E(ix)\right] = C(x) \quad e \quad \Im\left[E(ix)\right] = S(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. *Observemos também que para $x \in \mathbb{R}$ teremos:*

$$|E(ix)|^2 = E(ix) \cdot \underbrace{\overline{E(ix)}}_{=E(-ix)} = E(ix) \cdot E(-ix) = E(ix - ix) = E(0) = 1,$$

em particular, teremos

$$|E(ix) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. *As funçõe s $\underline{C}$ e $\underline{S}$ são diferenciáveis em $\mathbb{C}$ (na verdade pertencem a $C^{(}\mathbb{C};\mathbb{C})$) e além disso*

$$\begin{aligned} C'(z) &= \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2}[E(iz)+E(-iz)]\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dz}[E(iz)] + \frac{d}{dz}[E(-iz)]\right\} \\ &\overset{\textit{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2}\{E(iz)\cdot i + E(-iz)\cdot(-i)\} = -\frac{1}{2i}[E(iz)-E(-iz)] \\ &= -S(z), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

De modo semelhante temos

$$\begin{aligned} S'(z) &= \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{2i}[E(iz)-E(-iz)]\right\} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{d}{dz}[E(iz)] - \frac{d}{dz}[E(-iz)]\right\} \\ &\overset{\textit{Regra da Cadeia}}{=} \frac{1}{2i}\{E(iz)\cdot i - E(-iz)\cdot(-i)\} = \frac{1}{2}[E(iz)+E(-iz)] \\ &= C(z), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

5. *Notemos que*

$$C(0) = \frac{1}{2}\left[\overbrace{E(i\cdot 0)}^{=1} + \overbrace{E(-i\cdot 0)}^{=1}\right] = 1 \quad e \quad S(0) = \frac{1}{2i}\left[\underbrace{E(i\cdot 0)}_{=1} - \underbrace{E(-i\cdot 0)}_{=1}\right] = 0.$$

6. *Existe $x_o \in (0,\infty)$ tal que $C(x_o) = 0$.*

   De fato, suponhamos, por absurdo, que para todo $x > 0$ tenhamos $C(x) \neq 0$.

   Como a função $\underline{C}$ é contínua em $\mathbb{C}$ e $C(0) = 1$ segue que $C(x) > 0$ para todo $x \in (0,\infty)$.

   Mas $S'(x) = C(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, assim a função $\underline{S}$ seria estritamente crescente em $(0,\infty)$.

   Isto, juntamente com o fato que $S(0) = 0$ segue que $S(x) > 0$ para todo $x \in (0,\infty)$.

   Deste modo teríamos, para $0 < x < y$, que:

$$\begin{aligned} S(x)(y-x) &= \int_x^y S(x)\,dt \overset{S(x)<S(t)\ \textit{se}\ t\in(x,y)}{<} \int_x^y \overbrace{S(t)}^{=-C'(t)}\,dt = \int_x^y [-C'(t)]\,dt \\ &\overset{\textit{Teor. Fund. Cálculo}}{=} -[C(y)-C(x)] \leq |C(y)| + |C(x)| \\ &\overset{C(x)\leq|C(x)|=|\Re[E(ix)]|\leq|E(ix)|=1}{\leq} 2, \end{aligned}$$

   ou seja,

$$S(x)(y-x) \leq 2, \quad x \in (0,\infty).$$

   O que é um absurdo, pois se $Y \to \infty$, como $S(x) > 0$ para todo $x \in (0,\infty)$ segue que,

$$S(x)(y-x) \to \infty.$$

   Logo podemos concluir que existe $x_o \in (0,\infty)$ tal que $C(x_o) = 0$.

7. *Seja $x_o \in (0,\infty)$ tal que $C(x_o) = 0$ e para todo $x \in (0, x_o)$ temos que $C(x_o) \neq 0$.*

Notemos que existe tal x_o *pois sabemos que os zeros de uma função contínua é num conjunto fechado (pois* $\{x \geq 0\,;\, C(x) = 0\} = \underbrace{\underbrace{C^{-1}(\{0\})}_{fechado} \cap \underbrace{[0,\infty)}_{fechado}}_{fechado}$*)* e $C(0) = 1 \neq 0$.

Como isto podemos definir $\pi \in (x_o, \infty)$ *por*

$$\pi \doteq 2x_o.$$

Com isteo teremos

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(x_o) = 0.$$

Notemos que

$$1 = |E(ix_o)|^2 = [\underbrace{C(x_o)}_{=0}]^2 + [S(x_o)]^2 \quad \textit{teremos} \quad [S(x_o)]^2 = 1 \quad \textit{ou seja} \quad S(x_o) = \pm 1.$$

Mas $C(x) > 0$ *e* $S'(x) = C(x) > 0$ *para para* $x \in (0, x_o)$ *assim a função* $\underline{S}$ *será estritamente crescente em* $(0, x_o)$ *e como* $S(0) = 0$ *segue, da continuidade da função* $\underline{S}$*, que* $S(x) > 0$ *para* $x \in (0, x_o)$.

Portanto deveremos ter $S(x_o) = 1$.

8. *Em particular, teremos*

$$E(ix_o) = C(x_o) + iS(x_o) = 0 + i \cdot 1 = i,$$

ou seja,

$$E\left(i\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Além disso,

$$E(i\pi) = E\left(i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}\right) = \overbrace{E\left(i\frac{\pi}{2}\right)}^{=i} \cdot \overbrace{E\left(i\frac{\pi}{2}\right)}^{=i} = i \cdot i = -1,$$
$$E(i2\pi) = E(i\pi + i\pi) = \overbrace{E(i\pi)}^{=-1} \cdot \overbrace{E(i\pi)}^{=-1} = (-1) \cdot (-1) = 1,$$

e portanto

$$E(z + 2\pi i) = E(z) \cdot \overbrace{E(2\pi i)}^{=1} = E(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

ou seja, a função $\underline{E}$ *é* $2\pi i$*-periódica.*

9. *Dos itens 4. e 5. teremos, para* $x \in \mathbb{R}$*, que*

$$C'(x) = -S(x) \quad S'(x) = C(x), \quad C(0) = 1 \quad e \quad S(0) = 0.$$

Logo do curso de Equações Diferenciais Ordinárias segue que

$$C(x) = \cos(x) \quad e \quad S(x) = \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, as funções $\underline{C}$ *e* $\underline{S}$ *são extensões das funções trigonométricas para o campo complexo.*

Pode os resumir isto na

Proposição 4.3.1

1. *a função $\underline{E}$ é $2\pi i$-periódica;*

2. *as função $\underline{C}$ e $\underline{S}$ são $2\pi i$-periódicas;*

3. *Se $t \in (0, 2\pi)$ teremos $E(it) \neq 1$;*

4. *se $z_o \in \mathbb{C}$ é tal que $|z_o| = 1$ então existirá um único $t_o \in [0, 2\pi)$ tal que*
$$E(it_o) = z_o.$$

Demonstração:

Do item 1.:

Foi mostrado na Observação acima item 8.

Do item 2.:

Se $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\begin{aligned} C(x + 2\pi) &= \frac{1}{2}\{E[i(x + 2\pi)] + E[-i(x + 2\pi)]\} = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{E[ix + 2\pi i]}_{=E(ix)} + \underbrace{E[-ix - 2\pi i]}_{=E(-ix)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{E(ix) + E(-ix)\} = C(x), \end{aligned} \tag{4.31}$$

e

$$\begin{aligned} S(x + 2\pi) &= \frac{1}{2i}\{E[i(x + 2\pi)] - E[-i(x + 2\pi)]\} = \frac{1}{2i}\left\{\underbrace{E[ix + 2\pi i]}_{=E(ix)} - \underbrace{E[-ix - 2\pi i]}_{=E(-ix)}\right\} \\ &= \frac{1}{2i}\{E(ix) - E(-ix)\} = S(x), \end{aligned} \tag{4.32}$$

mostrando que as função $\underline{C}$ e $\underline{S}$ são $2\pi i$-periódicas.

Do item 3.:

Se $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $E(it) = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, como $|E(it)| = 1$ e, da Observação acima item 8., $x = C(t), y = S(t) \in (0, 1)$,ou seja, $x, y \in (0, 1)$.

Notemos que

$$E(4ti) = [E(it)]^4 = (x + iy)^4 \overset{\text{Exercício}}{=} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2),$$

logo se $E(4ti) \in \mathbb{R}$ segue que

$$xy(x^2 - y^2) + 0 \overset{x,y\in(0,1)}{\Rightarrow} x^2 = y_2 = 0 \Rightarrow x = \pm y.$$

Mas $x^2 + y^2 = |E(it)| = 1$, assim teremos

$$1 = x^2 + y^2 =^(\pm y)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 = \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$E(4ti) = \Big(\underbrace{x^2}_{=\frac{1}{2}}\Big)^2 - 6\underbrace{x^2}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{y^2}_{=\frac{1}{2}} + \Big(\underbrace{y^2}_{=\frac{1}{2}}\Big)^2 = \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = -1,$$

isto é,

$$E(4ti) = -1.$$

Como $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ é equivalente a $4t \in (0, 2\pi)$ segue que existe um único $t \in [0, 2\pi)$ tal que $E(it) = z$, completando a demonstração do item 3. .

Do item 4.:

A unicidade segue do item 3., pois se $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ são tais que

$$E(it_1) = E(it_2) = z \Rightarrow \frac{E(it_1)}{E(it_2)} = 1 \;\Rightarrow\; \underbrace{E(it_1) \cdot \underbrace{[E(it_2)]^{-1}}_{=E(-it_2)}}_{=E[i(t_1 - t_2)]} = 1$$

$$\Rightarrow\; E[i(t_1 - t_2)] = 1.$$

Suponhamos, por absurdo, que $t_1 \neq t_2$, que podemo supor, sem perda de generalidade que $t_2 < t_1$.

Logo $t_2 - t_1 \in (0, 2\pi)$ o que contraria o item 3. (pois $E[i(t_2 - t_1)] \neq 1$).

Para mostrar a existência de $t \in [0, 2\pi)$ tal que $E(it) = z$, escrevemos $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$.

Notemos que $|x|, |y| \leq 1$, pois $x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$.

Consideraremos, primeiramente, o caso em que $x, y \in [0, 1]$.

Observemos que a função $\underline{C}$ é estritamente decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ do valor 1 para o valor 0.

Como ela é uma função contínua segue, do Teorema do Valor Intermediário, que existe $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$C(t) = x.$$

Por outro lado, como

$$[C(t)]^2 + [S(t)]^2 = 1 \text{ e } \; S(t) \geq 0 \;\text{ para }\; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

segue que

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - [C(t)]^2} = S(t),$$

assim

$$z \doteq x + iy = C(t) + iS(t) = E(it).$$

Se $x \in (-1, 0)$ e $y \in [0, 1]$ teremos que

$$-iz = -1(x + iy) = y - ix = \underbrace{y}_{\geq 0} + i(\underbrace{-x}_{>0})$$

e assim estaremos na situação acima, logo poderemos encontrar $\bar{t} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$$E(i\,\bar{t}) = -iz.$$

Logo

$$z = \frac{1}{-i} \cdot E(i\,\bar{t}) = i \cdot E(i\,\bar{t}) = E\left(\frac{\pi}{2}i\right) \cdot E(i\,\bar{t}) = E\left(\frac{\pi}{2}i + i\bar{t}\right) = E\left[\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} + \bar{t}}_{\doteq t \in [0,\pi) \subseteq [0,2\pi)}\right) i\right].$$

Finalmente, se $x \in (-1,1)$ e $y \in (-1,0)$ teremos que

$$-z = -(x+iy) = \underbrace{-x}_{\in(-1,1)} + i(\underbrace{-y}_{\in(0,1)}),$$

e assim podemos aplicar a situação acima para obter $\tilde{t} \in [0,\pi)$ tal que

$$-z = E(i\tilde{t}) \Rightarrow z = -1 \cdot E(i\tilde{t}) = E(i\pi) \cdot E(i\tilde{t}) = E(i\pi + i\tilde{t}) = E[(\underbrace{\pi + \tilde{t}}_{\doteq t \in [0,\pi) \subseteq [0,2\pi)})i],$$

completando a demonstração do resultado.

□

Temos também as seguintes observações:

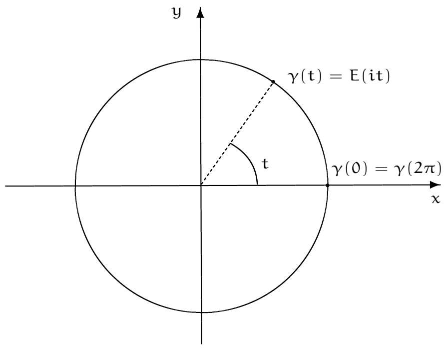
Observação 4.3.2

1. *Segue do item 4. da Proposição acima e do fato que* $|E(it)| = 1$ *que a curva parmetrizada diferenciável* $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\gamma(t) \doteq E(it), \quad t \in [0,2\pi]$$

será uma curva fechada simples cuja imagem é a circunferência (veja figura abaixo)

$$x^2 + y^2 = 1.$$



2. *Como*

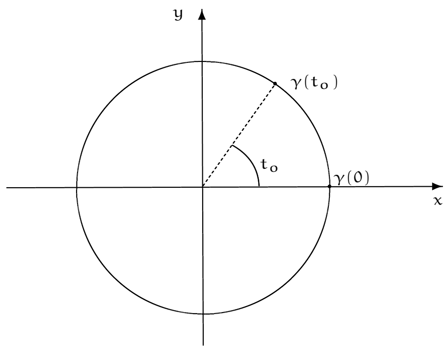
$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}[E(it)] \overset{Regra\ da\ Cadeia}{=} E'(it) \cdot i = i \cdot E(it), \quad t \in [0,2\pi],$$

segue que

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{|i \cdot E(it)|}_{=|i|\,|E(it)|=1} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

ou seja, o comprimento da curva parametrizada diferenicável $\underline{\gamma}$ *é igual ao comprimento da circunferência do plano* xOy *de centro na origem e raio* $\underline{1}$.

3. *Se* $t_o \in (0,2\pi]$, *quando* $\underline{t}$ *varia de* $\underline{0}$ *até* $\underline{t_o}$, $\gamma(t)$ *descreverá uma arco da circunferência (ver figura abaixo).*



4. Consideremos o triângulo de vértices (ver figura abaixo):

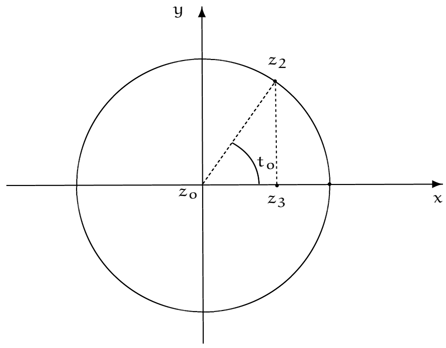
$$z_1 \doteq 0, \quad z_2 \doteq \gamma(t_o) \quad e \quad z_3 \doteq C(t_o).$$

Então teremos, da Trigonometria, que

$$C(t_o) = \cos(t_o) \quad e \quad S(t_o) = \text{sen}(t_o),$$

ou seja, como as funções envonvidas são 2π-periódicas segue que

$$C(t) = \cos(t) \quad e \quad S(t) = \text{sen}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



4.4 O Teorema fundamental da Álgebra

Nesta seção trataremos do **Teorema Fundamental da Álgebra**, a saber:

Teorema 4.4.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{C}$ para $i \in \{0, \cdots, n\}$ com $a_n \neq 0$.*
Então existe $z_o \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_o) = 0$, onde

$$P(z) \doteq \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

ou seja, todo polinômio de grau $n \geq 1$ *com coeficientes complexos possui, pelo menos, uma raiz complexa.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, podemo supor que $a_n = 1$.

De fato, caso contrário consideramos o $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$Q(z) \doteq \frac{1}{a_n} P(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se provarmos que existe $lz_o \in C$ tal que $Q(z_o) = 0$ isto implicará que $\frac{1}{a_n} P(z) = 0$, ou seja, $P(z_o) = 0$ demonstrando o resultado.

Seja

$$\mu \doteq \inf z \in C|P(z)|$$

que existe pois $|P(z)| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Se $z \in C$ é tal que $|z| = R$ teremos

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \overset{a_n=1}{=} \left|z^n + \sum_{k=1}^{n} a_k z^k\right| \geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n} \left|a_k z^k\right| \\
&= \underbrace{|z|}_{=R}{}^{n} - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \underbrace{|z|}_{=R}{}^{k} = R^n - \sum_{k=0}^{n} |a_k| R^k \\
&= R^n \left(1 - |a_o| R^{-n} - |a_1| R^{-n+1} - \cdots - |a_{n-1}| R^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Notemos que quando $R \to \infty$, o lado direito da expressão acima tende a ∞ (pois $R^{-n}, R^{-n+1}, \cdots, R^{-1} \to 0$ quando $R \to \infty$).

Logo existe $R_o > 0$ tal que

$$|P(z)| > \mu \quad \text{se} \quad |z| > R_o.$$

Como a função $z \mapsto |P(z)|$ é uma função contínua na bola fechada $B_o \doteq \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R_o\}$ (que é compacta em $\mathbb{R}^2$), segue que existe $z_o \in B_o$ tal que

$$|P(z_o)| = \mu.$$

Afirmação: $\mu = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $P(z_o) = \mu \neq 0$.

