Árvores Binárias

9/11 e 11/11
Conceitos
Representação e Implementação

Árvore Binárias (AB)

- Uma Árvore Binária (AB) T é um conjunto finito de elementos, denominados nós ou vértices, tal que:
  - (i) Se T = ∅, a árvore é dita vazia, ou
  - (ii) T contém um nó especial, chamado raiz de T, e os demais nós podem ser subdivididos em
    - dois sub-conjuntos distintos T_E e T_D, os quais também são árvores binárias.
    - T_E e T_D são denominados sub-árvore esquerda e sub-árvore direita de T, respectivamente

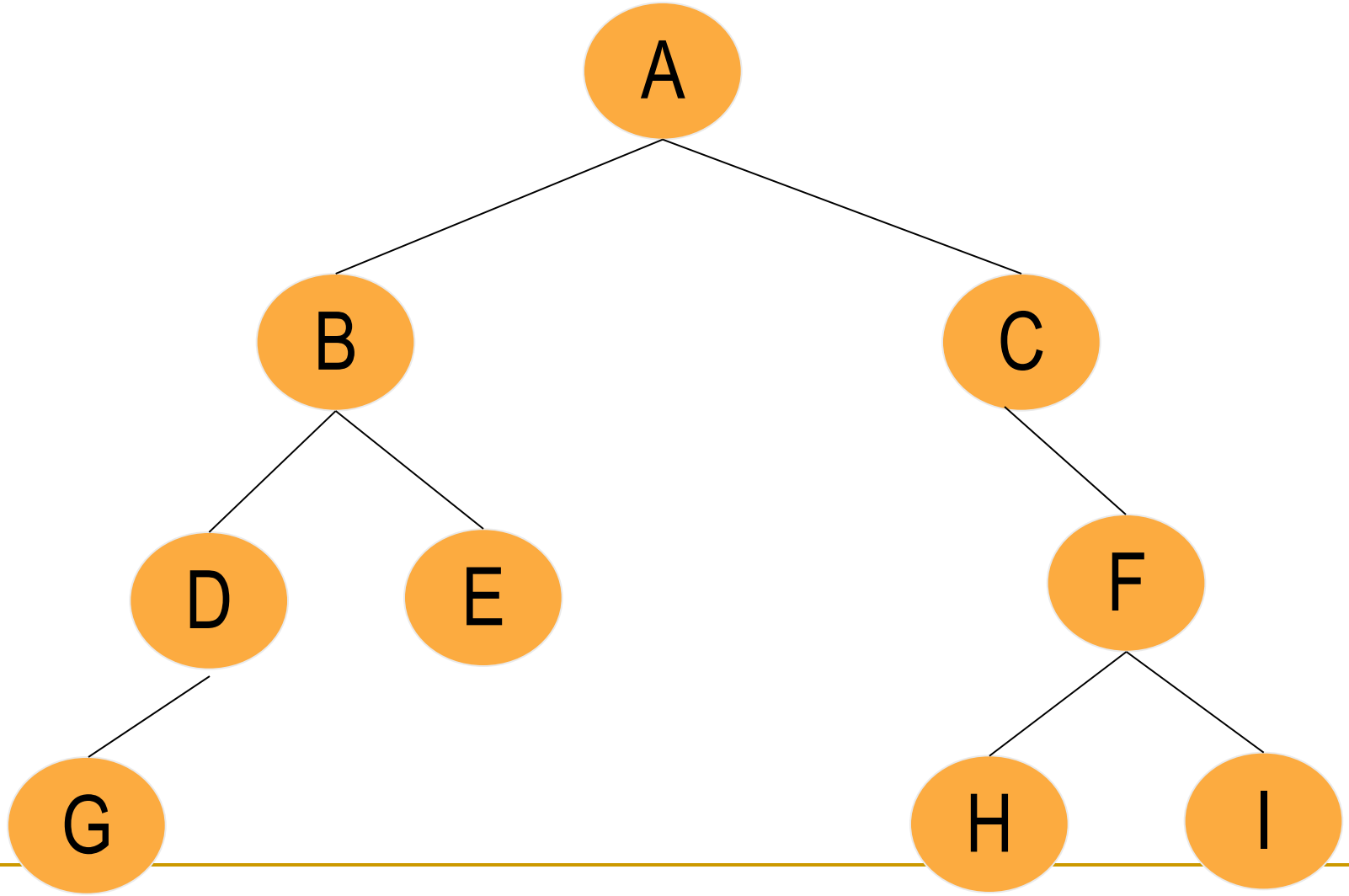
Árvore Binárias (AB) (cont.)

- A raiz da sub-árvore esquerda (direita) de um nó **v**, se existir, é denominada filho esquerdo (direito) de **v**. Pela natureza da árvore binária, o filho esquerdo pode existir sem o direito, e vice-versa

- Se **r** é a raiz de T, diz-se que T_{Er} e T_{Dr} são as sub-árvores esquerda e direita de T, respectivamente

- Árvore Binária é uma árvore ordenada de grau 2.

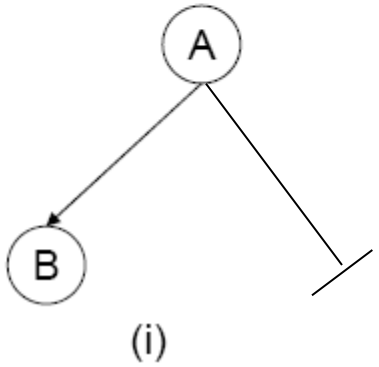
Exemplos de Árvore Binárias (AB)



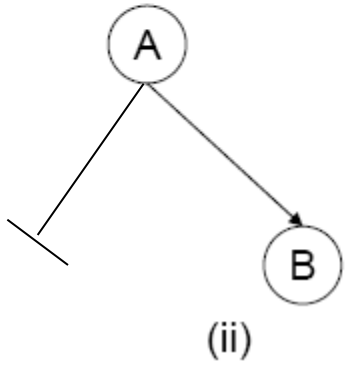
Exemplos de Árvores Binárias

As duas AB seguintes são distintas

- (i) a primeira tem subárvore direita vazia
- (ii) a segunda tem subárvore esquerda vazia



(i)



(ii)

Eficiência para as operações

- Árvores binárias podem ser usadas para guardar e recuperar informações, com número de operações proporcional à altura da árvore,
  - ou seja, variando, aproximadamente, entre $\log_2 n$ e n (quando se torna degenerada para uma lista).