Consideremos a função $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$Q(z) \doteq \frac{1}{P(z_o)} P(z + z_o), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que a função $\underline{Q}$ é uma função polinomial não-constante (pois a função $\underline{P}$ é uma função polinomial não-constante já que $a_n = 1$), que satisfaz:

$$Q(0) = \frac{1}{P(z_o)} P(0 + z_o) = 1, \quad |Q(z)| = \frac{|P(z + z_o)|}{|P(z_o)|} \geq \frac{\inf_{z \in C} |P(z + z_o)|}{|P(z_o)|} = \frac{|P(z_o)|}{|P(z_o)|} \geq 1, \quad z \in C. \tag{4.33}$$

Logo podemos escrever

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.34}$$

onde $k \in \{1, \cdots, n\}$ é o menor natural tal que $b_k \neq 0$.

Notemos que se $z \doteq -\dfrac{b_k}{|b_k|}$ segue que $|z| = 1$, logo da Proposiçao (4.3.1) item 4., segue que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{-ik\theta} = z = -\frac{b_k}{|b_k|} \quad \Rightarrow \quad e^{ik\theta} b_k = -|b_k|. \tag{4.35}$$

Seja $r > 0$ tal que

$$r^k |b_k| < 1.$$

Então (4.35) implicará em

$$|1 + r^k \underbrace{b_k e^{ik\theta}}_{-|b_k|}| = |1 - r^k |b_k|| \overset{r^k|b_k|<1}{=} 1 - r_k |b_k|. \tag{4.36}$$

Assim teremos

$$\begin{aligned}
\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right| &= \left|1 + b_k r^k e^{ik\theta} + b_{k+1} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} + \cdots + b_n r^n e^{in\theta}\right| \\
&\leq \left|1 + b_k r^k e^{ik\theta}\right| + \left|b_{k+1} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta}\right| + \cdots + \left|b_n r^n e^{in\theta}\right| \\
&\leq \left|1 + b_k r^k e^{ik\theta}\right| + |b_{k+1} r^{k+1} \underbrace{\left|e^{i(k+1)\theta}\right|}_{=1} + \cdots + b_n r^n \underbrace{\left|e^{in\theta}\right|}_{=1} \\
&\leq \left|1 + b_k e^{ik\theta}\right| + |b_{k+1}| r^{k+1} + \cdots + |b_n| r^n \\
&\overset{(4.35)}{=} 1 - |b_k| r^k + |b_{k+1}| r^{k+1} + \cdots + |b_n| r^n \\
&= 1 - r^k \left[|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|\right].
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Notemos que se $r \in (0, \infty)$ é suficientemente pequeno, a expressão dentro do colchete acima será maior que zero (pois $|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n| \to |b_k|$ quando $r \to 0^+$).

Assim $\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right| < 1$ para todo $r > 0$ o que contraria o fato que $\left|Q\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq 1$ (ver (4.33)).

Portando $\mu = 0$, ou seja, existe $z_o \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_o) = 0$, completando a demonstração do resultado.

□

4.5 Séries de Fourier

Nesta seção estudaremos as **Séries de Fourier** associadas a uma função periódia "bem comportada".

Começaremos pela:

Definição 4.5.1 *Um* **polinômio trigonométrico** *é uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que pode ser colocada na seguinte forma:*

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.38}$$

onde $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ *para* $i \in \{0, \cdots, N\}$ *e* $j \in \{1, \cdots, N\}$.

Observação 4.5.1

1. *Podemos reescrever (4.38) na forma*

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.39}$$

onde

$$c_o \doteq a_o, \quad c_n \doteq \frac{a_n - ib_n}{2} \quad e \quad c_{-n} \doteq \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Observemos que todo polinômio trigonométrico é uma função 2π-periódica.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

3. *Notemos também que se $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ então*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right] = e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, também será uma função 2π-periódica.

Além disso teremos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\, dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

4. *Notemos que, para cada $m \in \{-N, \cdots, N\}$, multiplicando-se (4.39) por e^{-imx} e integrando-se em $[-\pi, \pi]$ obteremos*

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\, dx = \int_{\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\right] e^{-imx}\, dx = \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\, dx$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} c_n \underbrace{\int_{\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\, dx}_{\overset{\textit{Exercício}}{=} \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases}} = 2\pi c_m,$$

ou seja,

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\, dx, \quad m \in \{-N, \cdots, N\}. \tag{4.40}$$

5. *Notemos também que se $|m| > N$ então*

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\, dx = 0.$$

6. *oOr fim notemos que, o polinômio trigonométrico será* **<u>a valores reais</u>** *se, e somente se, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ para para $i \in \{0, \cdots, N\}$ e $j \in \{1, \cdots, N\}$.*

   Por sua vez isto será equivalente a

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pois

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \overset{\overline{a_n} = a_n,\, \overline{b_n} = b_n}{=} \frac{\overline{a_n} + i\overline{b_n}}{2} = \frac{\overline{a_n - ib_n}}{2} = \overline{\frac{a_n - ib_n}{2}} = \overline{c_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7. *Se a função* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *é integrável em* $[-\pi, \pi]$*, os números* c_m*,* $m \in \mathbb{Z}$*, dados por (4.40) estarão bem definidos e serão denominados* **coeficientes de Fourier associados à função** $\underline{f}$.

Podemos agora introduzir a

Definição 4.5.2 *Uma* **série trigonométrica (ou de Fourier)** *será uma séride funções que pode ser colocada na seguinte forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.41}$$

onde a N*-ésima soma parcial desta série de funções é dada por (4.39).*

Observação 4.5.2 *Temos as seguintees questões relacionadas com a série de funç çoes acima:*

1. *Quando a série de Fourier associada à função* $\underline{f}$ *converge?*

2. *Se for convergente, convergirá para a função* $\underline{f}$*?*

3. *Outras questões interessantes serão colocadas ao lono desta seção.*

Para começar a responder a essas questões precisaremos de alguns resultados que serão tratados a seguir.

Antens porém temos a:

Definição 4.5.3 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado consideremos a função* $\phi_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\int_a^b \phi_m(x) \cdot \phi_n(x)\, dx = 0, \quad \textit{se} \quad m \neq n,$$

$m, n \in \mathbb{N}$.

Neste caso diremos que a família $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *é um* **conjunto ortogonal**.

Se além disso tivermos

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2\, dx = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

diremos que a família $(\phi_{n \in \mathbb{N}}$ *é um* **conjunto ortonornal**.

Com isto temos o

Exemplo 4.5.1 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $\phi_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$\phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Então a família $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ *é um conjunto ortonornal.*

Resolução:

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Temos também o

Exemplo 4.5.2 *Consideremos* $\phi_o, \phi_1, \cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$\phi_o(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \phi_1(x) \doteq \frac{\cos(x)}{\sqrt{2\pi}},\ \psi_1(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2\pi}},\ \phi_2(x) \doteq \frac{\cos(2x)}{\sqrt{2\pi}},\ \psi_2(x) \doteq \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{2\pi}}, \cdots, x \in [-\pi, \pi].$$

Então a família $\{\phi_i, \psi\,;\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ j \in \mathbb{N}\}$ *é uma conjunto ortonormal.*

Resolução:

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Observação 4.5.3 *Consideremos* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$.

1. *Seja* $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ *um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em* $[a, b]$.

   Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ *definamos*
$$c_n \doteq \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}\,dt, \tag{4.42}$$
   que será denominado **n-ésimo coeficiente de Fourier associado a função f**.

   Neste caso poderemos considerar a série de funções
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\phi_n(x), \quad x \in [a, b]$$
   que será denominada **série de Fourier associada a função f** *(relativamente a família* $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$*).*

2. *Nosso objetivo será estudar a convergência da série de Fourier associada a função f dada.*

   Para isto começaremos com o:

Teorema 4.5.1 *Sejam* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$ *e* $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ *um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em* $[a, b]$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ *consideremos as funções* $s_n, t_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ *dadas por*
$$s_n(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i\,\phi_i(x), \tag{4.43}$$
$$t_n(x) \doteq \sum_{k=1}^{n} d_k\,\phi_k(x), \quad x \in [a, b], \tag{4.44}$$
onde (4.43) é a n*-ésima soma parcial da série de Fourier associada a função f (ou seja, os coeficientes* C_n *são dados por (4.42)).*

Então, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ *teremos*
$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2\,dx \le \int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2\,dx. \tag{4.45}$$
A igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se, $d_k = c_k$, $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Demonstração:

Observemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ teremos
$$\int_a^b f(x)\,\overline{t_n(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\,\overline{\sum_{k=1}^{n} d_k\,\phi_k(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f(x)\,\overline{d_k}\,\overline{\phi_k(x)}\,dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\overline{d_k}\underbrace{\int_a^b f(x)\,\overline{\phi_k(x)}\,dx}_{=c_k} = \sum_{k=1}^{n}\overline{d_k}c_k. \tag{4.46}$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |t_n(x)|^2\,dx &= \int_a^b \overbrace{t_n(x)}^{=\sum_{k=1}^n d_k\,\phi_k(x)} \quad \overline{t_n(x)}\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n d_k\,\phi_k(x)\right)\left(\overline{\sum_{j=1}^n d_j\,\phi_j(x)}\right)\,dx \\
&= \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n d_k\overline{d_j}\underbrace{\int_a^b \phi_k(x)\,\overline{\phi_j(x)}\,dx}_{=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}} = \sum_{k=1}^n d_k\overline{d_k} = \sum_{k=1}^n |d_k|^2. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)-t_n(x)|\,dx &= \int_a^b [f(x)-t_n(x)]\cdot\left[\overline{f(x)-t_n(x)}\right]\,dx = \int_a^b [f(x)-t_n(x)]\cdot\left[\overline{f(x)}-\overline{t_n(x)}\right]\,dx \\
&= \int_a^b \left[f(x)\overline{f(x)} - f(x)\overline{t_n(x)} - t_n(x)\overline{f(x)} + t_n(x)\overline{t_n(x)}\right]\,dx \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)\overline{t_n(x)}\,dx - \underbrace{\int_a^b t_n(x)\overline{f(x)}\,d\,x}_{=\overline{\int_a^b f(x)\overline{t_n(x)}\,dx}} + \underbrace{\int_a^b |t_n(x)|^2\,dx}_{\overset{(4.47)}{=}\sum_{k=1}^n |d_k|^2} \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \underbrace{\int_a^b f(x)\overline{t_n(x)}\,dx}_{\overset{(4.46)}{=}\sum_{k=1}^n \overline{d_k}c_k} - \underbrace{\overline{\int_a^b f(x)\overline{t_n(x)}\,dx}}_{\overset{(4.46)}{=}\overline{\sum_{k=1}^n \overline{d_k}c_k}} + \sum_{k=1}^n |d_k|^2 \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=1}^n \overline{d_k}c_k - \underbrace{\overline{\sum_{k=1}^n \overline{d_k}c_k}}_{=\sum_{k=1}^n d_k\overline{c_k}} + \sum_{k=1}^n |d_k|^2 \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=1}^n \overline{d_k}c_k - \sum_{k=1}^n d_k\overline{c_k} + \sum_{k=1}^n |d_k|^2 \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=1}^n \left(\overline{d_k}c_k - d_k\overline{c_k}\right) + \sum_{k=1}^n |d_k|^2. \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |d_k-c_k|^2 &= \sum_{k=1}^n (d_k-c_k)\cdot\underbrace{\overline{(d_k-c_k)}}^{=(\overline{d_k}-\overline{c_k})} = \sum_{k=1}^n \left(d_k\overline{d_k} - d_k\overline{c_k} - c_k\overline{d_k} + c_k\overline{c_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n |d_k|^2 - \sum_{k=1}^n \left(d_k\overline{c_k} - c_k\overline{d_k}\right) + \sum_{k=1}^n |c_k|^2
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\sum_{k=1}^n |d_k|^2 - \sum_{k=1}^n \left(d_k\overline{c_k} - c_k\overline{d_k}\right) = \sum_{k=1}^n |d_k-c_k|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2,
$$

logo substituindo em (4.48) obteremos

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)-t_n(x)|\,dx &= \int_a^b |f(x)|^2\,dx + \overbrace{\sum_{k=1}^{n} |d_k - c_k|^2}^{\geq 0} - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \\
&\geq \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

e a igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se, $d_k = c_k$ para $k \in \{0, \cdots, n\}$.

Para finalizar observemos que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |s_n(x)|^2\,dx &= \int_a^b \overbrace{s_n(x)}^{=\sum_{i=1}^{n} c_i\,\phi_i(x)}\ \overline{s_n(x)}\,dx = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} c_i\,\phi_i(x)\right]\overline{\left[\sum_{j=1}^{n} c_j\,\phi_j(x)\right]}\,dx \\
&= \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} c_i\,\phi_i(x)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\,\overline{\phi_j(x)}\right]dx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\overline{c_j}\underbrace{\int_a^b \phi_i(x)\overline{\phi_j(x)}\,dx}_{\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\overline{c_i} = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)-s_n(x)|^2\,dx &= \int_a^b [f(x)-s_n(x)]\cdot\left[\overline{f(x)-s_n(x)}\right]dx = \int_a^b [f(x)-s_n(x)]\cdot\left[\overline{f(x)}-\overline{s_n(x)}\right]dx \\
&= \int_a^b \left[f(x)\overline{f(x)} - f(x)\overline{s_n(x)} - s_n(x)\overline{f(x)} + s_n(x)\overline{s_n(x)}\right]dx \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)\overline{s_n(x)}\,dx - \int_a^b s_n(x)\overline{f(x)}\,dx + \underbrace{\int_a^b |s_n(x)|^2\,dx}_{\overset{(4.50)}{=}\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2} \\
&= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \int_a^b f(x)\overline{s_n(x)}\,dx - \int_a^b \overline{f(x)}s_n(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\overline{s_n(x)}\,dx &\overset{(4.43)}{=} \int_a^b f(x)\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,\phi_i(x)\right)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i}\underbrace{\int_a^b f(x)\overline{\phi_i(x)}\,dx}_{\overset{(4.42)}{=}c_i} \\
&\overset{c_i\overline{c_i}=|c_i|^2}{=} \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

e temos também que

$$
\int_a^b \overline{f(x)}s_n(x)\,dx = \underbrace{\overline{\left[\int_a^b f(x)\overline{s_n(x)}\,dx\right]}}_{\overset{(4.52)}{=}\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2} = \overline{\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2} = \sum_{i=1}^{n}|c_i|^2,
$$

logo substituindo em (4.51) obteremos

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2\,dx &= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{i=1}^n |c_i|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \\ &= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{i=1}^n |c_i|^2. \qquad (4.53)\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_a^b |f(x) - t_n(x)|\,dx \overset{(4.49)}{\geq} \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \overset{(4.53)}{=} \int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2\,dx,$$

mostrando (4.45) e notando que valerá a igualdade na desigualdade acima ocorrerá se, e somente se, $d_k = c_k$, $k \in \{1, \cdots, n\}$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.5.4

1. *O resultado acima nos diz que entre todas as funções* $t_n = t_n(x)$ *que utilizarmos para a aproximar a função* $\underline{f}$, *as funções* $s_n = s_n(x)$ *são aquelas que nos fornecerão as melhores aproximações.*

2. *Notemos que (4.50) nos diz que, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *teremos*

$$\int_a^b |s_n(f, x)|^2\,dx \leq \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

Temos também a <u>**desigualdade de Bessel**</u>, a saber:

Teorema 4.5.2 *Sejam* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[a, b]$ *e e* $\{\phi_n\,;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ *um conjunto ortonormal formado por funções, a valores complexos, definidas em* $[a, b]$.

Então

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2\,dx, \qquad (4.54)$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$ *temos que* c_n *é dada por (4.42).*

Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \qquad (4.55)$$

que é conhecido como <u>**Lema de Riemann-Lebesgue**</u>.

<u>**Demonstração:**</u>

Para cada $N \in \mathbb{N}$ segue, de (4.53), que

$$0 \leq \int_a^b |f(x) - s_N(x)|^2\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \sum_{n=1}^N |c_n|^2,$$

ou seja,

$$0 \leq \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2\,dx. \qquad (4.56)$$

Logo fazendo $N \to \infty$ segue que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente (pois é monótona crescente e limitada em $\mathbb{R}$) e além disso

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 \, dx,$$

mostrando (4.54).

Como a a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ é convergente, do Critério da Divergência, segue que $\lim_{n\to\infty} |c_n|^2 = 0$ o que implicará que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, completando a demonstração do resultado.

□

4.6 Algumas séries trigonométricas

A seguir exibiremos alguns resultados importantes sobre a convergência da série de Fourier associada a uma funçãao $\underline{f}$ "bem comportada".

Começa remos fazendo as seguintes observações:

Observação 4.6.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função 2π-periódica tal que $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$.*

1. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$ consideremos*

$$c_n \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \tag{4.57}$$

o n-ésimo coeficiente de Fourier associado à função $\underline{f}$ e

$$S_N(x) = S_N(f; x) \doteq \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.58}$$

a n-ésima soma parcial da série de Fourier associado à função $\underline{f}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.59}$$

Além disso consideremos $\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.60}$$

Com isto temos que o conjunto $\{\Phi_n \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal em $[-\pi, \pi]$. Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Logo, utilizando-se de (4.50), teremos que (4.56) pode ser reescrita an seguinte forma:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(x)|^2 \, dx \overset{(4.50))}{=} \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \overset{(4.56))}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx. \tag{4.61}$$

O fator $\frac{1}{2\pi}$ aparece pois $\int_{-\pi}^{\pi} |e^{inx}|^2 \, dx = 2\pi$.