- Mais tarde veremos como esta manipulação pode ser realizada de maneira a garantir a altura da ordem de $O(\log_2 n)$

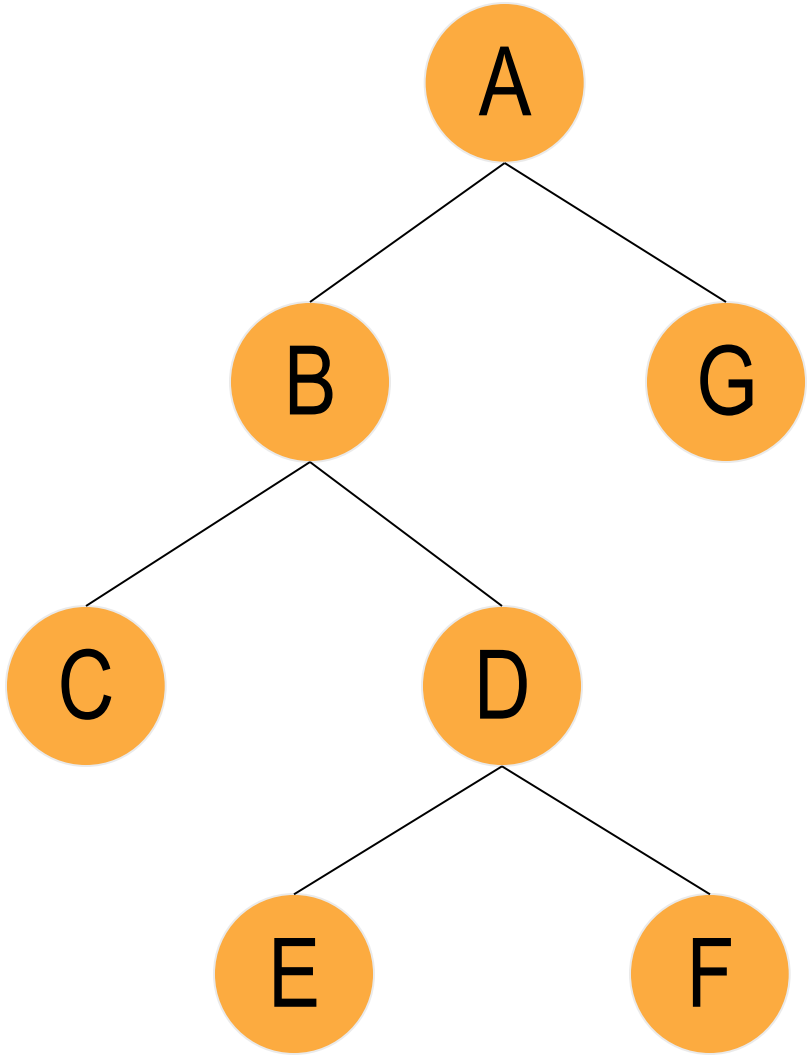
Tipos de AB

- Árvore Estritamente Binária
- Árvore Binária Completa
  - Há duas definições: (i) completa = cheia e (ii) completa = a definição de quase completa, dada abaixo
- Árvore Binária Quase Completa

- Árvore Binária Balanceada (altura difere max 1)
- Árvore Binária Perfeitamente Balanceada (número de nós difere max 1)

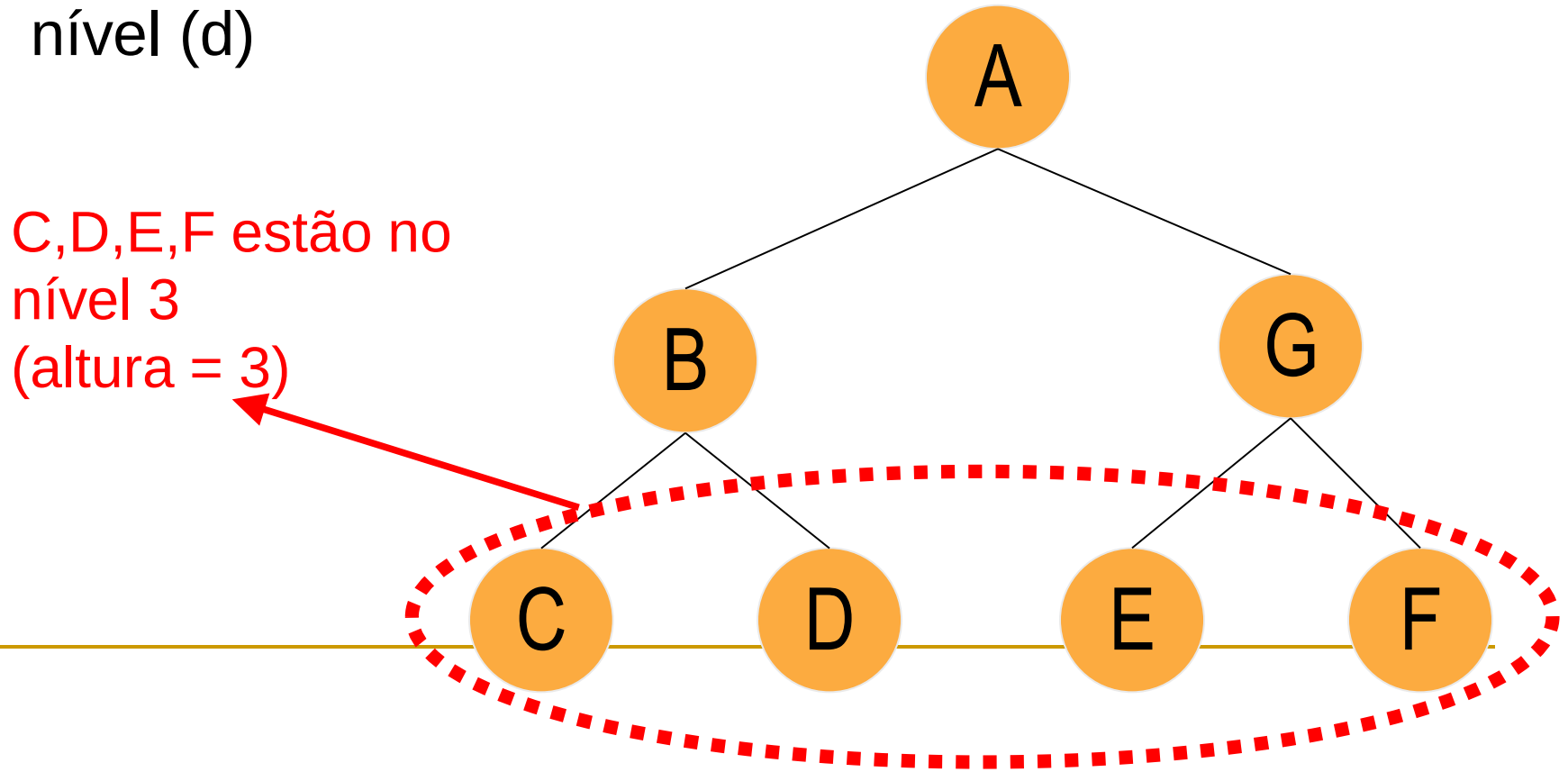
Árvore Estritamente Binária

- Uma **Árvore Estritamente Binária** tem nós que têm ou 0 (nenhum) ou dois filhos
- Nós internos (não folhas) sempre têm 2 filhos



Árvore Binária Completa (Cheia)

- Árvore Binária Completa (Cheia) (ABC)
  - é estritamente binária, de nível d; e
  - todos os seus nós-folha estão no mesmo nível (d)



Árvore Binária Completa (Cheia)

- Dada uma ABC e sua altura, pode-se calcular o número total de nós na árvore
  - p.ex., uma ABC com altura 3 tem 7 nós
    - Nível 1: => 1 nó
    - Nível 2: => 2 nós
    - Nível 3: => 4 nós
    - No. Total de nós = 1 + 2 + 4 = 7
  - Verifique que: se uma ABC tem altura h, então o número de nós da árvore é dado por:

$$N = 2^h - 1$$

Nível

Número de nós por nível

1

$1 = 2^0$

2

$2 = 2^1$

3

$4 = 2^2$

.....