3. *Para cada* $N \in \mathbb{N}$ *consideremos a função* $D_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$D_N(x) \doteq \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.62}$$

que é denominado **núcleo de Dirichlet** *de ordem* N.

4. *Observemos que para cada* $N \in \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}$ *teremos:*

$$\begin{aligned}\left(e^{ix}-1\right) D_N(x) &= \left(e^{ix}-1\right)\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{i(n+1)x}}_{k\doteq n+1\atop = \sum_{n=-N+1}^{N+1} e^{ikx}} - \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}}_{=\sum_{n=-N+1}^{N} e^{ikx}-e^{-iNx}} \\ &= \underbrace{\sum_{n=-N+1}^{N+1} e^{ikx}}_{==\sum_{n=-N+1}^{N} e^{ikx}+e^{i(N+1)x}} - \sum_{n=-N+1}^{N} e^{ikx} - e^{-iNx} \\ &= e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}.\end{aligned}$$

Multiplicando-se essa igualdade por $e^{-i\frac{x}{2}}$ *obteremos*

$$\underbrace{e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{ix}-1\right)}_{=\underbrace{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}_{=2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}} D_N(x) = e^{-i\frac{x}{2}}\left(e^{i(N+1)x}-e^{-iNx}\right) = \underbrace{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)x}}_{=2\,\text{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]},$$

ou seja,

$$D_N(x) = \frac{\text{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.63}$$

5. *Observemos também que, para* $N \in \mathbb{N}$ *e* $x \in \mathbb{R}$ *teremos*

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{i(x-t)}}_{=D_N(x-t)}\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t)\,dx \overset{\begin{pmatrix} s\doteq x-t \;\Rightarrow\; ds=-dt \\ t=-\pi \;\Rightarrow\; s=x+\pi \\ t=\pi \;\Rightarrow\; s=x-\pi\end{pmatrix}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-s)D_N(s)\,(-ds) \\ &\overset{f,D_N\ \textit{são}\ 2\pi\textit{-periódicas}}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(x-s)D_N(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)D_N(s)\,ds.\end{aligned} \tag{4.64}$$

Agora podemos enunciar e demonstrar um resultado que trata da convergência pontual da série de Fourier (4.59):

Teorema 4.6.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função* 2π*-periódica em* $\mathbb{R}$ *tal que* $f \in \mathfrak{R}$ *em* $[-\pi, \pi]$.
Suponhamos que para cada $x_o \in \mathbb{R}$ *fixado, existirem* $\delta, M > 0$ *tais que se*

$$|t| < \delta \quad \textit{implicar} \quad |f(x_o + t) - f(x_o)| \leq M|t|, \tag{4.65}$$

então

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x_o) = f(x_o), \tag{4.66}$$

isto é, a série de Fourier (4.59) associada a função $\underline{f}$ *convergirá em* x_o *para* $f(x_o)$*, ou ainda*

$$f(x_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx_o}.$$

Demonstração:

Consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(t) \doteq \begin{cases} \dfrac{f(x-t) - f(x)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{t}{2}\right)}, & 0 < |t| < \pi \\ 0, \quad t = 0 \end{cases}, \tag{4.67}$$

como $g(t + 2\pi) = g(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Notemos que de $N \in \mathbb{N}$ teremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{D_N(x)}_{=\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \, dx}_{\begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0 \end{cases}} = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1. \tag{4.68}$$

Logo para $N \in \mathbb{N}$ segue que

$$\begin{aligned} S_N(x_o) - f(x_o) &\overset{(4.64),(4.68)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_o - s) D_N(s) \, ds - f(x_o) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s) \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{[f(x_o - s) - f(x_o)]}_{\overset{(4.67)}{=} g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} \underbrace{D_N(s)}_{\overset{(4.63)}{=} \frac{\operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) s\right]}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}} \, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) s\right]}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \operatorname{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right) s\right] \, ds \\ &\overset{\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right] = \operatorname{sen}(Nt) \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos(Nt)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s) \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right] \operatorname{sen}(Nt) \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(s) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right] \cos(Nt) \, ds. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Mas

$$\left|g(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \frac{|f(x_o+t)-f(x_o)|}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\underbrace{\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|}_{\leq 1} \overset{(4.65)}{\leq} \frac{M|t|}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|}$$

$$= 2M\left|\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}}\right| \leq L, \tag{4.70}$$

para $|t| < \delta$, pois $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} = 1$ e

$$\left|g(t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \frac{|f(x_o+t)-f(x_o)|}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| = |f(x_o+t)-f(x_o)| \leq M|t| \leq M\pi, \tag{4.71}$$

ou seja, as funções 2π-periódicas

$$t \mapsto g(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{e} \quad t \mapsto g(t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

são funções limitadas em $\mathbb{R}$ e juntamente com o fato que $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi,\pi]$ implicarão que as funções acima pertencem a $\mathfrak{R}$ em $[-\pi,\pi]$ (deixaremos os detalhes dessa afirmação como exercício para o leitor).

Logo de (4.55) segue que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(s)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]\operatorname{sen}(Nt)\,ds,\ \int_{-\pi}^{\pi}\left[g(s)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos(Nt)\,ds \to 0, \quad \text{quando} \quad N \to \infty,$$

ou seja, de (4.69), teremos

$$S_N(x_o) - f(x_o) \to 0, \quad \text{quando} \quad N \to \infty,$$

mostrando (4.66) e completando a demonstração do resultado.

□

Observação 4.6.2 *Se a função* $\underline{f}$ *satisfaz a condição (4.65) diremos que ela é uma função* **Lipschitziana em** $\underline{x_o}$.

Como consequência temos o

Corolário 4.6.1 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *funções* 2π*-periódicas em* $\mathbb{R}$ *tais que* $f, g \in \mathfrak{R}$ *em* $[-\pi,\pi]$ *e* $I \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$.

Suponhamos que $f(x) = 0$ *para* $x \in I$.

Então para cada $x \in I$ *teremos*

$$S_N(x) \to 0 \quad \textit{quando} \quad N \to \infty. \tag{4.72}$$

Em particular, se existir $\delta > 0$ *tal que* $f(x) = g(x)$ *para* $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$ *segue que*

$$S_N(f;x) - S_N(g;x) = S_N(f-g;x) \to 0 \quad \textit{quando} \quad N \to \infty, \tag{4.73}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Como a função $f = 0$ satisfaz (4.65) para cada $x \in I$ segue do resultado acima que para todo $x \in I$ teremosque (4.66) será válido para cada $x \in I$ implicando em (4.72).

Se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$ então teremos $(f - g)(x) = 0$ para $x \in I \doteq (x_o - \delta, x_o + \delta)$ e assim do que porvamos acima segue (4.73) completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.6.3 *O resultado acima nos diz que o comportamento da série de Fourier de uma função* $\underline{f}$ *"bem comportada" em um ponto* $\underline{x}$ *depende, em princípio,* **somente**, *dos valores da função em alguma vizinhança de* $\underline{x}$.

Isto nos diz que duas séries de Fourier associadas a duas funções diferentes podem coincidir em um intervalo aberto mas podem diferir em outro intervalo aberto.

Isto nos diz que o comportamento de uma série de Fourier é bem diferente do comportamento de uma série de potências.

Podemos agora enunciar e demonstrar o assim denominado **Teorema de Stone-Weierstrass** para polinômios trigonométricos, mais precisamente temos o:

Teorema 4.6.2 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função contínua e* 2π*-periódicas em* $\mathbb{R}$.

Então dado $\varepsilon > 0$ *existe um polinômio trigonométrico* $P = P(x)$ *tal que*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.74}$$

Demonstração:

Se identifiramos $\underline{x}$ como $x + 2\pi$ podemos identificar as funções 2π-periódicas em $\mathbb{R}$ com as funções definidas na circunferência unitária centrada na origem, que denotaremos por S^1 (para verificar isto basta considerar a aplicação $x \mapsto e^{ix}$ que leva a reta $\mathbb{R}$ em S^1 e permitirá a identificação citada).

Notemos que o conjunto formado por todos os polinômios trigonométricos forma uma álgebra $\mathcal{A}$ auto-adjunta, que separa pontos e não se anula em nenhum ponto de S^1 e S^1 é compacto (deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor).

Logo do Corolário (3.4.2) segue que $\overline{\mathcal{A}} = C(S^1; \mathbb{C})$, completando a demonstração do resultado.

$\square$

Observação 4.6.4 *O resultado acima nos diz que toda função contínua e* 2π*-periódica em* $\mathbb{R}$ *pode ser* **uniformemente aproximada** *por uma polinômio trigonométrico em* $\mathbb{R}$.

Com isto podemos enunciar e demonstrar a assim denominada **Identidada de Parseval**, a saber

Corolário 4.6.2 *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *funções* 2π*-periódicas em* $\mathbb{R}$ *tal que* $f, g \in \mathfrak{R}$ *em* $[-\pi, \pi]$, *cujos coeficientes de Fourier são* $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *e* $(d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, *respectivamente.*

Então

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)|^2 \, dx = 0, \tag{4.75}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx = \sum_{N=-\infty}^{\infty} c_N \overline{d_N}, \tag{4.76}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{N=-\infty}^{\infty} |c_N|^2. \tag{4.77}$$

Demonstração:

Lembremos que se $h \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$ segue, do Corolário (2.3.1), que $|h|^2 \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$.

Neste caso denotaremos por

$$\|h\|_2 \doteq \left[\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Como $f \in \mathfrak{R}$ em $[-\pi, \pi]$, segue, do Exercício 12 página 140, que dado $\varepsilon > 0$ existe $h \in C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ tal que a função $\underline{h}$ seja 2π-periódica em $\mathbb{R}$ e

$$\|f - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.78}$$

Como a função $\underline{h}$ é contínua e 2π-periódica em $\mathbb{R}$ segue, do Teorema (4.6.2), que existe um polinômio trigonométrico $\underline{P}$ tal que

$$|h(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.79}$$

o que implicará em

$$\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - P(x)|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}}_{=\|h-P\|_2} \overset{(4.79)}{<} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9} \, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.80}$$

Suponhamos que o grau do polinômio $\underline{P}$ seja $N_o \in \mathbb{N}$.

Logo o Teorema (4.5.1) implicará que (multiplicando-se ambos o membros da desigualdadq por $\frac{1}{2\pi} > 0$)

$$\|h - S_N(h)\|_2 \overset{(4.45)}{\leq} \|h - P\|_2 \overset{(4.80)}{<} \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para todo} \quad N \geq N_o, \tag{4.81}$$

assim, da Observação (4.5.4) item 2. e do Teorema (4.5.2), segue que

$$\begin{aligned} \|S_N(h) - S_N(f)\|_2 = \|S_N(h - f)\|_2 &\overset{\text{Obs. (4.5.4) item 2. aplicado à função } h-f)}{\leq} \sum_{n=-N}^{N} |c_n - d_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n - d_n|^2 \overset{(4.54)}{\leq} \|h - f\|_2 \overset{(4.78)}{<} \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Logo se $N \geq N_o$ teremos

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_2 &= \|[f - h] + [h - S_N(h)] + [S_N(h) - S_n(f)]\|_2 \\ &\leq \underbrace{\|f - h\|_2}_{\overset{(4.78)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|h - S_N(h)\|_2}_{\overset{(4.81)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|S_N(h) - S_N(f)\|_2}_{\overset{(4.82)}{<} \frac{\varepsilon}{3}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)|^2 \, dx = 0,$$

e mostrando (4.75).

Com isto, para cada $N \in \mathbb{N}$, teremos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(f,x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\right]\overline{g(x)}\,dx = \sum_{n=-N}^{N} c_n \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{g(x)}\,dx}_{=\overline{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\underbrace{\overline{e^{inx}}}_{=e^{-inx}}\,dx}}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} c_n \underbrace{\overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}\,dx}}_{=\overline{d_N}} = \sum_{n=-N}^{N} c_n\,\overline{d_n}. \tag{4.83}$$

Mas

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f;x)\overline{g(x)}\,dx\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_N(f;x)]\overline{g(x)}\,dx\right|$$
$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}|[f(x)-S_N(f;x)]\overline{g(x)}|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(f;x)|\,\underbrace{|\overline{g(x)}|}_{=|g(x)|}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(f;x)|\,|g(x)|\,dx \overset{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(f;x)|^2\,dx}_{\overset{(4.76)}{\to}0 \text{ quando } N\to\infty}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Logo podemos passar o limite, quando $N \to \infty$, em (4.83) e assim obter

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(f,x)\overline{g(x)}\,dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n\,\overline{d_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\overline{d_n},$$

mostrando (4.76).

Fazendo $g = f$ em (4.76) obteremos (4.77), completando a demonstração do resultado.

□

4.7 Exercícios

Capítulo 5

Funções de Várias Variáveis Reais

Neste capítulo trataremos das funções de várias variáveis a valores reais (ou complexos).

Serão abordados assuntos relacionados com a continuidade e a diferenciabilidade de tais funções.

5.1 Um pouco de Álgebra Linear

Nesta seção abordaremos alguns tópicos relacionados com transformações lineares.

Estamos supondo que o leitor esteja familiarizado com a teoria básica de Álgebra Linear, que compreende os assuntos relacionados com espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), base e dimensão de espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que são finitamente gerados, transformações lineares entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) que são finitamente gerados entre outros tópicos.

Começaremos com a:

Observação 5.1.1

Sejam $(X, +, \cdot)$, $(Y, +, \cdot)$ *e* $(X, +, \cdot)$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

A verificação dos fatos citados abaixo serão deixadas como exercício para o leitor.

1. *Denotaremos o conjunto formado por todas as transformações lineares* $T : X \to Y$ *por*
$$L(X; Y).$$
2. *Notemos que* $(L(X; Y), +, \cdot)$ *será um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) onde* $+$ *denota a soma de funções e* $\cdot$ *denota a multiplicação de uma função por número real (ou complexo).*
3. *Lembremos também que se* $T \in L(X; Y)$ *e* $S \in L(Y; Z)$ *então* $S \circ T \in L(X; Z)$.
4. *Se* $n \in \mathbb{N}$, *denotaremos a norma usual do espaço vetorial* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *por* $\|\cdot\|$, *ou seja, se* $x \doteq (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *então*
$$\|x\| \doteq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Com as considerações acima temos:

Proposição 5.1.1 *Sejam* $n, m, k \in \mathbb{N}$. *Então:*

1. *Se* $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *então existe* $\lambda \geq 0$ *tal que*
$$\|A(x)\| \leq \lambda \|x\|, \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

Em particular, existe

$$\|A\|_L \doteq \sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\| < \infty \tag{5.2}$$

e a transformação linear $\underline{A}$ *será uniformemente contínua em* $\mathbb{R}^n$*;*

2. $\|\cdot\|_L$ *é uma norma em* $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$*;*

3. *Se* $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ *e* $B \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^k)$ *então*

$$\|B \circ A\|_L \leq \|B\|_L \, \|A\|_L. \tag{5.3}$$

Demonstração:

De 1.:

Seja $\beta \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\vec{e}_i = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ésima entrada}}, 0, \cdots 0), \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Consideremos $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \vec{e}_i$ tal que $\|y\| \leq 1$.

Notemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ teremos

$$|y_i| = \sqrt{y_i^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2} = \|x\| \leq \quad \Rightarrow \quad |y_i| \leq 1.$$

Seja

$$\lambda \doteq \sum_{i=1}^{n} \|A(\vec{e}_i)\| \,. \tag{5.4}$$

Com isto segue que

$$\begin{aligned}\|A(y)\| &= \left\| A\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \, \vec{e}_i\right) \right\| \overset{A \text{ é transf. linear}}{=} \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \, A(\vec{e}_i) \right\| \overset{\text{Des. triangular}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \|y_i \, A(\vec{e}_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|y_i|}_{\leq 1} \, \|A(\vec{e}_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|A(\vec{e}_i)\| \overset{(5.4)}{=} \lambda.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Logo o conjunto $\{\|A(y)\| \, ; \, \|y\| \leq 1\}$ é limitado superiormente por λ logo admitirá supremo e assim

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \|A(y)\| \leq \lambda,$$

mostrando (5.2).

Se $x = 0$ então $\|x\| = 0$, como $\underline{A}$ é uma transformação linear segue que $A(x) = 0$ e assim (5.1) ocorreá trivialmente (pois ambos os lados serão zero e assim a igualdade ocorrerá).

Por outro lado, se $x \neq 0$, considerando-se $y \doteq \dfrac{x}{\|x\|}$ segue que $\|y\| = 1$ e assim, de (5.5) obteremos

$$\|A(y)\| \leq \lambda \overset{y=\frac{x}{\|x\|}}{\Leftrightarrow} \underbrace{\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|}_{=\frac{1}{\|x\|}\|A(x)\|} \leq \lambda \Leftrightarrow \|A(x)\| \leq \lambda \, \|x\|,$$

mostrando (5.1).

Se $\lambda = 0$ segue, trivialmente, que a função $\underline{A}$ será uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$

Se $\lambda > 0$, temos que se $x, y \in \mathbb{R}^n$ segue que

$$\|A(x) - A(y)\| \overset{A \text{ é transf. linear}}{=} \|A(x-y)\| \overset{(5.1)}{\leq} \lambda\|x-y\|,$$

mostrando que a função $\underline{A}$ é Lipschtiziana em $\mathbb{R}^n$, em particular, uniformemente contínua em $\mathbb{R}^n$ (basta tomar $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{\lambda}$), completando a demonstração do item 1. .

<u>De 2.:</u>

Notemos que

- Se $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então $\|A\|_L \geq 0$.

  Além disso

$$\begin{aligned}\|A\|_L = 0 \;&\Leftrightarrow\; \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \|A(x)\| = 0 \text{ para } \|x\| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow\; A(x) = 0 \text{ para } \|x\| \leq 1 \overset{\text{Exercício}}{\Leftrightarrow} A(x) = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n;\end{aligned}$$

- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então

$$\begin{aligned}\|\alpha A\|_L &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\alpha A)(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \{|\alpha| \|A(x)\|\} \\ &\overset{|\alpha|\geq 0}{=} |\alpha| \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| = |\alpha|\, \|A\|_L;\end{aligned}$$

- Se $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ então

$$\begin{aligned}\|A+B\|_L &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|[A+B](x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \underbrace{\|A(x)+B(x)\|}_{\leq \|A(x)\| + \|B(x)\|} \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \{\|A(x)\| + \|B(x)\|\} \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \{\|A(x)\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|B(x)\|\} = \|A\|_L + \|B\|_L,\end{aligned}$$

  mostrando que $\|\cdot\|_L$ é uma norma em $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, completando a demonstração do item 2. .

<u>De 3.:</u>

Notemos que se $x \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|x\| \leq 1$ teremos

$$\|(B \circ A)(x)\| = \|B[A(x)]\| \overset{(5.1)}{\leq} \|B\|_L \underbrace{\|A(x)\|}_{\leq \|A\|_L \|x\|} \|B\|_L \left(\|A\|_L \|x\|\right).$$

Tomando-se o supremo para $\|x\| \leq 1$ obteremos

$$\|B \circ A\|_L \leq \|B\|_L \|A\|_L,$$

completando a demonstração do item 3. e do resultado.

□

Observação 5.1.2

1. *Notemos que se $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ admite transformação inversa segue que $m = n$.*

   De fato, se $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ admite transformação inversa segue que $\dim[\mathcal{N}(A)] = 0$ e $\dim[\mathcal{I}(A)] = m$.

   Logo de um resultado de Álgebra Linear segue que

   $$\underbrace{\dim[\mathcal{I}(A)]}_{=m} + \underbrace{\dim[\mathcal{N}(A)]}_{=0} = n,$$

   ou seja, $m = n$.

2. *Por simplicidade, denotaremos $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ por $L(\mathbb{R}^n)$ e um elemento de $L(\mathbb{R}^n)$ será denominado* **operador linear em $\mathbb{R}^n$**.

Para finalizar esta seção temos o

Teorema 5.1.1 *Seja $\Omega \doteq \{A \in L(\mathbb{R}^n)\,;\, A$ é inversível $\}$. Então*

1. *Se $A \in \Omega$ e $B \in L(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*
   $$\|B - A\|_L \, \|A^{-1}\|_L < 1 \tag{5.6}$$
   segue que $B \in \Omega$.

2. *Ω é um subconjunto aberto de $L(\mathbb{R}^n)$ (munido da norma $\|\cdot\|_L$).*

3. *A aplicação $T : \Omega \to \Omega$ dada por*
   $$T(A) \doteq A^{-1}, \quad A \in \Omega$$
   é uma função contínua e bijetora em Ω.

Demonstração:

De 1.:

Notemos que se $C \in \Omega$ segue que $\|C\|_L \neq 0$ (pois caso contrário $C = 0$ que não é injetora).

Assim como $A \in \Omega$ segue que A é um operador linear inversível segue que $A^{-1} \in L(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\|A^{-1}\|_L \neq 0$.

Sejam
$$\alpha \doteq \frac{1}{\|A^{-1}\|_L} \quad \text{e} \quad \beta \doteq \|B - A\|_L. \tag{5.7}$$

Notemos que
$$\beta = \|B - A\|_L \overset{(5.6)}{<} \frac{1}{\|A^{-1}\|_L} = \alpha \quad \text{isto é,} \quad \beta < \alpha \tag{5.8}$$

Logo para $x \in \mathbb{R}^n$ teremos

$$\alpha\|x\| = \alpha\, \overbrace{\|A^{-1}(A(x)\|}^{\leq \|A^{-1}\|_L \|A(x)\|} \leq \underbrace{\alpha\|A^{-1}\|_L}_{\overset{(5.7)}{=}1} \|A(x)\| = \|A(x)\|$$

$$\|(A - B)(x) + B(x)\| \leq \underbrace{\|(A - B)(x)\|}_{\|A-B\|_L\|x\|} + \|B(x)\| \leq \underbrace{\|A - B\|_L}_{\overset{(5.7)}{=}\beta} \|x\| + \|B(x)\|$$

$$= \beta\|x\| + \|B(x)\|,$$

ou seja,

$$(\alpha-\beta)\|x\| \leq \|B(x)\|, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.9}$$

Como $\beta < \alpha$ (ver (5.8)) segue que $\|B(x)\| \neq 0$ se $x \neq 0$, ou seja, o operador linear $\underline{B}$ é injetor e como o domínio e o contrá-domínio são iguais (logo têm mesma dimensão) implicará que o operador linear $\underline{B}$ será sobrejetor, ou ainda bijetor.

Assim temos que $B \in \Omega$, completando a demonstração de 1. .

De 2.:

Notemos que se $B \in L(\mathbb{R}^n)$ é tal que

$$\|B-A\|_L < \alpha,$$

teremos (5.8) e do item 1. segue que $B \in \Omega$, mostrando que dado $A \in \Omega$ teremos $B(A;\alpha) \subseteq \Omega$, ou seja, Ω é um subconjunto aberto de $L(\mathbb{R}^n)$ (munido da norma $\|\cdot\|_L$), completando a demonstração de 2. .

De 3.:

Dado $B \in \Omega$ e $y \in \mathbb{R}^n$, trocando-se $\underline{x}$ por $B^{-1}y$ em (5.9) obteremos

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\|B^{-1}(y)\| \leq \|B[B^{-1}(y)\| = \|y\| \quad &\Rightarrow \quad \|B^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{\alpha-\beta}\|y\|,\\ \Rightarrow \quad \|B^{-1}\|_L \leq \frac{1}{\alpha-\beta},&\end{aligned} \tag{5.10}$$

Logo, da Proposição (5.1.1) item 3. segue que

$$\begin{aligned}B^{-1}-A^{-1} &= B^{-1}(AA^{-1}) - B^{-1}(BA^{-1}) = B^{-1}(A-B)A^{-1}\\ \Rightarrow \quad \|B^{-1}-A^{-1}\|_L &= \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\|_L \overset{(5.3)}{\leq} \underbrace{\|B^{-1}\|_L}_{\overset{(5.10)}{\leq}\frac{1}{\alpha-\beta}} \underbrace{\|A-B\|_L}_{\overset{(5.7)}{=}\beta} \underbrace{\|A^{-1}\|_L}_{\overset{(5.10)}{\leq}\alpha}\\ &\leq \frac{1}{\alpha-\beta}\beta.\frac{1}{\alpha}\\ \Rightarrow \quad \|B^{-1}-A^{-1}\|_L &\leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}\end{aligned} \tag{5.11}$$

Portanto, se $\beta \to 0$, isto é, $B \overset{\|\cdot\|_L}{\to} A$, segue que $\|B^{-1}-A^{-1}\|_L \to 0$, ou ainda $B^{-1} \overset{\|\cdot\|_L}{\to} A^{-1}$, mostrando que a aplicação T é contínua em Ω (minido da norma $\|\cdot\|_L$), , completando a demonstração de 2. e do resultado.

□

5.2 Diferenciabilidade de funções de várias variáveis a valores reais (ou complexos)

Nesta seção trataremos da diferenciabilidade de funções de várias variáveis a valores reais (ou complexos) e algumas aplicçãoes da mesma bem como porpriedades associadas.

ANtes de introdizir a noção de diferenciabilidade para este caso lembraremos da noção análoga para o caso de funções reias de uma variável real.

Observação 5.2.1

1. *Nosso objetivo no que segue é intoriduzir o conceito de diferenciabilidade em* $x_o \in E$, *onde* E *um subconjunto aberto de* R^n, *de uma* $f : E \to \mathbb{R}^m$.

2. *No capítulo anterior tratamos, de modo rápido, a questão da diferencibilidade de uma função vetorial* $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$.

   A seguir fazeremos o estudo da situação do item acima de modo mais preciso e depois tratar da situação geral do item 1. .

3. *Lembremos que para* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *e* $x_o \in (a, b)$, *dizemos que a função* f *é* **diferenciável em** x_o *se existe o seguinte limite*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

   Neste caso denotamos o limite acima por $f'(x_o)$ *e o denominamos de* **derivada da função f no ponto** x_o.

4. *O limite (5.12) é equivalente a escrever*
$$f(x_o + h) = f(x_o) + f'(x_o)h + r(h), \tag{5.13}$$

   onde
$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{5.14}$$

5. *Por sua vez, a expressão (5.13 pode ser lida da seguinte forma: a diferença* $f(x_o+h)-f(x_o)$ *é aproximadamente igual função linear,* $h \mapsto f'(x_o)h$, *para* h *suficientemente pequeno, onde o erro é dado pela função* $r(h)$.

6. *Deste modo* $f'(x_o)$ *pode ser visto, não como um número real, mas como associado com um operador linear definido em* $\mathbb{R}$.

   Lembremos que, do ponto de vista da Álgebra Linear, $\mathbb{R}$ *é isomorfo a* $L(\mathbb{R})$ *(pois ambos são unidimensionais).*

Com isto temos a

Definição 5.2.1 *Sejam* $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_o \in (a, b)$.

Diremos que a função f *é* **diferenciável em** x_o *se existir* $y \in \mathbb{R}^m$ *tal que*
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = y. \tag{5.15}$$

Neste caso diremos que y *é a* **derivada da função f no ponto** x_o *que será indicada por* $f'(x_o)$, *ou seja*
$$f'(x_o) \doteq y.$$

Diremos que a função f *é* **diferenciável em** (a, b) *se ela a função* f *for diferenciável em cada ponto de* (a, b).

Com isto podemos considerar a função $f' : (a, b) \to \mathbb{R}^m$.

Observação 5.2.2

1. *Notemos que o limite acima é considerado na norma de* $\mathbb{R}^m$*, ou seja, dado* $\varepsilon > 0$ *existirá* $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ *tal que* $x_o + h \in (a, b)$ *e*

$$\left\| \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} - y \right\| < \varepsilon.$$

2. *Observemos que (5.15) é equivalente a para*

$$r(h) \doteq f(x_o + h) - f(x_o) - y \tag{5.16}$$

termos

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0, \tag{5.17}$$

3. *Portanto a função* $f : (a, b) \to \mathbb{R}^m$ *será diferenciável em* $x_o \in (a, b)$ *se, e somente se, existe* $y \in \mathbb{R}^m$*, que será denotado por* $f'(x_o)$*, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_o + h) - f(x_o) - y\, h\|}{|h|} = 0. \tag{5.18}$$

4. *Notemos também que no caso acima podemos interpretar* $f'(x_o)$ *como sendo associada a uma transformação linear já que* $\mathbb{R}^m$ *é isomorfo a* $L(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ *(pois ambos têm dimensão* $\underline{m}$*).*

5. *Na situação acima, se* $\beta_m \doteq \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^m$*, temos que para cada* $i \in \{1, \cdots, m\}$*, existe uma função* $f_i : E \to \mathbb{R}^m$ *tal que*

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x)), \quad x \in (a, b),$$

ou seja,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, u_i, \quad x \in (a, b).$$

6. *Sejam* $x_o \in E$*,* E *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *cujas funções componentes são* $f_i : E \to \mathbb{R}$*,* $i \in \{1, \cdots, m\}$*.*

   Afirmamos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* x_o *se, e somente se, para cada* $i \in \{1, \cdots, m\}$ *a a função* $\underline{f_i}$ *é diferenciável em* x_o*.*

   Além disso

$$f'(x_o) = (f_1'(x_o), \cdots, f_m'(x_o)).$$

   De fato, a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* x_o *se, e somente se,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - y\, h}{h} = 0. \tag{5.19}$$

   Seja $y = (y_1, \cdots, y_m)$*.*

   Logo (5.19) ocorrerá se, e somente se, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ *tivermos*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_o + h) - f_i(x_o) - y_i\, h}{h} = 0, \tag{5.20}$$

   ou seja, se, e somente se, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ *a função* $\underline{f_i}$ *for diferenciável em* x_o *e* $y_i = f_i'(x_o)$*, como afirmamos acima.*

7. *Na situação acima, se olharmos $f'(x) \in L(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ então a expressão acima nos diz que a matriz da transformação linear $f'(x_o)$ em relação às bases canônicas $\beta_1 \doteq \{1\}$ e $\beta_2 \doteq \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, será dada por*

$$[f'(x_o)]_{\beta_1,\beta_2} = \begin{pmatrix} f_1'(x_o) \\ \vdots \\ f_m'(x_o) \end{pmatrix}.$$

A caracterização (5.18) pode ser estendida para funções que têm várias variáveis tomando valores reais, ou seja, temos a:

Definição 5.2.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto em $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ é **diferenciável em x_o** *se existir $y \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - y\,h}{\|h\|} = 0. \tag{5.21}$$

Neste caso diremos que $\underline{y}$ é a **derivada da função f no ponto x_o** *que será indicada por $f'(x_o)$, ou seja*

$$f'(x_o) \doteq y.$$

Diremos que a função $\underline{f}$ é **diferenciável em E** *se ela a função $\underline{f}$ for diferenciável em cada ponto de E.*

Com isto podemos considerar a função $f' : E \to \mathbb{R}$.

Observação 5.2.3

1. *Observemos que (5.21) é equivalente a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_o + h) - f(x_o) - y\,h|}{\|h\|} = 0. \tag{5.22}$$

2. *A definição acima pode ser reescrita como: existe $y \in \mathbb{R}$ tal que dado $\varepsilon > 0$ existirá $\|h\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$ tal que $x_o + h \in E$ e*

$$\left|\frac{f(x_o + h) - f(x_o) - y\,h}{\|h\|}\right| < \varepsilon.$$

3. *Observemos que (5.21) é equivalente a para*

$$r(h) \doteq f(x_o + h) - f(x_o) - y \tag{5.23}$$

termos

$$\lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{\|h\|} = 0, \tag{5.24}$$

4. *Notemos também que no caso acima podemos interpretar $f'(x_o)$ como sendo associada a uma transformação linear já que $\mathbb{R}^m$ é isomorfo a $L(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ (pois ambos têm dimensão $\underline{m}$).*

Podemos agora considerar a seguinte situação geral:

Definição 5.2.3 *Sejam* $x_o \in E$, E *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$.

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $\underline{x_o}$ *se existir uma transformação linear* $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \tag{5.25}$$

Neste caso definimos a **derivada da função** $\underline{f}$ **no ponto** $\underline{x_o}$, *que será indicada por* $f'(x_o)$, *como sendo*

$$f'(x_o) \doteq A. \tag{5.26}$$

Diremos que a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $\underline{E}$ *se ela a função* $\underline{f}$ *for diferenciável em cada ponto de* E.

Com isto podemos considerar a função $f' : E \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *que a cada* $x \in E$ *associará* $f'(x) \in \mathbb{R}^m$.

Observação 5.2.4

1. *Observemos que, como* E *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $x_o \in E$ *existe* $\eta > 0$ *tal que* $B(x_o; \eta) \subseteq E$.

   Assim, a função $\underline{f}$ *é* **diferenciável em** $\underline{x_o}$ *se existir uma transformação linear* $A \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *tal que dado* $\varepsilon > 0$ *existirá* $\delta \in (0, \eta)$ *de modo que se*

   $$0 < \|h\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \quad \textit{deveremos ter} \quad \frac{\|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} < \varepsilon. \tag{5.27}$$

2. *Notemos que em (5.25) a norma do numerador é a norma de* $\mathbb{R}^n$ *e a norma do denominador é a norma de* $\mathbb{R}^m$.

3. *Na situação acima consideremos, para cada* $i \in \{1, \cdots, m\}$ *a função* $f_i : E \to \mathbb{R}$, *a i-ésima componente da função* $\underline{f}$.

   Afirmamos que a função $\underline{f}$ *é diferenciável em* x_o *se, e somente se, para cada* $i \in \{1, \cdots, m\}$ *a a função* $\underline{f_i}$ *é diferenciável em* x_o.

   Além disso

   $$f'(x_o)(h) = \begin{pmatrix} f_1'(x_o)(h) \\ \vdots \\ f_m'(x_o)(h) \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

O resultado a seguir garante que se a função for diferenciável a derivada estará bem definida, isto é,

Proposição 5.2.1 *Se (5.25) ocorrer como* $A, B \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *então* $B = A$.

Demonstração:

Seja $C \doteq A - B$.