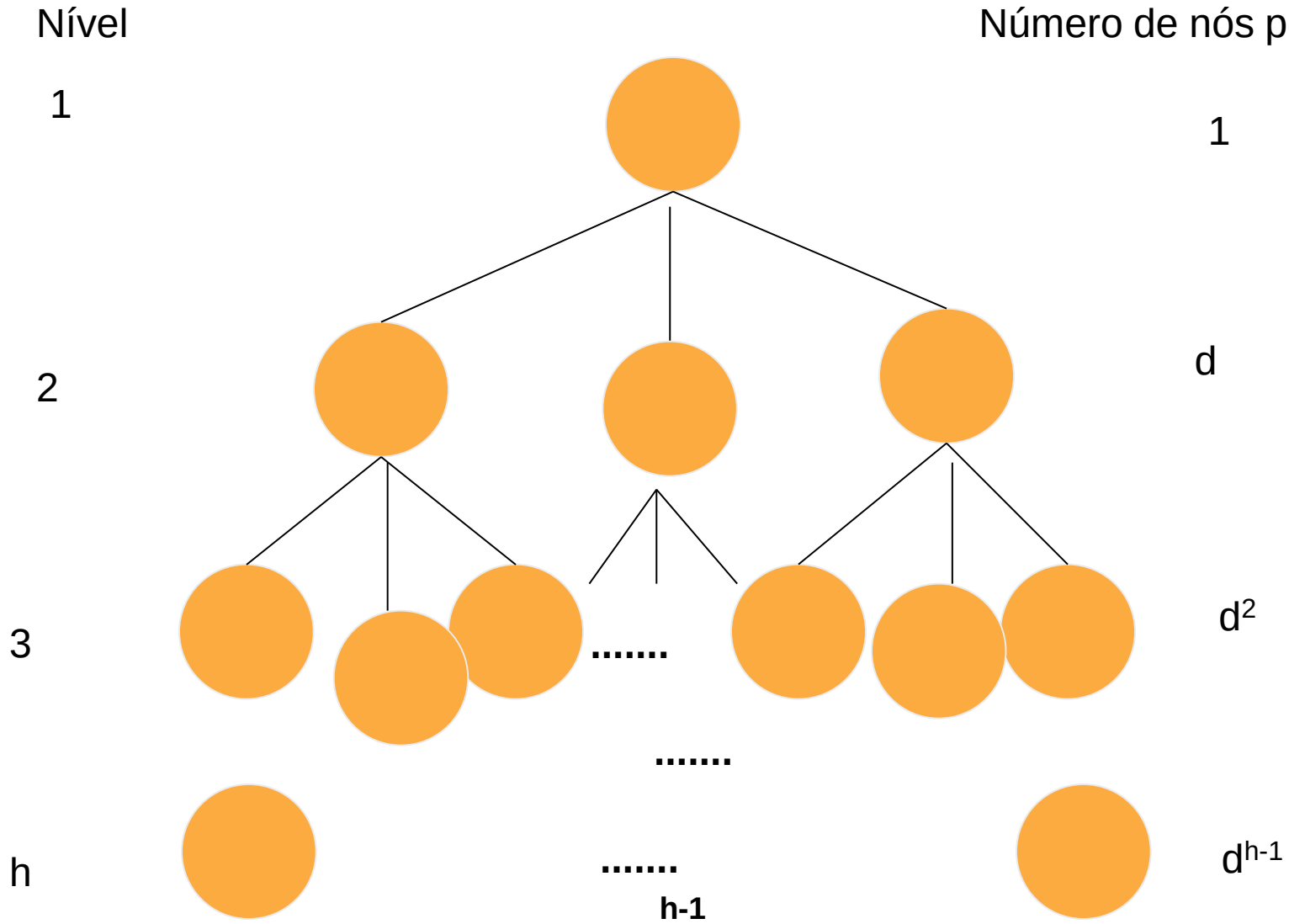
h

.....

2^{h-1}

$$\therefore N = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$$

Árvore Completa (Cheia) de grau **d** e altura **h**



$$\therefore \quad N(h) = \sum_{i=0}^{h-1} d^i = \frac{d^h - 1}{d - 1}, \; d > 1$$

Inversamente:

- Se **N** é o número de nós de uma ABC, de grau **d**, qual é a altura **h** da árvore?

$$N(h) = \frac{d^h - 1}{d - 1}$$

$$h = \log_d(N.d - N + 1)$$

para d=2: $h = \log_2(N + 1)$

Árvore Binária Quase Completa

- Árvore Binária Quase Completa
  - Se a altura da árvore é **d**, cada nó folha está no nível **d** ou no nível **d-1.**
  - Em outras palavras, a diferença de altura entre as sub-árvores de qualquer nó é no máximo 1.

Implicações dos conceitos completa (cheia) e quase completa

Importante para:

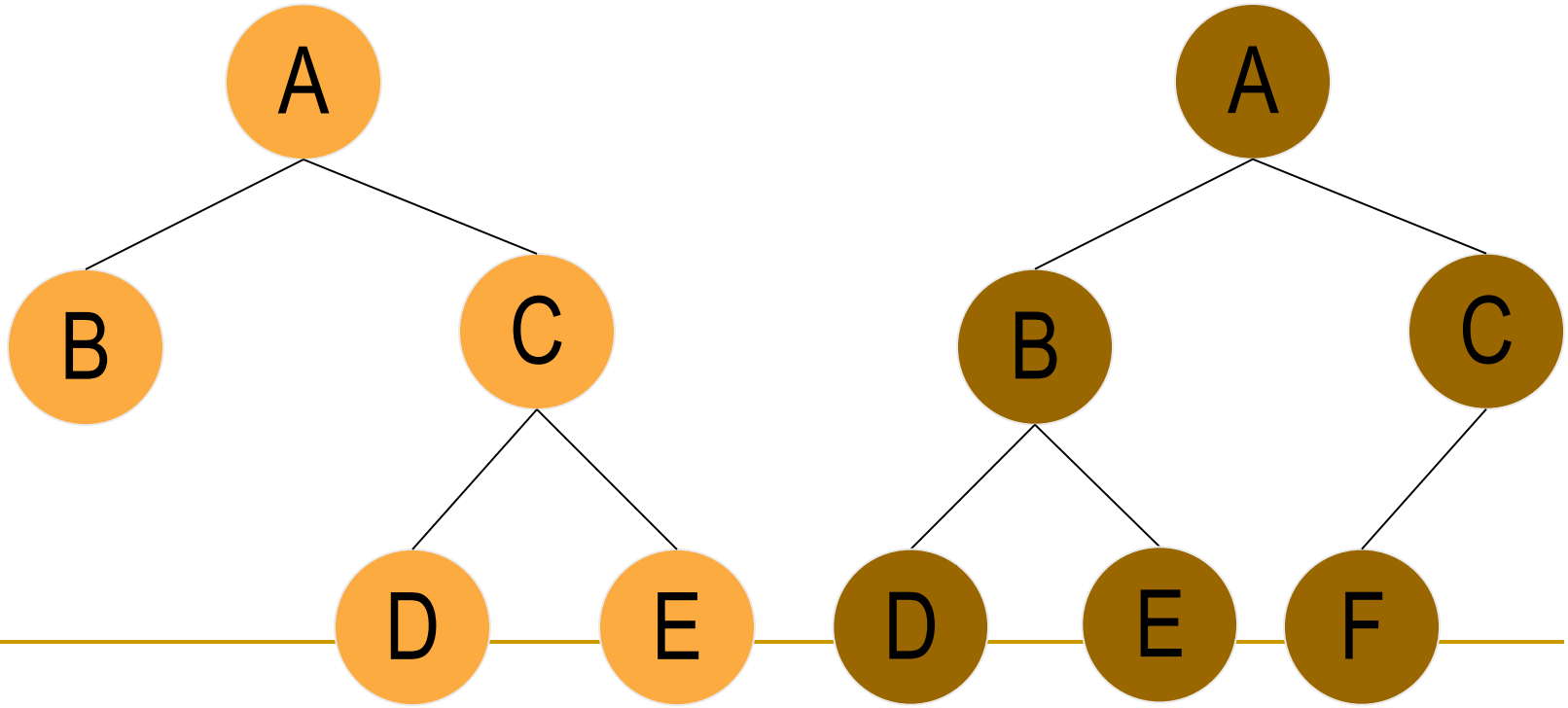
- sua alocação em vetores, pois quando é cheia não desperdiça espaço, e

- na definição do método de ordenação heapsort que trabalha com o conceito de árvore completa como se fosse nossa definição de quase completa.
  - Neste método a árvore (heap) é preenchida da esquerda para direita.

- Uma árvore completa é aquela em que se *n* é um nó com algumas de subárvores vazias, então *n* se localiza no penúltimo ou no último nível.

Árvore Binária Balanceada

- Árvore Binária Balanceada
  - para cada nó, as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1



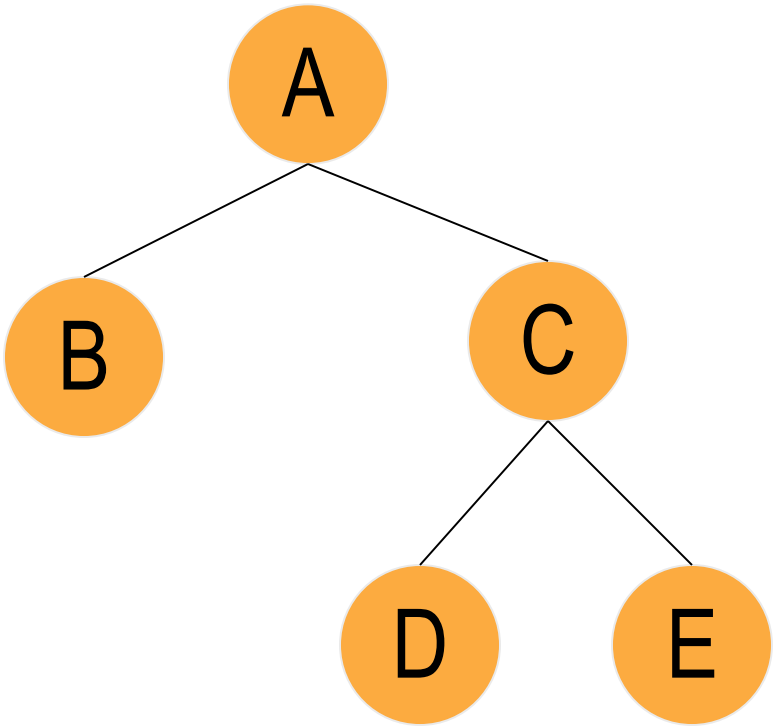
Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

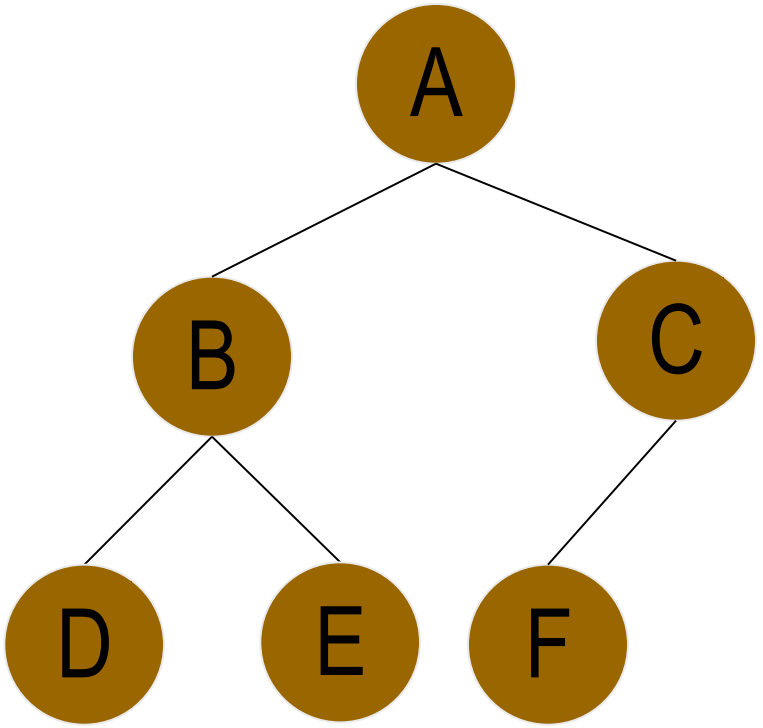
- **Árvore Binária Perfeitamente Balanceada**: para cada nó, o número de nós de suas sub-árvores esquerda e direita difere em, no máximo, 1

- Toda AB Perfeitamente Balanceada é Balanceada, mas o inverso não é necessariamente verdade.

- Uma AB com N nós tem altura mínima se e só se for Perfeitamente Balanceada.