Então para $h \in \mathbb{R}^n$, de modo que $x_o + h \in A$, teremos

$$\begin{aligned} \|C(h)\| &= \|(A - B)(h)\| = \|[f(x_o + h) - f(x_o)] - A(h) - [f(x_o + h) - f(x_o)] - B(h)\| \\ &\leq \|f(x_o + h) - f(x_o) - A(h)\| - \|f(x_o + h) - f(x_o) - B(h)\|. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Como função $\underline{f}$ é diferenciável em x_o segue de (5.28) que

$$0 \leq \frac{\|C(h)\|}{\|h\|} \overset{(5.28)}{\leq} \frac{\|f(x_o+h)-f(x_o)-A(h)\|}{\|h\|} - \frac{\|f(x_o+h)-f(x_o)-B(h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0,$$

ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|C(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad \overset{t\in\mathbb{R}^*,\, x \doteq \frac{1}{t}h}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\|C(tx)\|}{\|tx\|} = 0, \quad \text{para todo} x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.29}$$

Notemos que para $t \in \mathbb{R}^*$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ teremos

$$\frac{\|C(t\,x)\|}{\|t\,x\|} \overset{C \text{ é linear}}{=} \frac{\|t\,C(x)\|}{\|t\,x\|} = \frac{|t|\,\|C(x)\|}{|t|\|x\|} = \frac{\|C(x)\|}{\|x\|}$$

Isto, juntamente com (5.29), implcarão que

$$\frac{\|C(x)\|}{\|x\|} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

e como $x \neq 0$ segue que

$$C(x) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad C(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$A(x) - B(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mostrando que $B = A$, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.2.5

1. *A expressão (5.25) na Definição acima pode ser reescrita da seguinte forma:*

   A função $r : V \doteq B(0;\eta) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$r(h) \doteq f(x_o+h) - f(x_o) - A(h), \quad h \in V \tag{5.30}$$

   deve satisfazer

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0. \tag{5.31}$$

2. *Notemos que na situação acima, se a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in E$ segue que ela será uma função contínua em x_o.*

   De fato, pois

$$\lim_{h\to 0} [f(x_o+h) - f(x_o)] \overset{(5.30),\, f'(x_o)=A}{=} \lim_{h\to 0} \left[f'(x_o)h + r(h)\right].$$

   Da Proposição (5.1.1) temos que $f'(x_o)$ é contínua (pois $f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$), logo será contínua em 0, assim

$$\lim_{h\to 0} f'(x_o)h = 0.$$

Por outro lado

$$\lim_{h\to 0}\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}\|h\|_{\mathbb{R}^n}\right] = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}}_{\overset{(5.31)}{=}\,0}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\|h\|_{\mathbb{R}^n}}_{=0} = 0,$$

assim

$$\lim_{h\to 0}[f(x_o+h)-f(x_o)] = 0,$$

mostrando que a função função $\underline{f}$ *é contínua em* $x_o \in E$.

3. *Daqui em diante omitiremos os índices* $\|.\|_{\mathbb{R}^m}$ *nas normas que aparecerão.*

   Em cada caso o leitor é convidado a verificar que a norma que estaremos utilizando é a norma usual do correspondente espaço euclideano que aparecerá.

A seguir exibiremos um exemplo muito importante, a saber:

Exemplo 5.2.1 *Seja* $A \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.
Então a função A *é diferenciável em* $\mathbb{R}^n$ *e*

$$A'(x_o) = A, \quad \textit{para todo} \quad x_o \in \mathbb{R}^n.$$

<u>**Resolução:**</u>
Notemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|A(x_o+h)-A(x_o)-A(h)\|}{\|h\|} \overset{A \text{ é linear}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\|\overbrace{A(x_o)+A(h)-A(x_o)-A(h)}^{=0}\|}{\|h\|} = 0,$$

ou seja, a função A é diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $A'(x_o) = A$, terminando a resolução do Exemplo.
Valem as propriedades básicas de deferenciação, a saber:

Proposição 5.2.2 *Sejam* E *subsconjunto aberto de* R^n, $x_o \in \mathbb{R}^n$, $f, g : E \to \mathbb{R}^m$ *funções diferenciáveis em* x_o *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Então

1. *As funções* $(f \pm q)$ *serão diferenciáveis em* x_o *e*

$$(f \pm g)'(x_o) = f'(x_o) \pm g'(x_o).$$

2. *A função* (λf) *será diferenciável em* x_o *e*

$$(\lambda f)'(x_o) = \lambda\, f'(x_o).$$

<u>**Demonstração:**</u>
As demonstrações dos itens acima serão deixados como exercício para o leitor.

□

Temos também o seguinte importante resultado, conhecido como <u>**regra da cadeia**</u>:

Teorema 5.2.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *subsconjuntos abertos de* R^n *e* $\mathbb{R}^m$*, respectivamente,* $x_o \in \mathbb{R}^n$*,* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *função diferenciável em* x_o*,* $y_o \doteq f(x_o) \in U$ *e* $g : U \to \mathbb{R}^j$ *função diferenciável em* y_o*.*

Então a função $(g \circ f)$ *será diferenciável em* x_o *e além disso*

$$(g \circ f)'(x_o) = g'[f(x_o)] \circ f'(x_o). \tag{5.32}$$

<u>**Demonstração:**</u>

Como $x_o \in E$, $y_o \in U$, estes são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, e a função $\underline{f}$ é contínua em x_o, segue que existem $\eta_1, \eta_2 > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(x_o;\eta_1) \subseteq E$ e se $x \in B_{\mathbb{R}^n}(x_o;\eta_1)$ teremos $f(x) \in B_{\mathbb{R}^m}(y_o;\eta_2) \subseteq U$ (onde $B_{\mathbb{R}^i}(z_o;\eta)$ indica a bola aberta de centro em $z_o \in \mathbb{R}^i$ e raio η em $\mathbb{R}^i$).

Consideremos as funções $u : B_{\mathbb{R}^n}(x_o;\eta) \to \mathbb{R}^m$ e $\nu : B_{\mathbb{R}^m}(y_o;\eta) \to \mathbb{R}^j$ dadas por

$$u(h) \doteq f(x_o + h) - f(x_o) - f'(x_o)h, \quad h \in B_{\mathbb{R}^n}(x_o;\eta), \tag{5.33}$$

$$\nu(k) \doteq g(y_o + k) - g(y_o) - g'(y_o)k, \quad k \in B_{\mathbb{R}^m}(y_o;\eta). \tag{5.34}$$

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são diferenciáveis em x_o e y_o, respectivamente, segue que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{k \to 0} \frac{\|\nu(k)\|}{\|k\|} = 0. \tag{5.35}$$

Logo, dado $h \in B_{\mathbb{R}^n}(0,\eta_1)$, consideremos

$$k \doteq f(x_o + h) - f(x_o) \in B_{\mathbb{R}^m}(0;\eta_2) \quad \Rightarrow \quad f(x_o + h) = f(x_o) + k = y_o + k. \tag{5.36}$$

Então

$$\begin{aligned} \|k\| &= \|f(x_o+h) - f(x_o)\| \overset{(5.33)}{=} \|f'(x_o)h - u(h)\| \leq \|f'(x_o)h\| + \|u(h)\| \\ &= \|f'(x_o)\|_L \, \|h\| + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \|h\| = \left[\|f'(x_o)\|_L + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|} \right] \|h\|. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_o + h) - (g \circ f)(x_o) - [g'[f(x_o)] \circ f'(x_o))(h) &= g[\overbrace{f(x_o + h)}^{\overset{(5.36)}{=} g(y_o+k)}] - g[\overbrace{f(x_o)}^{=y_o}] - g'[\overbrace{f(x_o)}^{=y_o}][f'(x_o))(h)] \\ &= \underbrace{g(y_o + k) - g(y_o)}_{\overset{(5.34)}{=} \nu(k) + g'(y_o)k} - g'(y_o)[f'(x_o))(h)] \\ &= \nu(k) + g'(y_o)k - g'(y_o)[f'(x_o))(h)] \\ &\overset{g'(y_o) \text{ é linear}}{=} \nu(k) + g'(y_o)[\underbrace{k}_{\overset{(5.36)}{=} f(x_o+h) - f(x_o)} - f'(x_o)h] \\ &= \nu(k) + g'(y_o)[\underbrace{f(x_o + h) - f(x_o) - f'(x_o)h}_{\overset{(5.33)}{=} u(h)}] \\ &= \nu(k) + g'(y_o)[u(h)]. \end{aligned}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|(g\circ f)(x_o+h)-(g\circ f)(x_o)-g'(y_o)[f'(x_o)h]\|}{\|h\|} = \frac{\overbrace{\|v(k)+g'(y_o)[u(h)]\|}^{\leq \|v(k)\|+\|g'(y_o)[u(h)]\|}}{\|h\|}\\
&\leq \frac{\|v(k)\|}{\|h\|} + \frac{\overbrace{\|g'(y_o)[u(h)]\|}^{\leq \|g'(y_o)\|_L\|u(h)\|}}{\|h\|} \leq \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\frac{\|k\|}{\|h\|} + \|g'(y_o)\|_L\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\\
&\overset{(5.33)}{\leq} \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\left[\|f'(x_o)\|_L + \left[\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\right]\|h\|\right]\frac{1}{\|h\|} + \|g'(y_o)\|_L\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\\
&= \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\left\{\left[\|f'(x_o)\|_L + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\right]\|h\|\right\}\frac{1}{\|h\|} + \|g'(y_o)\|_L\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\\
&= \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\left[\|f'(x_o)\|_L + \frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\right] + \|g'(y_o)\|_L\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}.
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

Notemos que, da diferenciabilidade da função $\underline{f}$ em x_o, se $h \to 0$ em $\mathbb{R}^n$ então teremos $\dfrac{\|u(h)\|}{\|h\|} \to 0$.

Logo de (5.37) segue que $k \to 0$ em $\mathbb{R}^m$.

Como isto, da diferenciabilidade da função $\underline{g}$ em y_o, como $k \to 0$ em $\mathbb{R}^m$ deveremos ter $\dfrac{\|v(k)\|}{\|k\|} \to 0$.

Portanto fazendo $h \to 0$ em $\mathbb{R}^n$, das conclusões acima e de (5.38), segue que a função $g\circ f$ é diferenciável em x_o e além disso vale (5.32), completando a demonstração do resultado.

□

5.3 Derivadas parciais

Nesta seção estudaremos algumas propriedades importantes de funções diferenciáveis definidas em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}^m$.

Antes porém introduziremos alguns conceitos importantes para o estudo acima.

Para isto sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$ e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função.

Com isto podemos introduzir a:

Definição 5.3.1 *Seja* $j \in \{1, \cdots, n\}$.

Se existir o limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_o+t\vec{e}_j)-f(x_o)}{t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

existir diremos que o limite acima é a **derivada parcial da função $\underline{f}$ em relação a x_j no ponto $\underline{x_o}$** *e será indicada por* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$ *ou* $\partial_{x_j}f(x_o)$, *isto é,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \doteq \lim_{t\to 0}\frac{f(x_o+t\vec{e}_j)-f(x_o)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.39}$$

Observação 5.3.1

1. *Pode ocorrer de uma função possuir todas as derivadas parciais em um ponto mas* **não** *ser diferenciável nesse ponto, como mostra o seguinte exemplo:*

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y) \doteq \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Observemos que a função $\underline{f}$ ***não*** *é contínua em* (x_o, y_o).

De fato, pois

$$\lim_{t\to 0} f(t, 0) = 0, \lim_{t\to 0} f(t^2, t) \qquad = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{(t^2)^2 + (t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

logo ***não*** *existe* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$*, em particular, a função* $\underline{f}$ ***não*** *é contínua em* $(x_o, y_o) \doteq (0, 0)$.

Portanto, pela Obervação (5.2.5) item 2., segue que a função $\underline{f}$ ***não*** *poderá ser diferenciável em* $X_o \doteq (x_o, y_o) \doteq (0, 0)$.

Notemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(X_o + t\vec{e}_1) - f(X_o)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f[(0, 0) + t(1, 0)]}^{=f(t,0)=0} - \overbrace{f(0, 0)}^{=0}}{t} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(X_o + t\vec{e}_2) - f(X_o)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f[(0, 0) + t(0, 1)]}^{=f(0,t)=0} - \overbrace{f(0, 0)}^{=0}}{t} = 0,$$

ou seja, existem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)$ *mas a função* $\underline{f}$ ***não*** *será diferenciável em* $(0, 0)$.

2. *Se* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $f, g : E \to \mathbb{R}$ *são funções tais que, para cada* $j \in \{1, \cdots n\}$ *existem as derivadas parciais* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)$ *e* $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x_o)$ *então existem* $\dfrac{\partial (f \pm g)}{\partial x_j}(x_o)$ *e* $\dfrac{\partial (\lambda f)}{\partial x_j}(x_o)$ *e além disso*

$$\frac{\partial (f \pm g)}{\partial x_j}(x_o) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o) \pm \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_o),$$
$$\frac{\partial (\lambda f)}{\partial x_j}(x_o) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o).$$

Deixaremos a demonstração deste fatos como exercício para o leitor.

3. *Como veremos mais adiante, se a função* $\underline{f}$ *for diferenciável em* x_o *então existirão todas derivadas parciais em* x_o.

4. *Consideremos agora* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *subsconjunto aberto de* R^n, $x_o \in E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função.*

   Para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ *consideremos a função* $f_i : E \to \mathbb{R}$ *de modo que (a i-ésima componete da função* $\underline{f}$*)*

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x)), \quad x \in E.$$

Sejam $\beta_n \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *e* $\beta_m \doteq \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ *as bases canônicas de* $\mathbb{R}^n$ *e*$\mathbb{R}^m$*, respectivamente.*

Notemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$*, teremos*

$$f_i(x) = f(x) \bullet u_i,$$

onde $\bullet$ *denota o produto interno usual de* $\mathbb{R}^m$*.*

Para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ *e para cada* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *se existir o limite existir*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + t\vec{e}_j) - f_i(x_o)}{t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

este será a derivada parcial da i-ésima componente da função $\underline{f}$ *em relação* x_j *no ponto* x_o*, isto é,*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + t\vec{e}_j) - f_i(x_o)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.40}$$

Com isto temos a

Teorema 5.3.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *subsconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*,* $x_o \in E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* x_o*.*

Então para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ *e* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *existe a derivada parcial* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)$ *e além disso*

$$f'(x_o)(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)\, u_i. \tag{5.41}$$

Demonstração:

Como a função $\underline{f}$ função diferenciável em x_o, da Observação (5.2.4) item 3., segue que as funções f_i são diferenciáveis em x_o para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$, ou seja, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ teremos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_o + h) - f_i(x_o) - f_i'(x_o)(h)}{\|h\|} = 0,$$

que é equivalente a (fazendo $k \doteq \dfrac{1}{t} h$, $t \in \mathbb{R}^*$)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + tk) - f_i(x_o) - f_i'(x_o)(tk)}{\underbrace{\|tk\|}_{|t|\,\|k\|}} = 0, \quad k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Com isto teremos

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + t\vec{e}_j) - f_i(x_o)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + t\vec{e}_j) - f_i(x_o) - f_i'(x_o)(t\vec{e}_j) + f_i'(x_o)(t\vec{e}_j)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_o + t\vec{e}_j) - f_i(x_o) - f_i'(x_o)(t\vec{e}_j)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{f_i'(x_o)(t\vec{e}_j)}^{f_i'(x_o) \text{ é linear } =\, t\, f_i'(x_o)(\vec{e}_j)}}{t}$$

$$\overset{k \doteq \vec{e}_j \text{ acima}}{=} 0 + \lim_{t \to 0} \frac{t\, f_i'(x_o)(\vec{e}_j)}{t} = f_i'(x_o)(\vec{e}_j),$$

mostrando que existe a derivada parcial $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)$ e

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o) = f_i'(x_o)(\vec{e}_j), \quad i \in \{1, \cdots, m\},\ j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Como

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, u_i, \quad x \in E$$

e existem as derivadas parciais de cada parcela, logo da Observação acima item 2., segue que

$$f'(x_o)(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)\, u_i,$$

completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.3.2

1. *Na situação acima, consideremos* $\beta_1 \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *e* $\beta_2 \doteq \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ *as bases canônicas de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$*, respectivamente.*

   Afirmamos que

$$\left[f'(x_o)\right]_{\beta_1,\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_o) \end{pmatrix}. \tag{5.42}$$

   De fato, do Teorema acima temos que, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$

$$f'(x_o)(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)\, u_i,$$

   ou seja, a j*-ésima coluna da matriz* $\mathrm{ds}\,[f'(x_o)]_{\beta_1,\beta_2}$ *será*

$$\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_o) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_o) \end{matrix},$$

2. *Em particular, se* $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ *teremos*

$$f'(x_o)(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_o) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_o) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_o) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)\, h_j\right] u_i. \tag{5.43}$$

3. *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a,b] \to E$ *uma curva parametrizada diferenciável e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* E.

   Sejam $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, *as funções componentes associadas a função* γ.