Exemplo



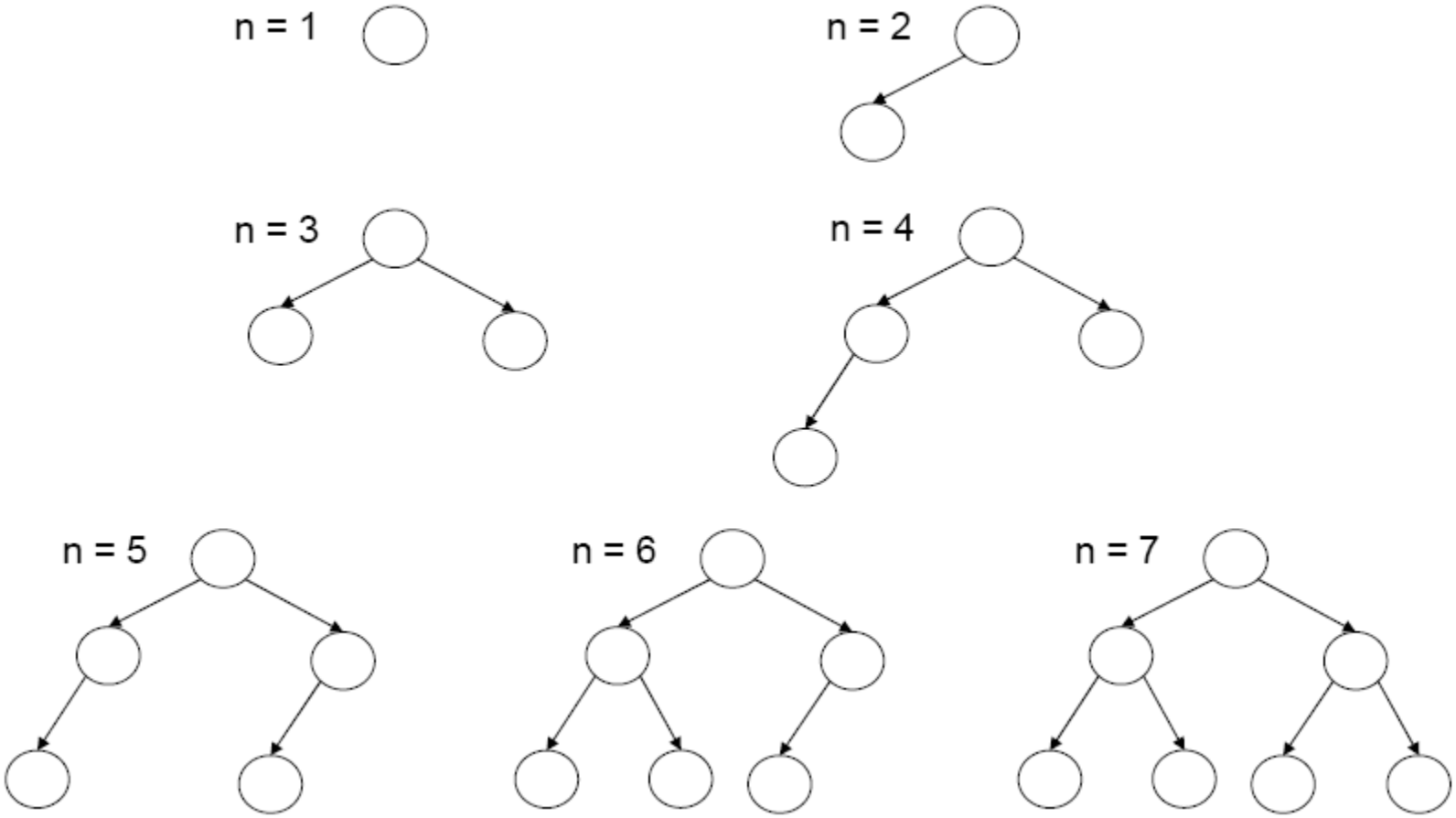


Árvore Balanceada

Árvore Perfeitamente Balanceada

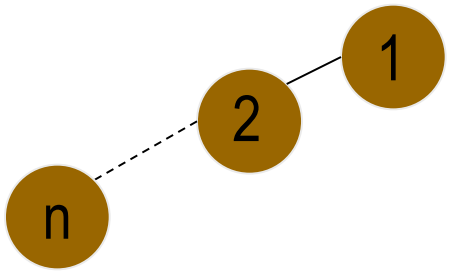
6 nós: $h_{min} = 3$

Árvores Perfeitamente Balanceadas de Grau 2



Questões

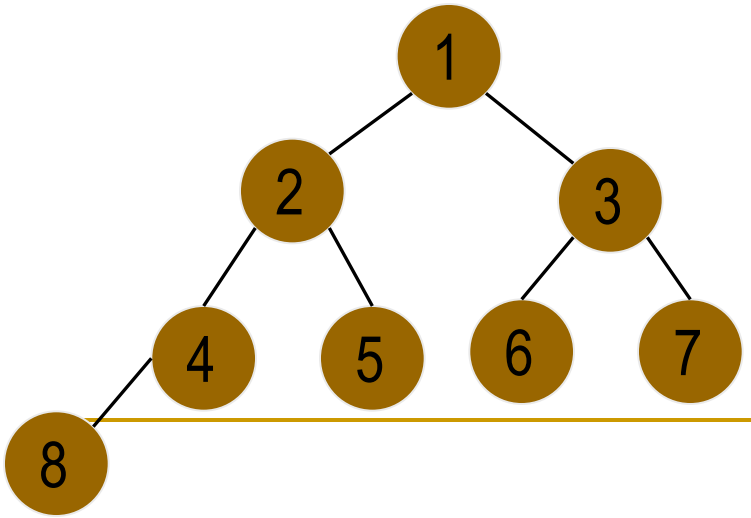
- Qual a altura máxima de uma AB com **n** nós?
  - Resposta: n
  - Árvore degenerada ≡ Lista



Há outra forma para esta árvore?

Questões

- Qual a altura mínima de uma AB c/ **n** nós?
  - Resposta: a mesma de uma AB Perfeitamente Balanceada com **N** nós



N=1; h=1

N=2,3; h=2

N=4..7; h=3

N=8..15; h=4

$$h_{min} = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$$

(maior inteiro ≤ $\log_2 N$) + 1

ou

$$h_{min} = \lceil \log_2 (N+1) \rceil$$

menor inteiro ≥ $\log_2 (N+1)$

Árvores de Altura Mínima

h	n
0	1
1	3
2	7
3	15
4	31
5	63
6	127
7	255
8	511
9	1023
10	2047

n	h
1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	2
8	3
9	3
10	3
11	3
12	3
13	3
14	3
15	3
16	4

Questões

- Uma árvore binária completa é uma árvore estritamente binária?
- Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária completa?

Implicações dos conceitos de balanceada e perfeitamente balanceada

- Estas árvores permitem que a recuperação de informação possa ser realizada de maneira a garantir a altura da ordem de $O(\log_2 n)$ e
  - assim a eficiência em termos de tempo.

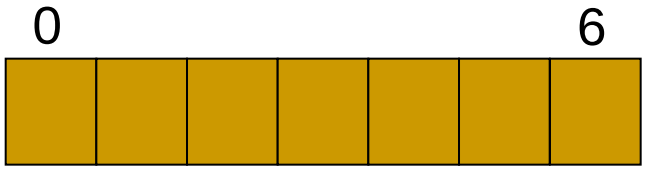
Representação/Implementação

- Estática Seqüêncial
  - Simples,
  - Melhor solução quando é completa (cheia). Se não for completa (cheia), um campo “usado” é necessário para indicar qual posição tem ou não elemento.

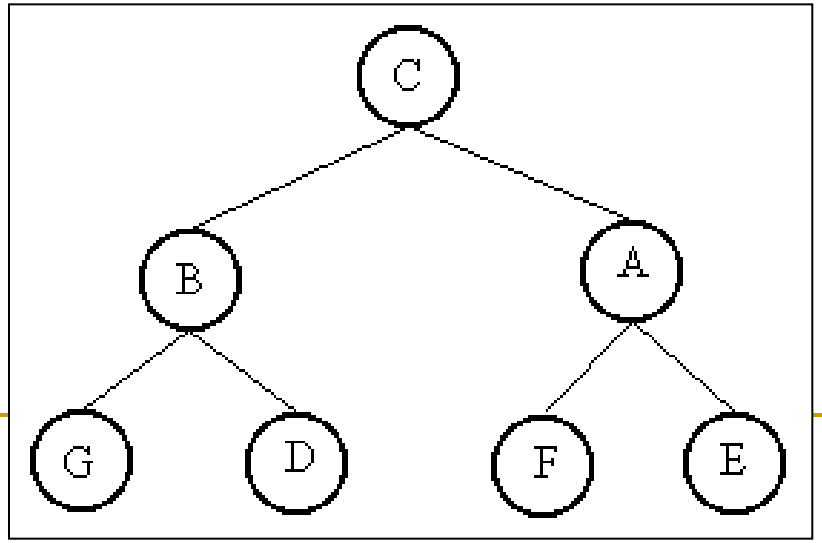
- Encadeada Dinâmica
  - O limite para o número de nós é a memória
  - Preferida no caso geral

Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
  - Vetor

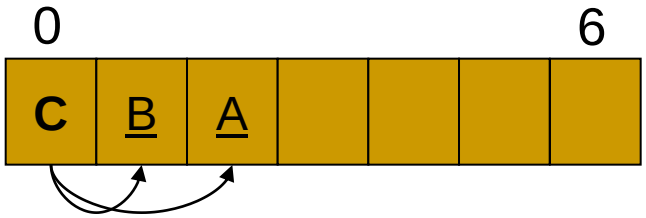


  - Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

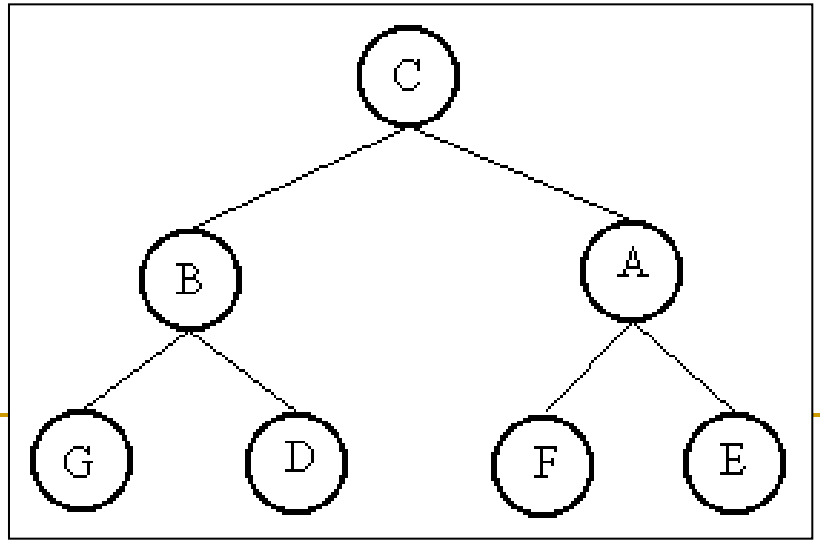


Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
  - Vetor

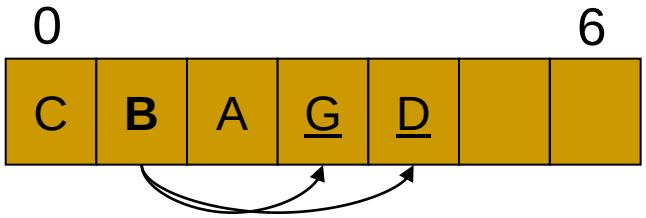


  - Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

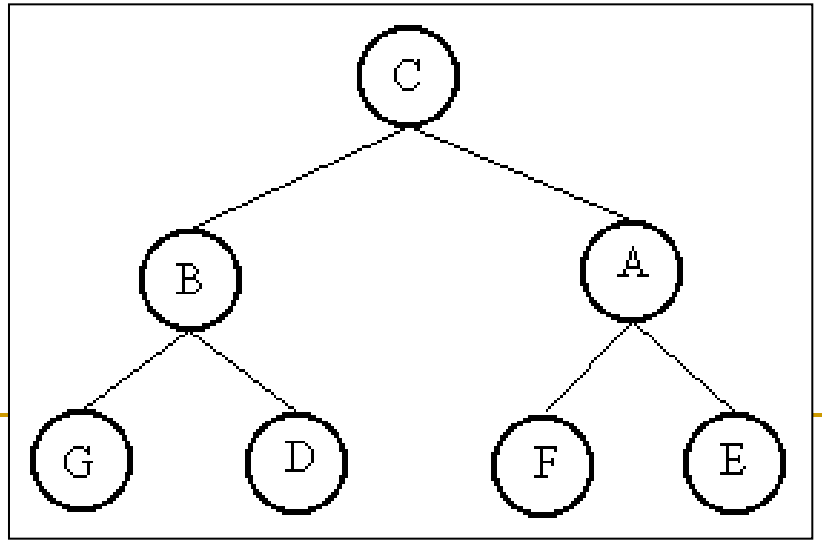


Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
  - Vetor

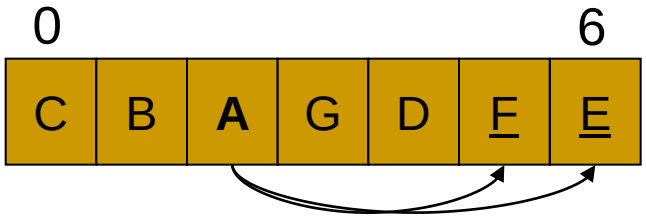


  - Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?