   Definamos a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(t) \doteq f(\gamma(t)), \quad t \in [a,b].$$

   Do Teorema (5.2.1) segue que a função $\underline{g}$ *é diferenciável em* $[a,b]$ *e*

$$g'(t) = f'[\gamma(t)][\gamma'(t)], \quad t \in [a,b].$$

   Como $\gamma'(t) \in L(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ *e* $f'[\gamma(t)] \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *segue que* $g'(t) \in L(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

   Notemos que $L(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *é isomorfo a* $\mathbb{R}$ *(pois ambos têm dimensão* 1*), assim podemos identificar* $g'(t)$ *com um número real.*

   Se $\beta \doteq \{1\}$ *e* $\beta_2 \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *são as bases canônicas de* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^n$, *respectivamente, temos que a matriz da transformação linear* $\gamma'(t)$ *em relação a estas bases será uma matriz coluna* $n \times 1$ *onde ai-ésima linha da mesma será* $\gamma_i'(t)$, *ou seja*

$$[\gamma'(t)]_{\beta_1,\beta_2} = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b].$$

   Por outro lado, a matriz da transforamação linear $f'(x)$ *em relação às bases* β_2 *e* β_1 *será dada por (ver item 1. acima)*

$$\left[f'(x_o)\right]_{\beta_2,\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in E.$$

   Logo a matriz da transformação linear $g'(t)$ *em relação à base* β_1 *será (via Álgebra Linear)*

$$\begin{aligned} [g'(t)]_{\beta_1,\beta_1} &= \left[f'[\gamma(t)][\gamma'(t)]\right]_{\beta_1,\beta_1} \overset{\text{Álg. Linear}}{=} \left[f'[\gamma(t)]\right]_{\beta_2,\beta_1} [\gamma'(t)]_{\beta_1,\beta_2} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}[\gamma(t)] & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}[\gamma(t)] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}[\gamma(t)]\, \gamma_i'(t), \quad t \in [a,b]. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Temos a

Definição 5.3.2 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto em* $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função que possui todas as derivadas parciais em* x_o.

Definimos o **vetor gradiente da função $\underline{f}$ em x_o**, *que será indicado por* $\nabla f(x_o)$, *como sendo*

$$\nabla f(x_o) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_o), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_o)\right) \in \mathbb{R}^n, \tag{5.45}$$

ou

$$\nabla f(x_o) \doteq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o)\, \vec{e}_i, \tag{5.46}$$

onde $\beta \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^n$.

Observação 5.3.3

1. *Voltando a Observação acima item 3., se* $x_o \doteq \gamma(t_o)$, $t_O \in [a, b]$, *como*

$$\gamma'(t_o) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t_o)\,\vec{e}_i$$

segue de (5.44) que

$$g'(t_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}[\gamma(t_o)]\,\gamma_i'(t_o) = \nabla f[\gamma(t_o)] \bullet \gamma'(t_o). \tag{5.47}$$

2. *Notemos que se* $x_o \in E$, *como* E *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, *existírá* $\delta > 0$ *tal que* $B(x_o; \delta) \subseteq E$.

Logo se $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *é um vetor unitário (isto é,* $\|\vec{u}\| = 1$*) e considerarmos a curva parametrizada* $\gamma : (-\delta, \delta) \to E$ *dada por*

$$\gamma(t) \doteq x_o + t\,\vec{u}, \quad t \in (-\delta, \delta), \tag{5.48}$$

segue que γ *será uma curva parametrizada diferenciável em* E *e*

$$\gamma'(t) = \vec{u}, \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Logo, de (5.47), segue que

$$g'(0) = \nabla f[\gamma(0)] \bullet \gamma'(0) = \nabla f(x_o) \bullet \vec{u}. \tag{5.49}$$

Por outro lado temos que

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o + t\vec{u}) - f(x_o)}{t}. \tag{5.50}$$

Com isto temos a:

Definição 5.3.3 *Na situação acima, o limite (5.50) (quando existir) será denominado* **derivada direcional da função f em x_o na direção do vetor $\vec{u}$** *e indicada por* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$.

Observação 5.3.4

1. *Notemos que o vetor* $\vec{u}$ *na Definição acima deve ser untiário.*

2. *De (5.49) e (5.50) segue que se existirem todas as derivadas parciais da função f em* x_o *existirá a derivada direcional da função f em* x_o *na direção de qualquer vetor unitario* $\vec{u}$ *e além disso*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) = \nabla f(x_o) \bullet \vec{u}. \tag{5.51}$$

3. *Na situação acima, se* $\nabla f(x_o) \neq \vec{O}$ *e considerarmos vetores unitários* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, *teremos que* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *atingirá seu valor máximo quando o vetor* $\vec{u}$ *for multiplo positivo do vetor* $\nabla f(x_o)$.

De fato pois se $\theta \in [0, 2\pi)$ *nos fornece o ângulo entre os vetores* $\vec{u}$ *e* $\nabla f(x_o)$ *segue que*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) &= \nabla f(x_o) \bullet \vec{u} = \|\nabla f(x_o)\| \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cos(\theta) \\ &= \|\nabla f(x_o)\| \cos(\theta),\end{aligned}$$

ou seja, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *atingirá seu valor máximo quando* $\theta = 0$*, isto é, quando o vetor* $\vec{u}$ *for multiplo positivo do vetor* $\nabla f(x_o)$*, mais precisamente se,*

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|}$$

e neste caso $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *será igual a* $\|\nabla f(x_o)\|$*.*

4. *Por outro lado,* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *atingirá seu valor mínimo quando*

$$\vec{u} = -\frac{\nabla f(x_o)}{\|\nabla f(x_o)\|},$$

pois neste caso $\theta = \pi$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o)$ *será igual a* $-\|\nabla f(x_o)\|$*.*

5. *Se* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *é um vetor unitário tal que*

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \vec{e}_i,$$

onde $\beta \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ *é a base canônica do* $\mathbb{R}^n$ *segue, de (5.46), que*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) &\overset{(5.51)}{=} \nabla f(x_o) \bullet \vec{u} = \nabla f(x_o) \bullet \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \, \vec{e}_i\right) \\ &\overset{\text{Prop. Produto interno}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i \left(\underbrace{\nabla f(x_o) \bullet \vec{e}_i}_{\overset{(5.46)}{=}}\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_o) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) u_i. \tag{5.52}$$

A seguir enunciaremos alguns resultados importantes que são consequência da diferenciabilidade de uma função de várias variáveis reais tomando valores num espaço euclideano.

Começaremos pelo **Desigualdade do valor médio**, mais precisamente:

Teorema 5.3.2 *Suponhamos que a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *seja contínua em* $[a, b]$ *e diferenciável em* (a, b)*.*

Então existe $t_o \in (a, b)$ *tal que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(x)\|(b - a). \tag{5.53}$$

Demonstração:

Seja

$$z \doteq f(b) - f(a) \in \mathbb{R}^n \tag{5.54}$$

e consideremos a função $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(t) \doteq z \bullet f(t), \quad t \in [a, b].$$

Como a a função $\underline{f}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) segue que a função $\underline{\phi}$ será contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

Logo pelo Teorema do valor médio (de Análise I) segue que existe $t_o \in (a, b)$ tal que

$$\phi(b) - \phi(a) = \phi'(t_o)(b - a). \tag{5.55}$$

Mas

$$\phi'(t) = z \bullet f'(t)$$

logo (5.55) tornar-se-á

$$\phi(b) - \phi(a) = [z \bullet f'(t_o)](b - a). \tag{5.56}$$

Temos também

$$\phi(b) - \phi(a) = z \bullet f(b) - z \bullet f(a) = z \bullet \underbrace{[f(b) - f(a)]}_{\overset{(5.54)}{=} z} = z \bullet z = \|z\|^2 \geq 0, \tag{5.57}$$

assim

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\overset{(5.57)}{=} |\phi(b) - \phi(a)| \overset{(5.56)}{=} |z \bullet f'(t_o)|(b - a) \\ &\overset{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|z\| \, \|f'(t_o)\|(b - a). \end{aligned} \tag{5.58}$$

Se $z = \vec{O}$, isto é, $f(b) = f(a)$ nada temos a fazer pois o lado direito de (5.53) será igual a zero.

Se $z \neq \vec{O}$ teremos $\|z\| > 0$ e (5.58) implicará (5.53), completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o

Corolário 5.3.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto convexo de* $\mathbb{R}^n$ *(isto é, se* $x, y \in E$ *devemos ter* $tx + (1 - t)y \in E$ *para* $t \in [0, 1]$*) e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *uma função diferenciável em* E *tal que existe* $M > 0$ *tal que*

$$\|f'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} \leq M, \quad \textit{para todo} \quad x \in E. \tag{5.59}$$

Então

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \quad \textit{para todo} \quad x, y \in E. \tag{5.60}$$

Demonstração:

Sejam $x, y \in E$.

Consideremos $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ a curva parametrizada diferenciável dada por

$$\gamma(t) \doteq (1 - t)x + ty, \quad t \in [0, 1].$$

Observemos que

$$\gamma'(t) = y - x, \quad t \in [0, 1].$$

Como o conjunto E é convexo segue que $\gamma(t) \in E$ para todo $t \in [0, a]$.

Definamos a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ por

$$g(t) \doteq f[\gamma(t)], \quad t \in [0, 1].$$

Notemos que

$$g(1) = f[\overbrace{\gamma(1)}^{=y}] = f(y), \tag{5.61}$$

$$g(0) = f[\underbrace{\gamma(0)}_{=x}] = f(x), \tag{5.62}$$

Como as funções $\underline{f}$ e γ são diferenciáveis em E e $[0, 1]$, respectivamente, segue que a função $\underline{g}$ será diferenciável em $[0, 1]$, em particular, será contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$.

Notemos que, da Regra da Cadeia, teremos

$$g'(t) = f'[\gamma(t)] \bullet \underbrace{\gamma'(t)}_{=y-x} = f'[\gamma(t)] \bullet (y - x), \quad t \in [0, 1],$$

logo

$$\|g'(t)\| = \|f'[\gamma(t)] \bullet (y - x)\| \overset{\text{Des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \underbrace{\|f'[\gamma(t)]\|}_{\text{Hipótese } \leq M} \|y - x\|$$

$$\leq M\|y - x\|. \tag{5.63}$$

Logo do Teorema (5.3.2) segue que existe $t_o \in (0, 1)$ tal que

$$\|f(y) - f(x)\| \overset{(5.61),(5.62))}{=} \|g(1) - g(0)\| \leq \|g'(t_o)\||1 - 0| = \|g'(t_o)\| \overset{(5.63}{\leq} M\|y - x\|,$$

obtendo (5.60), completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.3.5 *O resultado acima nos diz que se a função $\underline{f}$ tem derivada uniformemente limitada em um subconjunto aberto e convexo de $\mathbb{R}^n$ então ela será Lipschtiziana em E.*

Como consequência deste temos o:

Corolário 5.3.2 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto convexo de $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em E tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in E$.*

Então a função $\underline{f}$ será constante em E, ou seja, se $x_o \in E$ teremos

$$f(x) = f(x_o), \quad x \in E.$$

Demonstração:

Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in E$ segue que

$$M \doteq \|f'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)} = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Logo do resultado acima segue que

$$\|f(x) - f(x_o)\| \leq M\|x - x_o\| = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in E,$$

ou seja, $f(x) = f(x_o)$, $x \in E$, completando a demonstração do resultado.

□

Temos a

Definição 5.3.4 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em E.*

Diremso que a função $\underline{f}$ é **<u>continuamente diferenciável em E</u>** *se a função $f' : E \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ for contínua em E, ou seja, se para cada $x_o \in E$, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se*

$$\|x - x_o\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \quad \text{teremos} \quad \|f'(x) - f'(x_o)\|_{L(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)} < \varepsilon. \tag{5.64}$$

O conjunto formado por todas as funções continuamente diferenciável em E tomando valores em $\mathbb{R}^m$ será denotado por $C^1(E; \mathbb{R}^m)$.

Observação 5.3.6 *Será deixado como exercício para o leitor mostrar que $(C^1(E; \mathbb{R}^m), +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde $+$ e $\cdot$ denotam a soma de funções e a multiplicação de uma função por um número real, respectivamente.*

Com isto temos a seguinte caracterização dos elementos de $C^1(E; \mathbb{R}^m)$:

Teorema 5.3.3 *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to \mathbb{R}^m$ uma função.*

Então $f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$ se, e somente se, existem e são contínuas todas as derivadas parciais da função $\underline{f}$ em E.

<u>Demonstração:</u>

Suponhamos que $f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$ e $x_o \in E$.

Do Teorema (5.3.1) temos que existem todas as derivadas parciais da função $\underline{f}$ em E.

Além disso, para $x \in E$, se $\beta_n \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ e $\beta_m \doteq \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ são as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$, de (5.41), segue que

$$[f'(x)(\vec{e}_j)] \bullet u_k \overset{(5.41)}{=} \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o) u_i\right] \bullet u_k$$
$$\overset{\text{Prop. produto interno}}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o)(\underbrace{u_i \bullet u_k}_{=\begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}}) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_o).$$

Logo, apra $x \in E$ teremos

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_o) = [f'(x)(\vec{e}_j)] \bullet u_k - [f'(x_o)(\vec{e}_j)] \bullet u_k = [f'(x)(\vec{e}_j) - f'(x_o)(\vec{e}_j)] \bullet u_k,$$

assim

$$\left\|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_o)\right\| = \|[f'(x)(\vec{e}_j) - f'(x_o)(\vec{e}_j)] \bullet u_k\| \overset{\text{Des. Cauchy Schwarz}}{\leq} \|f'(x)(\vec{e}_j) - f'(x_o)(\vec{e}_j)\| \underbrace{\|u_k\|}_{=1}$$
$$\leq \|[f'(x) - f'(x_o)](\vec{e}_j)\| \leq \|f'(x) - f'(x_o)\|_{L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)},$$

e como $f' : E \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ for contínua em E segue que todas as derivadas parciais da função $\underline{f}$ em E.

Notemos que basta mostrar que a recíproca vale para $m = 1$ pois cada componente $\underline{f_i}$ da função $\underline{f}$ pertence a $C^1(E; \mathbb{R})$ segue que $f \in C^1(E; \mathbb{R}^m)$.

Deixaremos a verificação desta afirmação como exercício para o leitor.

Suponhamos que todas as derivadas parciais da função $f : E \to \mathbb{R}$ sejam contínuas em E.

Sejam $x_o \in E$ e $\varepsilon > 0$.

Como o conjunto E é aberto em $\mathbb{R}^n$ deverá existir $\delta > 0$ tal que

$$B(x_o;\delta) \subseteq E.$$

Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$ a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ é contínua em x_o, podemos encontrar $\delta_j > 0$, $\delta_j < \delta$, tal que se

$$x \in B(x_o;\delta_j) \quad \text{teremos} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right| < \frac{\varepsilon}{n},$$

logo tomando-se

$$\delta_o = \min\{1,\ \delta_j\,;\, j \in \{1, \cdots, n\}\},$$

segue que, para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$, se

$$x \in B(x_o;\delta_o) \quad \text{teremos} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right| < \frac{\varepsilon}{n}, \tag{5.65}$$

Seja $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|h\| < \delta_o$, com

$$h = \sum_{i=1}^{n} h_j\,\vec{e}_j,$$

onde $\beta_n \doteq \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ é base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Notemos que neste caso $x_o + h \in E$.

Consideremos, para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\vec{v}_o \doteq \vec{O} \quad \text{e} \quad \vec{v}_k \doteq h_1\,\vec{e}_1 + \cdots + h_k\,\vec{e}_k. \tag{5.66}$$

Com isto teremos

$$f(x_o + h) - f(x_o) \overset{\text{soma telescópica}}{=} [f(x_o + \vec{v}_1) - f(x_o - \underbrace{\vec{v}_o}_{=\vec{O}})] + \cdots + [f(x_o + \vec{v}_n) - f(x_o - \vec{v}_{n-1})]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [f(x_o + \vec{v}_j) - f(x_o - \vec{v}_{j-1})]. \tag{5.67}$$

Para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$ temos que

$$\|v_k\| \overset{(5.66)}{=} \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_k^2} \leq \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_k^2 + h_{k+1}^2 + \cdots + h_h^2} = \|h\| < r_o$$

e a bola aberta $B(x_o;r_o)$ é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ segue que o segmento de reta de extremos $x_o + v_{j-1}$ e $x_o + v_j$ estará contido em $B(x_o;r_o)$.