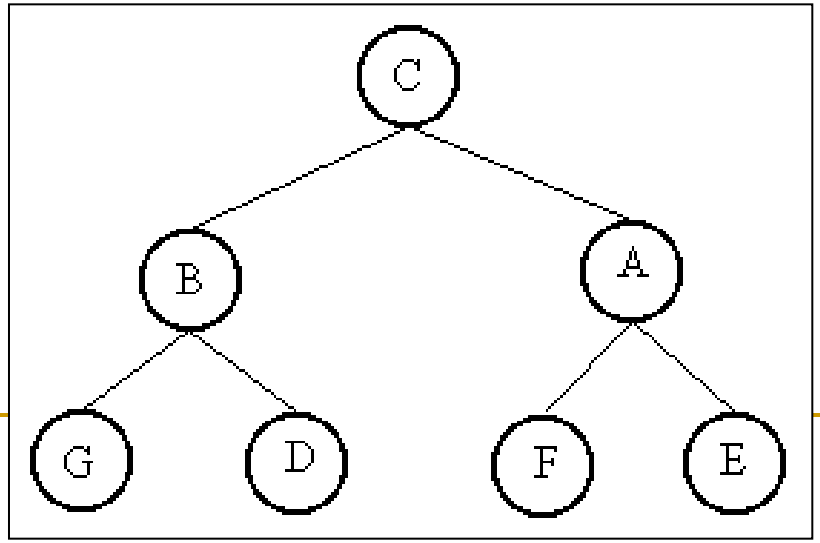


Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias
  - Vetor

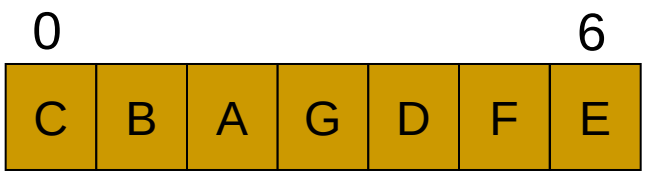


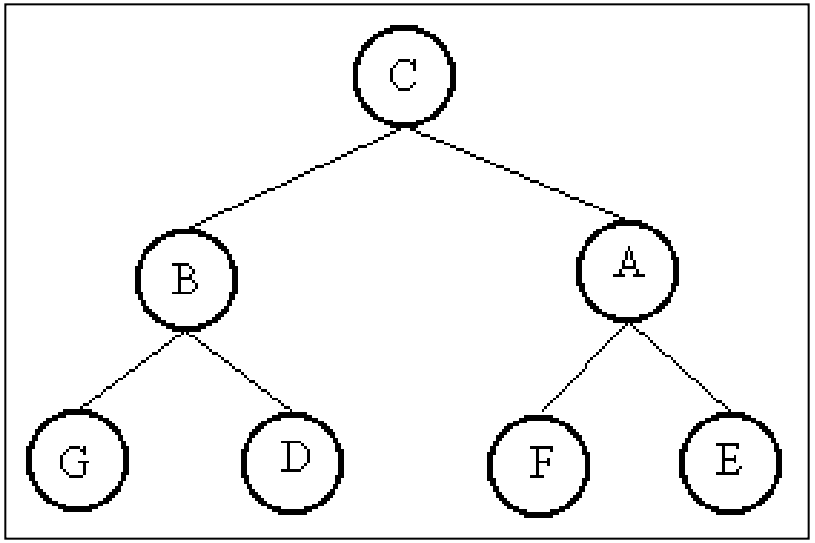
  - Como colocar a árvore abaixo nesse vetor?



Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias

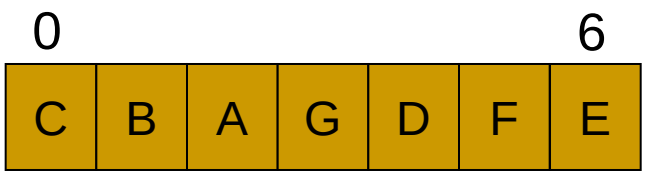


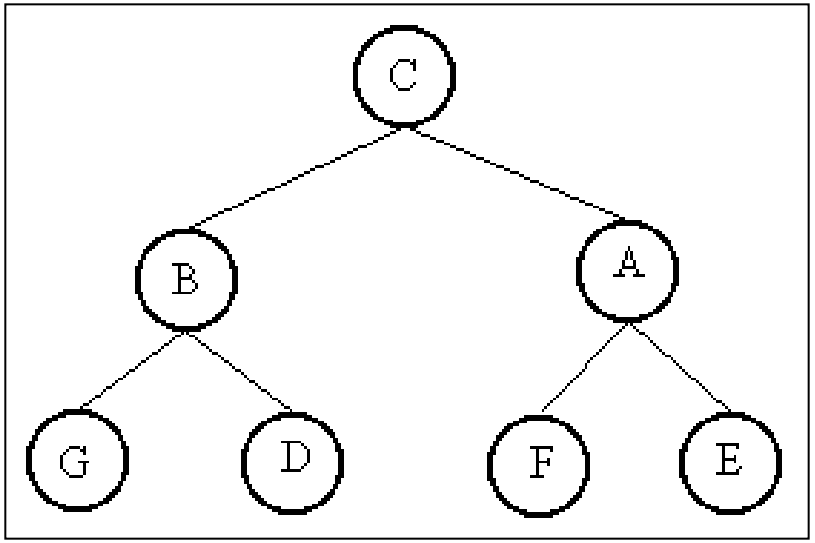


  - Como saber quem é filho de quem?

Árvores binárias

- Representação estática e seqüencial de árvores binárias





  - Como saber quem é filho de quem?
    - Filhos de i são 2i+1 e 2i+2

AB Completa (Cheia) (estática, seqüencial)

- Vantagem: espaço só p/ armazenar conteúdo; ligações implícitas
- Desvantagem: espaços vagos se árvore não é completa por níveis, ou se sofrer eliminação

ED AB, seqüencial estática

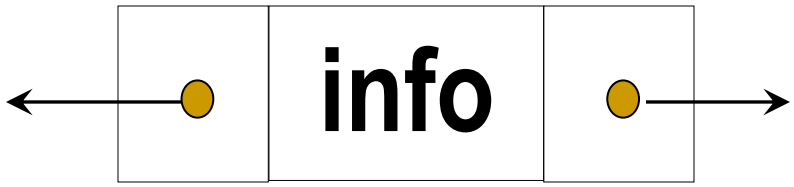
```
#define NUMNODES 500
typedef  int elem;

struct arv {
   elem info;
   int used;
}
typedef struct arv Arv[NUMNODES];
```

Criar uma árvore com nó raiz

```
void criar(elem x, Arv t[ ])
{
Int p;
t[0].info = x;
t[0].used = 1;
For (p=1; p<NUMNODES;p++)
    t[p].used = 0;
}
// para criar a árvore vazia é só setar FALSE no
    campo used de 0.. NUMNODES
```

ED AB, encadeada dinâmica

Para qualquer árvore, cada nó é do tipo

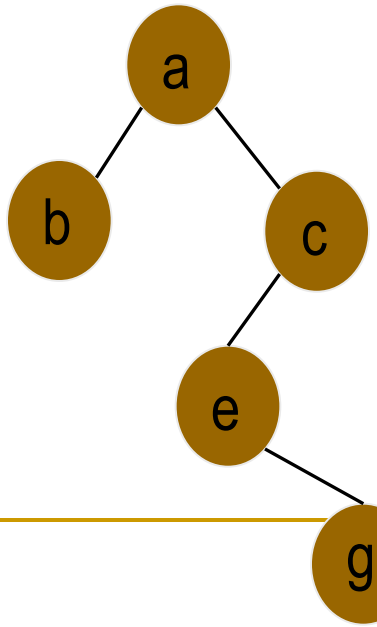


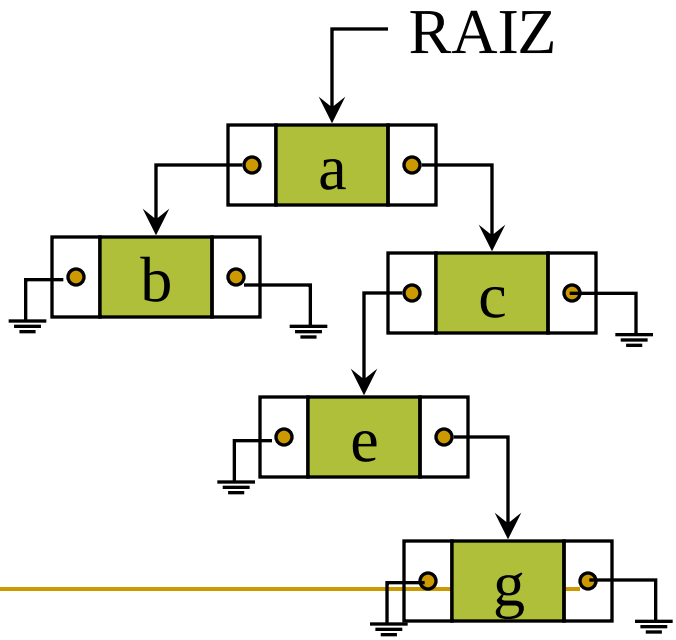
AB.h

```
typedef  int elem;

typedef struct arv *Arv;
```