Notemos que

$$\vec{v}_j = \vec{v}_{j-1} + h_j\vec{e}_j, \quad \text{para} \quad j \in \{1, \cdots, n-1\}.$$

Suponhamos que $h_j > 0$ (o caso $h_j \leq 0$ é semelhante e será deixado como exercício para o leitor) e considerarmos a função $g_j : [0, h_j] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_j(t) \doteq f(x_o + \vec{v}_{j-1} + t\vec{e}_j), \quad t \in [0, h_j].$$

Observação 5.3.7 *Notemos que o traço da curva parametrizada* $t \mapsto x_o + \vec{v}_{j-1} + t\vec{e}_j$, $t \in [0, h_j]$ *é o segmento de reta que liga os pontos* $x_o + \vec{v}_{j-1}$ *ao ponto* $x_o + \vec{v}_j$ *e que está contido em* $B(x_o;\delta_o)$*, deste modo a função* $\underline{g}$ *é a restrição da função* $\underline{f}$ *a esse segmento de reta.*

Observemos que para cada $t_o \in (0, h_j)$ (para $t_o = 0$ ou $t_o = h_j$ teremos algo semelhante trocando-se o limite abaixo pelos respectivos limites laterais) segue que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{g(t+t_o)-g(t_o)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f[x_o+\vec{v}_{j-1}+(t+t_o)\vec{e}_j]-f(x_o+\vec{v}_{j-1}+t_o\vec{e}_j)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f([(x_o+\vec{v}_{j-1}+t_o\vec{e}_j)+t\vec{e}_j]-f(x_o+\vec{v}_{j-1}+t_o\vec{e}_j)}{t}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o+\vec{v}_{j-1}+t_o\vec{e}_j),\end{aligned}$$

ou seja, a função $\underline{g}$ será contínuamente diferenciável em $[0, h_j]$ e

$$g_j'(t_o) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o+\vec{v}_{j-1}+t_o\vec{e}_j). \tag{5.68}$$

Assim podemos aplicar o Teorema do Valor Médio à função $\underline{g}$ no intervalo $[0, h_j]$ e assim obter $\theta_j \in [0, h_j]$ tal que

$$\overbrace{g_j(h_j)}^{=f(\overbrace{x_o+\vec{v}_{j-1}+h_j\vec{e}_j}^{=x_o+\vec{v}_j})} - \overbrace{g_j(0)}^{=f(\overbrace{x_o+\vec{v}_{j-1}+0.\vec{e}_j}^{=x_o\vec{v}_{j-1}})} = g_j'(\theta_j)\,h_j \overset{(5.68)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o+\vec{v}_{j-1}+\theta_j\vec{e}_j)\;h_j,$$

ou seja,

$$f(x_o+\vec{v}_j)-f(x_o+\vec{v}_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o+\vec{v}_{j-1}+\theta_j\vec{e}_j)\,h_j. \tag{5.69}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|f(x_o+h)-f(x_o)-\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right| &\overset{(5.67)}{=} \left|\sum_{j=1}^{n}[f(x_o+\vec{v}_j)-f(x_o-\vec{v}_{j-1})]-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\,h_j\right|\\ &\overset{(5.69)}{=} \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o+\vec{v}_{j-1}+\theta_j\vec{e}_j)\,h_j-\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right|\\ &\le \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o+\vec{v}_{j-1}+\theta_j\vec{e}_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\right|}_{\underset{<\,\frac{\varepsilon}{n}}{|(x_o+\vec{v}_{j-1}+\theta_j\vec{e}_j)-x_o|=|\vec{v}_{j-1}+\theta_j\vec{e}_j|\le|h_j|<\delta_o,\ \text{logo }(5.65)}}\underbrace{|h_j|}_{\le\|h\|}\\ &< \sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}\|h\| = \frac{\varepsilon}{n}\|h\|n < \varepsilon\|h\|,\end{aligned} \tag{5.70}$$

ou seja, se considerarmos a transformação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$A(h) \doteq \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_o)\,h_j,$$

onde $h = \sum_{i=1}^{n} h_j\vec{e}_j$, segue, de (5.70), que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_o+h)-f(x_o)-A(h)|}{\|h\|} = 0,$$

mostrando que a função $\underline{f}$ é diferenciável em $x_o \in E$, logo será diferenciável em E e além disso

$$f'(x)h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, h_j \tag{5.71}$$

onde $h = \sum_{i=1}^{n} h_j \vec{e}_j$.

Como as derivadas parciais da função $\underline{f}$ são contínuas em E segue, de (5.71), que a a função f' será contínua em E, ou seja, $f \in C^1(E;\mathbb{R})$, completando a demonstração.

□

5.4 Ponto fixo de uma função

Nosso obejtivo nesta seção é exibirmos um resultado que garante a existência de um, único, ponto fixo de uma função "especial" definida em um espaço métrico "especial".

Para sito omeçaremos pela

Definição 5.4.1 *Sejam X um conjunto não vazio, $x_o \in X$ e $f : X \to X$ uma função.*

Diremos que x_o é um **ponto fixo da função $\underline{f}$** *se*

$$f(x_o) = x_o.$$

Para exibir o resultado citado acima precisaremos da

Definição 5.4.2 *Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma função.*

Diremos que a função $\underline{f}$ é uma **contração em X** *se existir $c \in [0, 1)$ tal que*

$$d[f(x), f(y)] \le c\, d(x, y), \quad \textit{para todo} \quad x, y \in X.$$

Observação 5.4.1 *Toda contração é uma função contínua.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto temos o **Teorema do ponto fixo de Banach**:

Teorema 5.4.1 *Se (X, d) é um espaço métrico completo e a função $f : X \to X$ é um contração então existe um, e somente um, ponto fixo da função $\underline{f}$.*

Demonstração:

Começaremos provando a unicidade:

Para isto sejam $x_1, x_2 \in X$ pontos fixos da função $\underline{f}$.

Então

$$d(x_1, x_2) \overset{f(x_1)=x_1,\, f(x_2=x_2}{=} d[f(x_1), f(x_2)] \le c\, d(x_1, x_2) \;\Rightarrow\; 0 \le \underbrace{(1-c)}_{>0} d(x_1, x_2) \le 0$$

$$\Rightarrow\; d(x_1, x_2) = 0 \;\Rightarrow x_1 = x_2,$$

mostrando a unicidade do ponto fixo da função $\underline{f}$.

Mostremos a existência do ponto fixo da função $\underline{f}$.

Seja $x_o \in X$ qualquer.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos

$$x_{n+1} \doteq f(x_n). \tag{5.72}$$

Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$d(x_{n+1}, x_n) \overset{(5.72)}{=} d[f(x_n), f(x_{n-1})] \overset{f \text{ é contração}}{\leq} c\, d(x_n, x_{n-1}),$$

com isto, por indução, podemos mostrar (será deixado como exercício para o leitor) que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n\, d(x_1, x_o), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.73}$$

Logo, se $m > n$ segue que

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\overset{\text{Des. triangular}}{\leq} d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) = \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i-1}) \\ &\overset{(5.73))}{\leq} (c^n + c^{n-1} + \cdots + c^{m-1})\, d(x_1, x_o) = c^n(1 + c + \cdots + c^{m-n-1})\, d(x_1, x_o) \\ &= c^n \frac{d(x_1, x_o)}{1 - c}. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Como $c \in [0, 1)$, segue que a sequência $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente para zero, ou seja, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será um sequência de Cauchy em X.

Mas (X, d) é um espaço métrico completo, logo existe o limte

$$x \doteq \lim_{n\to\infty} x_n \in X.$$

Como a função $\underline{f}$ é uma contração em X, segue que ela será uma função contínua em X, logo

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \overset{f \text{ é contínua}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x, \tag{5.75}$$

ou seja, $f(x) = x$, portanto a função $\underline{f}$ tem um ponto fixo em X, completando a demonstração do resultado.

□

Observação 5.4.2 *A demonstração acima nos fornece um modo de encontrar o ponto fixo da função* $\underline{f}$.

Basta escolher $x_o \in X$ *qualquer e encontrar o limite da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* X, *para*

$$x_n \doteq f^n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

onde

$$f^n \doteq \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{fatores}}.$$

5.5 O Teorema da função inversa

Nesta seção utiizaremos o Teorema do ponto fixo de Banach para provar um resultado sobre a contínua diferenciabilidae da função inversa (local) associada uma função continuamente diferenciável e "bem comportada", mais precisamente:

Teorema 5.5.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, $x_o \in E$ *e* $f \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$ *tal que* $f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n)$ *seja um operador linear inversível e* $y_o \doteq f(x_o)$.

Então

1. *existem subconjuntos* $U = U(x_o) \subseteq E$ *e* $V = V(y_o)$ *abertos em* $\mathbb{R}^n$, *contendo* x_o *e* y_o, *respectivamente, tais que* $f : U \to V$ *é bijetora (ou seja, a função* $\underline{f}$ *admite uma função inversa* $f^{-1} : V \to U$, *localmente em* x_o*).*

2. $f^{-1} \in C^1(V;\mathbb{R}^n)$.

Demonstração:

De 1.:

Seja

$$A \doteq f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n).$$

Como $f'(x_o) \in L(\mathbb{R}^n)$ seja um operador linear inversível segue que $\|A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \neq 0$ assim podemos considerar

$$\lambda \doteq \frac{1}{2\|A^{-1}\|_{L\mathbb{R}^n}} > 0. \tag{5.76}$$

Como a função $\underline{f'}$ é contínua em x_o e E é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ segue que existe $r > 0$ tal que $\overline{B(x_o;r)} \subseteq E$ e se

$$x \in \overline{B(x_o;r)}, \quad \text{teremos} \quad \|f'(x) - A\|_{L\mathbb{R}^n} < \lambda. \tag{5.77}$$

Para cada $y \in E$ fixado, consideremos a função $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(x) \doteq x + A^{-1}\left[y - f(x)\right], \quad x \in E. \tag{5.78}$$

Notemos que existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$ se, e somente se, existe $x \in E$ tal que $y - f(x) = 0$ que é equivalente a existir $x \in E$ tal que $A^{-1}\left[y - f(x)\right] = 0$ ou ainda, existir $x \in E$ tal que $x + A^{-1}\left[y - f(x)\right] = x$, isto é, existir $x \in E$ tal que $\varphi(x) = x$, ou seja, existir $x \in E$ ponto fixo da função φ. (*)

Observemos que $\varphi \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$ (pois $f, A \in C^1(E;\mathbb{R}^n)$) e além disso (verifique!)

$$\varphi'(x) = I_n - A^{-1}f'(x), \quad x \in E,$$

onde $I_n \in L(\mathbb{R}^n)$ denota o operador identidade em $\mathbb{R}^n$.

Logo, da Proposição (5.1.1) item 3. (isto é (5.3)), segue que

$$\begin{aligned}\|\varphi'(x)\|_{L(\mathbb{R}^n)} &= \|I - A^1[f'(x)]\|_{L(\mathbb{R}^n)} = \|A^{-1}\left[A - f'(x)\right]\|_{L(\mathbb{R}^n)} \\ &\overset{(5.3)}{\leq} \underbrace{\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}\|}_{\overset{(5.76)}{=}\frac{1}{2\lambda}} \underbrace{\|\left[A - f'(x)\right]\|_{L(\mathbb{R}^n)}}_{\overset{(5.77)}{<}\lambda} = \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}, \quad x \in \overline{B(x_o;r)},\end{aligned}$$

logo pelo Corolário (5.3.1) segue que

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \overline{B(x_o;r)}. \tag{5.79}$$

Escolha $y \in B\left(f(x_o); r\lambda\right)$, assim

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_o) - x_o\| &= \|\left(x_o + A^{-1}\left[y - f(x_o)\right]\right) - x_o\| = \|A^{-1}\left[y - f(x_o)\right]\| \\ &\leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\stackrel{(5.76)}{=}\frac{1}{2\lambda}} \underbrace{\|y - f(x_o)\|}_{\stackrel{y\in B(f(x_o);r\lambda)}{<} r\lambda} < \frac{1}{2\lambda} r\lambda = \frac{1}{2} r,\end{aligned} \tag{5.80}$$

logo se $x \in \overline{B(x_o; r)}$ teremos

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - x_o\| &= \|[\varphi(x) - \varphi(x_o)] + [\varphi(x_o) - x_o]\| \\ &\leq \underbrace{\|\varphi(x) - \varphi(x_o)\|}_{\stackrel{(5.79)}{\leq}\frac{1}{2}\underbrace{\|x - x_o\|}_{<r} < \frac{1}{2} r} + \underbrace{\|\varphi(x_o) - x_o\|}_{\stackrel{(5.80)}{<}\frac{1}{2} r} < \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r = r,\end{aligned} \tag{5.81}$$

ou seja, (5.81) mostra que $\varphi : \overline{B(x_o; r)} \to \overline{B(x_o; r)}$ e (5.79) que esta função será uma contração em $\overline{B(x_o; r)}$, que é um esapço métrico completo (pois um subconjunto fechado de um esapço métrico completo será um esapço métrico completo, verifique!).

Portanto o Teorema de ponto fixo de Banach (isto é, o Teorema (5.4.1)) implicará que existe um único ponto fixo da função φ em $\overline{B(x_o; r)}$, isto é, existe um único $\bar{x} \in \overline{B(x_o; r)}$ tal que $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $\bar{x} \in B(x_o; r)$ (basta diminuir o $r > 0$, se necessário).

De (*) acima segue que a função $\underline{f}$ será injetora em U.

Consideremos

$$U \doteq B(x_o; r), \quad V \doteq f(U) \quad \text{e} \quad y_1 \in V. \tag{5.82}$$

Com isto teremos que a função $f : U \to V$ será bijetor, logo existe um único $x_1 \in U$ tal que $f(x_1) = y_1$.

Para completar a demonstração do item 1. basta mostrar que V é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Para isto, seja $r_o \in (0, r)$ tal que $\overline{B(x_1; r_o)} \subseteq U$.

Afirmamos que se $y \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\|y - y_1\| < \lambda r_o \quad \text{então} \quad y \in V,$$

em particular, teremos que $V = f(U)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ (pois se $y_1 \in V$ teremos $B(y_1; r_o\lambda) \subseteq V$).

De fato, suponhamos que $\|y - y_1\| < \lambda r_o$, ou seja, $y \in B\left(y_1; r_o\lambda\right)$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_1) - x_1\| &= \|\left(x_1 + A^{-1}\left[y - f(x_1)\right]\right) - x_1\| = \|A^{-1}\left[y - \underbrace{f(x_1)}_{=y_1}\right]\| \\ &\leq \underbrace{\|A^{-1}\|}_{\stackrel{(5.76)}{=}\frac{1}{2\lambda}} \underbrace{\|y - y_1\|}_{\stackrel{y\in B(y_1;r_o\lambda)}{<} r_o\lambda} < \frac{1}{2\lambda} r_o\lambda = \frac{1}{2} r_o,\end{aligned} \tag{5.83}$$

logo se $x \in \overline{B(x_o; r)}$ teremos

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - x_o\| &= \|[\varphi(x) - \varphi(x_o)] + [\varphi(x_o) - x_o]\| \\ &\leq \underbrace{\|\varphi(x) - \varphi(x_o)\|}_{\stackrel{(5.79)}{\leq}\frac{1}{2}\underbrace{\|x - x_o\|}_{<r_o} < \frac{1}{2} r_o} + \underbrace{\|\varphi(x_o) - x_o\|}_{\stackrel{(5.83)}{<}\frac{1}{2} r_o} < \frac{1}{2} r_o + \frac{1}{2} r_o = r_o,\end{aligned} \tag{5.84}$$

ou seja, (5.84) mostra que $\varphi : \overline{B(x_1;r)} \to \overline{B(x_1;r)}$.

Notemos que podemos mostrar (5.79) em $B(x_1;r_o)$ (deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor).

Assim a função acima será uma contração em $\overline{B(x_1;r_o)}$, que é um espaço métrico completo, logo existe um único $x \in \overline{B(x_1;r_o)}$ tal que $f(x) = y$, mostrando que $y \in f(U) = V$, completando a demonstração da afirmação 1. .

De 2.:

Como V é aberto em $\mathbb{R}^n$, dado $y \in V$ existirá $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{O}\}$ tal que $y + k \in V$.

Do ite 1. segue que existem $x, h \in U$ tais que

$$f(x) = y \quad \text{e} \quad f(x+h) = y + k. \tag{5.85}$$

Logo

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \left\{ (x+h) + \overbrace{A^{-1}[y - f(x+h)]}^{=A^{-1}(y)+A^{-1}[f(x+h)]} \right\} - \left\{ x + \overbrace{A^{-1}[y - f(x)]}^{=A^{-1}(y)+A^{-1}[f(x)]} \right\}$$

$$= h + A^{-1}\left[\underbrace{\underbrace{f(x)}_{=y} - \underbrace{f(x+h)}_{=y+k}}_{=-k} \right] = h - A^{-1}(k),$$

logo

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| = \|h - A^{-1}(k)\| \geq \|h\| - \|A^{-1}(k)\|. \tag{5.86}$$

Por outro lado, de (5.79) teremos

$$\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| \overset{x,x+h \in U,\ \text{logo}\ (5.79)}{\leq} \frac{1}{2}\|(x+h) - x\| = \frac{1}{2}\|h\|. \tag{5.87}$$

Logo de (5.86) e (5.87) segue que

$$\|h\| - \|A^{-1}(k)\| \leq \frac{1}{2}\|h\| \quad \Rightarrow \quad \|h\| \leq \|A^{-1}(k)\| \leq \underbrace{2\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}}_{\overset{(5.76)}{=} \frac{1}{\lambda}} \|k\| = \frac{1}{\lambda}\|k\| \tag{5.88}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\|k\|} \leq \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\|h\|} \tag{5.89}$$

Mas

$$1 \overset{(5.77)}{>} \frac{1}{\lambda}\|f'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)} \overset{(5.76)}{=} 2\|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^n)}\|f'(x) - A\|_{L(\mathbb{R}^n)},$$

logo do Teorema (5.1.1) item 1., segue que, o operador linear $f'(x)$ admite inversa (ou seja, será um operador linear inversível), para cada $x \in U$ que, por simplicidade, chamaremos de T (ou sejam $T \doteq [f'(x)]^{-1}$).

Denotemos a função inversa associada a função $f : U \to V$ por $\underline{g}$ (isto é, $g \doteq f^{-1}$).

Como isto teremos

$$g(y+k) - g(y) - T(k) \overset{(5.85)}{=} (x+h) - x - T(k) = \underbrace{h}_{=T[f'(x)(h)]} - T(\underbrace{k}_{\overset{(5.85)}{=} f(x+h) - f(x)})$$

$$= T\left[f'(x)(h) - f(x+h) + f(x)\right] = -T\left[f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\right], \tag{5.90}$$

logo,

$$\frac{\|g(y+k)-g(y)-T(k)\|}{\|k\|} \overset{(5.90)}{\leq} \overbrace{\frac{1}{\|k\|}}^{\overset{(5.89)}{\leq} \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\|h\|}} \| - T\left[f(x+h)-f(x)-f'(x)(h)\right]\|$$
$$\leq \|T\|_{L(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\lambda} \frac{\|f(x+h)-f(x)-f'(x)(h)\|}{\|h\|}. \tag{5.91}$$

Portanto quando $k \to 0$, de (5.88) segue que $h \to 0$, assim o lado direito de (5.91) vai para zero pois a função $\underline{f}$ é diferenciável em $\underline{x}$, assim a função $g = f^{-1}$ será diferenciável em $y \in V$.

Além disso
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = g'(y) = T = \left[f'(x)\right]^{-1}, \quad y = f(x) \in V.$$

Notemos que a função $\underline{g}$ será contínua em V pois é diferenciável em V.

Como, por hipótese, a função $f' : U \to L(\mathbb{R}^n)$ é contínua em U e a aplicação que leva um operador linear inversível no seu operador linear inverso é uma aplicação contínua na norma de $L(\mathbb{R}^n)$ (deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor) segue que a função g' será contínua em V, mostrando que $f^{-1} = g \in C^1(V; U)$, completando a demonstração do resultado.

□

Como consequência temos o

Corolário 5.5.1 *Sejam* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, Ω *como no Teorema (5.1.1),* $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ *tal que* $f'(x) \in \Omega$, *para* $x \in E$.

Se $W \subseteq E$ *é aberto em* E *então* $f(W)$ *é aberto em* $\mathbb{R}^n$, *ou seja, a aplicação* $\underline{f}$ *é uma aplicação aberta.*

Demonstração:

Se $y \in f(W)$, existe $x \in W$ tal que $f(x) = y$.

Pelo item 1. do resultado acima existirá $U = U(x)$ subconjunto aberto contido em W tal que $y \in V \doteq f(U) \subseteq f(W)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, ou seja, $f(W)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

□

5.6 Teorema da função implícita

Para finalizar enunciaremos e provaremos o **Teorema da função implícita**.

Antes porém faremos algumas observações e introduziremos algumas notações:

Observação 5.6.1

1. *Sejam* E *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^2$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* E.

   Suponhamos que $(x_o, y_o) \in E$ *é tal que*
   $$f(x_o, y_o) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0.$$

   Então, no curso de Cáculo II, mostra-se que existem vizinhanças $U = U(x_o)$ *e* $V = V(y_o)$ *tal que* $U \times V \subseteq E$ *e uma função* $y : U \to V$, *diferenciável em* U *de modo que*
   $$f[x, y(x)] = 0, \quad x \in U.$$

2. *A hipósete* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$ *falhara a conclusão pode ser falsa como mostra o seguinte exemplo: consideremos* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por*

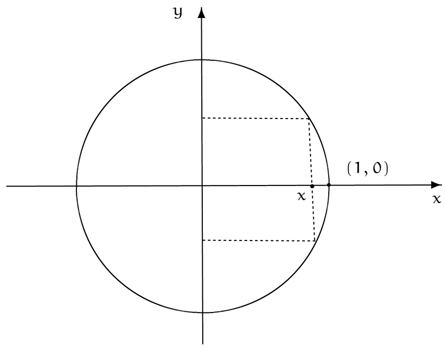
$$f(x, y) \doteq x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Notemos que a função $f : E \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}^2$ *e*

$$f(1, 0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2.0 = 0$$

e **não** *existe nenhuma vizinhança de* $(x_o, y_o) \doteq (1, 0)$ *de modo que possamos escrever* $y = y(x)$ *em uma vizinhança de* $x_o = 1$ *tal que (veja figura abaixo)*

$$f[x, y(x)] = 0.$$



3. *Na situação do item 1., se* $(x_o, y_o) \in E$ *é tal que*

$$f(x_o, y_o) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \neq 0.$$

Então, no curso de Cáculo II, mostra-se que existem vizinhanças $U = U(x_o)$ *e* $V = V(y_o)$ *tal que* $U \times V \subseteq E$ *e uma função* $x : V \to U$*, diferenciável em* V *de modo que*

$$f[x(y), y] = 0, \quad y \in V.$$

4. *A seguir exibiremos uma versão mais geral do resultado apresentado no curso de Cáclulo II.*

5. *No enunciado e na demonstração do resultado que virá a seguir utilizaremos a seguinte notação:*

   Se $x \doteq (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $y \doteq (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ *então*

$$(x, y) \doteq (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

   Se $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$ *então podemos decompor a transformação linear* A *em duas transformações lineares,* $A_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e* $A_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *dadas por*

$$A_x(h) \doteq A(h, O_m), \quad h \in \mathbb{R}^n,$$
$$A_y(h) \doteq A(O_n, k), \quad k \in \mathbb{R}^m,$$

onde

$$O_n \doteq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n \quad e \quad O_m \doteq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$ *e* $A_y \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$.

No caso acima segue que se $(h, k) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *então*

$$\begin{aligned} A(h,k) &= A\left[(h, O_m) + (O_n, k)\right] \overset{A \text{ é linear}}{=} A(h, O_m) + A(O_n, k) \\ &= A_x(h, O_m) + A_y(O_n, k). \end{aligned} \tag{5.92}$$

Notemos também que

$$\|A_x(h)\| = \|A(h, O_m)\| \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n};\mathbb{R}^n)} \overbrace{\|(h, O_m)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}^{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n};\mathbb{R}^n)} \|h\|_{\mathbb{R}^n},$$

ou seja, o operador linear A_x *é limitado em* $\mathbb{R}^n$.

De modo semelhante temos

$$\|A_y(k)\| \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^{m+n};\mathbb{R}^n)} \|k\|_{\mathbb{R}^m},$$

ou seja, uma transformação linear A_y *é limitado em* $\mathbb{R}^m$.

Com isto podemos enuciar e provar um **Teorema da função implícita** par transformações lineares, mais precisamente:

Proposição 5.6.1 *Seja* $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$ *tal que* $A_x \in L(\mathbb{R}^n)$ *é inversível.*

Então para cada $k \in \mathbb{R}^m$, *existe um único* $h \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$A(h, k) = O_n \tag{5.93}$$

e além disso

$$h = -A_x^{-1}\left[A_y(h)\right]. \tag{5.94}$$

Demonstração:

Observemos que para cada $k \in \mathbb{R}^m$ temos que

$$A(h,k) = O_n \quad \overset{(5.92)}{\Leftrightarrow} \quad A_x(h) + A_y(k) = O_n \quad \overset{\text{existe } A_x^{-1} \in L(\mathbb{R}^n)}{\Leftrightarrow} \quad h = -A_x^{-1}\left[A_y(h)\right].$$

□

Observação 5.6.2 *O resultado acima nos diz que, para cada* $k \in \mathbb{R}^m$, *a equação*

$$A(h, k) = O_n$$

podemos obter $h \in \mathbb{R}^n$, *de modo único, em função de* $\underline{k}$.

Além disso, essa função será linear em k, *como descrita em (5.94).*

Pdemos agora enuciar e provar um **Teorema da função implícita** em geral, mais precisamente:

Teorema 5.6.1 *Sejam* E *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^{n+m}$, $(x_o, y_o) \in E$, $f \in C^1(E; \mathbb{R}^n)$ *e* $A \doteq f'(x_o, y_o)$.

Suponhamos que

$$f(x_o, y_o) = O_n$$

e que o operador linear A *seja inversível.*

Então existe subconjunto aberto $U \doteq U(x_o, y_o)$ *de* $\mathbb{R}^{n+m}$, *contendo* (x_o, y_o), *um subconjunto aberto* $W = W(y_o) \subseteq \mathbb{R}^m$, *contendo* y_o *tal que para todo* $y \in W$ *existe um, único,* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$(x, y) \in U \quad e \quad f(x, y) = O_n, \tag{5.95}$$

ou seja, existe uma função $g : W \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $g(y_o) = x_o$, $(g(y), y) \in U$ *para* $y \in W$ *e*

$$f[g(y), y) = O_n, \quad y \in W.$$

Além disso $g \in C^1(W; \mathbb{R}^n)$ *e*

$$g'(y_o) = -A_x^{-1} \circ A_y. \tag{5.96}$$

Demonstração:

Definamos a função $F : E \to \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$F(x, y) \doteq (f(x, y), y), \quad (x, y) \in E. \tag{5.97}$$

Afirmamos que $F \in C^1(E; \mathbb{R}^{n+m})$ e

$$F'(x_o, y_o)(h, k) = (A(h, k), k)$$

em particular, $F'(x_o, y_o) \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ é um operador linear inversível.

De fato, como a função $\underline{f}$ é diferenciável em (x_o, y_o) segue que teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_o + h, y_o + k) - \overbrace{f(x_o, y_o)}^{=O_n} - A(h, k)}{\|(h, k)\|} \\ &= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_o + h, y_o + k) - A(h, k)}{\|(h, k)\|}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x_o + h, y_o + k) - \overbrace{f(x_o, y_o)}^{=O_n} = A(h, k) + r(h, k), \tag{5.98}$$

onde

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0. \tag{5.99}$$

logo

$$\begin{aligned} F(x_o + h, y_o + k) - F(x_o, y_o) &= (f(x_o + h, y_o + k)), y_o + k) - \left(\overbrace{f(x_o, y_o)}^{=O_n}, y_o \right) \\ &= (f(x_o + h, y_o + k), k) \overset{(5.98)}{=} (A(h, k) + r(h, k), k) \\ &= (A(h, k), k) + (r(h, k), O_m), \end{aligned} \tag{5.100}$$

assim

$$\frac{\|F(x_o+h,y_o+k)-F(x_o,y_o)-(A(h,k),k)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}{\|(h,k)\|} \overset{(5.100)}{=} \frac{\|(r(h,k),O_m)\|_{\mathbb{R}^{n+m}}}{\|(h,k)\|}$$
$$= \frac{\|r(h,k)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|(h,k)\|} \to 0,$$

quando $(h,k)\to(0,0)$, por (5.99), mostrando que a função $\underline{F}$ é diferenciável em (x_o,y_o) e além disso

$$F'(x_o,y_o)(h,k)=(A(h,k),k),\ quad(h,k)\in\mathbb{R}^{n+m}.$$

Observemos que

$$F'(x_o,y_o)=(O_n,O_m) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(h,k)=O_n \\ k=O_m \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad \underbrace{A(h,O_m)}_{=A_x(h)}=O_n \quad \overset{A_x \text{ é inversível}}{\Rightarrow} \quad h=O_n \quad \Rightarrow \quad (h,k)=(O_n,O_m),$$

ou seja, o operador linear $F'(x_o,y_o)\in L(\mathbb{R}^{n+m})$ é injetora e portanto bijetora, isto é, $F'(x_o,y_o)\in L(\mathbb{R}^{n+m})$ é inversível.

Logo podemos aplicar o Teorema da função inversa à função $\underline{F}$ (ver Teorema (5.5.1)), assim podemos obter um subconjunto aberto $U=U(x_o,y_o)\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ e um subconjunto aberto $V=U(O_n,y_o)\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ tal que $F:U\to V$ é bijetora e $F^{-1}\in C^1(U;V)$.

Seja

$$W\doteq\{y\in\mathbb{R}^m;\,(O_n,y)\in V\}.$$

Observemos que se $y_o\in W$, pois $(0,y_o)\in V$.

Além disso W é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ pois a função $i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$i(y)\doteq(O_n,y),\quad y\in\mathbb{R}^n$$

é uma função contínua em $\mathbb{R}^n$ e como V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$ segue que $W=h^{-1}(V)$ será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ (onde h^{-1} denota a imagem inversa associada a função $\underline{h}$).

Notemos que $y\in W$ teremos que existe $(x,y)\in U$ tal que

$$F(x,y)=(O_n,y)$$

pois a função $F:U\to V$ é bijetora.

Mas

$$(O_n,y)=F(x,y)=(f(x,y),y) \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=O_n,$$

ou seja, para cada $y\in W$ existe, pelo menos um $\underline{x}$ tal que $(x,y)\in W$.

Afirmaos que tal $\underline{x}$.

De fato, se $(x',y)\in U$ é tal que

$$F(x',y)=(f(x',y),y)=(f(x,y),y)=F(x,y) \quad \overset{F \text{ é injetora}}{\Rightarrow} \quad x'=x.$$

Com isto podemos concluir que para $y\in W$ existe um único $x=x(y)$ tal que

$$f(x(y),y)=O_n,$$

completando a demonstração da 1.a parte do resultado.

Para a 2.a parte, consideremos a função $g : W \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$g(y) \doteq x, \quad y \in W, \tag{5.101}$$

onde $(x, y) \in U$ e $f(x, y) = O_n$ (que está bem definida pela 1.a parte).

Com isto teremos

$$F(g(y), y) = F(x, y) = (\underbrace{f(x, y)}_{=O_n}, y) = (O_n, y), \quad y \in W.$$

Se $G \doteq F^{-1} : V \to U$ então, do Teorema da função inversa (ver Teorema (5.5.1)), segue que $G \in C^1(V; U)$ e como

$$F(g(y), y) = (O_n, y) \overset{G=F^{-1}}{=} F[G(O_n, y)], \quad y \in W$$

segue que

$$(g(y), y) = G(O_n, y), \quad y \in W.$$

Portanto

$$g = \Pi_1 \circ G \circ h(x, y), \quad (x, y) \in V,$$

onde $\Pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ é dada por (é uma transformação linear, verifique!)

$$\Pi_1(x, y) \doteq x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

$h : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ é dada por (é uma transformação linear, verifique!)

$$h(x, y) \doteq (O_n, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

Como $G \in C^1(V; W)$, $\Pi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$ e $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m}; \mathbb{R}^n)$ segue que $g \in C^1(W; \mathbb{R}^n)$.

Para finalizar, observemos que se considerarmos a função $\varphi : W \to \mathbb{R}^{n+m}$ dada por

$$\varphi(y) \doteq (g(y), y), \quad y \in W,$$

segue que a $\varphi \in C^1(W; \mathbb{R}^{n+m})$ e para $y \in W$ teremos

$$\varphi'(y)(k) = (g'(y)(k), k), \quad k \in \mathbb{R}^m.$$

Como

$$f[\varphi(y)] = f(g(y), y) = O_n, \quad y \in W \tag{5.102}$$

segue, da Regra da cadeia, que

$$f'[\varphi(y)]\, \varphi'(y) = O_n,$$

em particular se $y = y_o$ e assim teremos

$$\varphi(y_o) = (\underbrace{g(y_o)}_{=x_o}, y_o) = (x_o, y_o)$$

logo

$$f'[\varphi(y_o)] = f'(x_o, y_o) = A,$$

logo, de (5.102) segue que

$$A\varphi'(y_o) = O_n,$$

ou seja,

$$O_n = A \underbrace{\varphi'(y_o)k}_{=(g'(y)(k),k)} = A_x[g'(y_o)k] + A_y(k)$$
$$\Rightarrow \quad A_x g'(y_o) + A_y = O_n \quad \Rightarrow \quad g'(y_o) = -A_x^{-1} A_y,$$

completando a demonstração do resultado.

Observação 5.6.3 *Em termos das componentes das funções* $\underline{f}$ *e da função* $\underline{g}$ *(isto é* $\underline{f^{-1}}$*) a expressão (5.96) tornar-se-á: para cada* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *e* $k \in \{1, \cdots, m\}$*:*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o, y_o) \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(y_o) = -\frac{\partial f_i}{\partial z_{n+k}}(x_o, y_o),$$

onde $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$*.*

Para ver isto notemos que

$$[A_x] = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_o, y_o)\right)_{n \times n},$$
$$[g'(x_o, y_o)] = \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}(x_o, y_o),\right)_{n \times m}$$
$$[A_y] = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_{n+k}}(x_o, y_o)\right)_{n \times m},$$

e assim $[A_x][g'(y_o)] = -[A_y]$ *que nos fornece a expressão acima.*

Para finalizar consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.6.1 *Seja* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$f = (f_1, f_2),$$

onde $f_1, f_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *são dadas por*

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \doteq 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3,$$
$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \doteq x_2 \cos(x_1) - 6x_1 + 2y_1 - y_3, \quad (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)\mathbb{R}^5.$$

Observemos que se

$$X_o \doteq (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \quad e \quad Y_o \doteq (3, 2, 7) \in \mathbb{R}^3$$

entÃO

$$f_1(X_o, Y_o) = f_1(0, 1, 3, 2, 7) = 2e^0 + 1.3 - 4.2 + 3 = 0,$$
$$f_2(X_o, Y_o) = f_2(0, 1, 3, 2, 7) = 1.\cos(0) - 6.0 + 2.3 - 7 = 0,$$

ou seja

$$f(X_o, Y_o) = (f_1(X_o, Y_o), f_2(X_o, Y_o)) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2.$$

Notemos também que

$$[f'(X_o, Y_o)] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$[A_x] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad [A_y] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em particular, a matriz $[A_x]$ *é inversível (pois* $\det[A_x] = 2 + 18 = 20 \neq 0$*) log, pelo Teorema da função implícita, existem abertos* $U = U(Y_o)$, $V = V(X_o)$ *e uma função* $g : U \to V$ *tal que*

$$g(Y_o) = X_o, \quad \textit{isto é}, \quad g(3,2,7) = (0,1),$$

$$f(g(y), y) = (0,0), \quad y \in U$$

e

$$[g'(Y_o)] = -A_x^{-1} A_y 1 \overset{\textit{Exercício}}{=} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

5.7 Exercícios

F I M