AB.c

```
struct arv {
    elem info;
    struct arv* esq;
    struct arv* dir;
};
```





Árvore binária

- Operações do TAD
  1. Criação de uma árvore

  Dois casos: seguindo a definição recursiva
     1. Criar uma árvore vazia
     2. Criar uma árvore com 2 subárvores (e,d): **faz o papel de inserir nó**
  2. Verificar se árvore está vazia, mostrar o conteúdo do nó
  3. Buscar o pai de um nó, buscar um nó
  4. Retornar: nro de nós, nro de folhas, altura
  5. Destruir árvore
  6. Remover um nó

  Dois casos:
     1. O nó não tem filhos
     2. O nó tem um filho a esq, ou a dir ou os dois
  7. Verificar nível de um nó
  8. Verificar se é balanceada, se é perfeitamente balanceada
  - Outras?

Operações com resolução similar: usam percursos

- Operações do TAD
  1. Criação de uma árvore

  Dois casos: seguindo a definição recursiva
     1. Criar uma árvore vazia
     2. Criar uma árvore com 2 subárvores (e,d): **faz o papel de inserir nó**
  2. Verificar se árvore está vazia, mostrar o conteúdo do nó
  3. Buscar o pai de um nó, buscar um nó
  4. Retornar: nro de nós, nro de folhas, altura
  5. Destruir árvore
  6. Remover um nó

  Dois casos:
     1. O nó não tem filhos
     2. O nó tem um filho a esq, ou a dir ou os dois
  7. Verificar nível de um nó
  8. Verificar se é balanceada, se é perfeitamente balanceada
  - Imprime

Interface para as funções do TAD (sem pensar em erros).

Insiram tratamento de erros quando tiverem implementando o TAD.

- typedef int elem;
  // Tipo exportado
- typedef struct arv *Arv;

- // Cria uma árvore vazia
  Arv arv_criavazia (void);

- // Cria uma árvore com uma raiz e duas subárvores
  Arv arv_cria (elem c, Arv e, Arv d);

- //Libera toda a memória usada na árvore a
  Arv arv_destroi (Arv a);

- // Imprime a lista a
  void arv_imprime (Arv a);

- // Verifica se a árvore a é vazia

  int arv_vazia (Arv a);

- // Retorna o conteúdo de um nó x na árvore a

  elem arv_mostra_no(Arv a, int *erro);

- //Retorna (busca) o endereço de c na árvore a. Se c não está, retorna NULL

  Arv arv_busca (Arv a, elem c);

- // Retorna (busca) o endereço do pai de x na árvore a

  Arv arv_busca_pai(Arv a, elem x);

- //Remove um elemento da árvore, caso ele esteja nela. Retorna erro = 0 se sucesso e erro = 1 se não encontra

  void arv_remove(Arv a, elem x, int *erro);

- //Retorna a altura de uma árvore binária a. Considera o nível da raiz = 1
  int arv_altura(Arv a);

- // Retorna o número de nós na árvore a
  int arv_numero_nos(Arv a);

- //Retorna o número de folhas da árvore a
  int arv_nro_folhas(Arv a);

- //função de percurso de pre-ordem na árvore = busca em profundidade
  void arv_percurso_pre_ordem(Arv a);

- //função de percurso de em-ordem na árvore
  void arv_percurso_em_ordem(Arv a);

- //função de percurso de pos-ordem na árvore
  void arv_percurso_pos_ordem(Arv a);

AB - Percursos

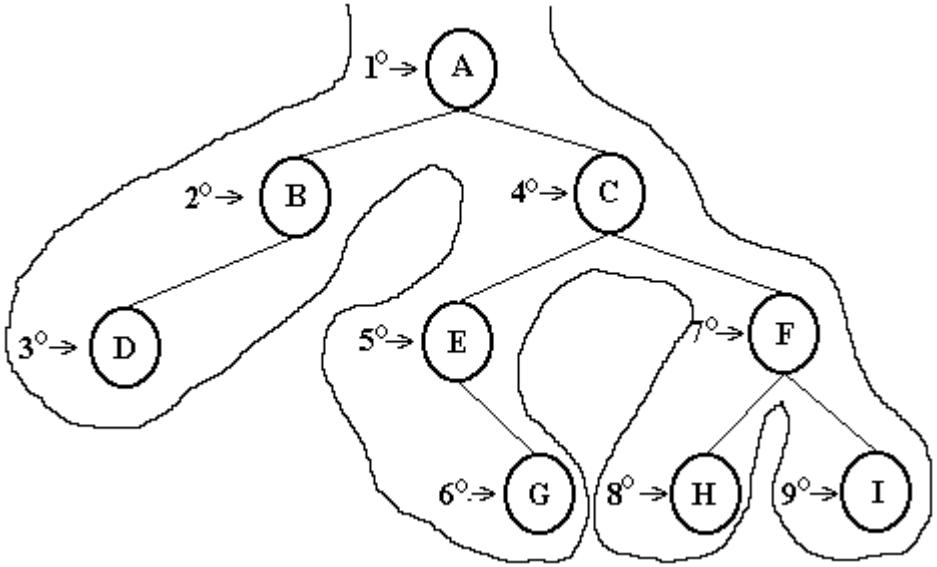
- Objetivo: Percorrer uma AB ‘visitando’ cada nó uma única vez.
- Um percurso gera uma seqüência linear de nós, e podemos então falar de nó predecessor ou sucessor de um nó, segundo um dado percurso.
  - Não existe um percurso único para árvores (binárias ou não): diferentes percursos podem ser realizados, dependendo da aplicação.
- Utilização: imprimir uma árvore, atualizar um campo de cada nó, buscar um item, destruir uma árvore, etc.

AB – Percursos em Árvores

- 3 percursos básicos para AB's:
  - pré-ordem (Pre-order)
  - in-ordem (In-order)
  - pós-ordem (Post-order)
- A diferença entre eles está, basicamente, na ordem em que cada nó é alcançado pelo percurso
  - “Visitar” um nó pode ser:
    - Mostrar (imprimir) o seu valor;
    - Modificar o valor do nó;
    - Verificar se o valor pertence a árvore (membro)

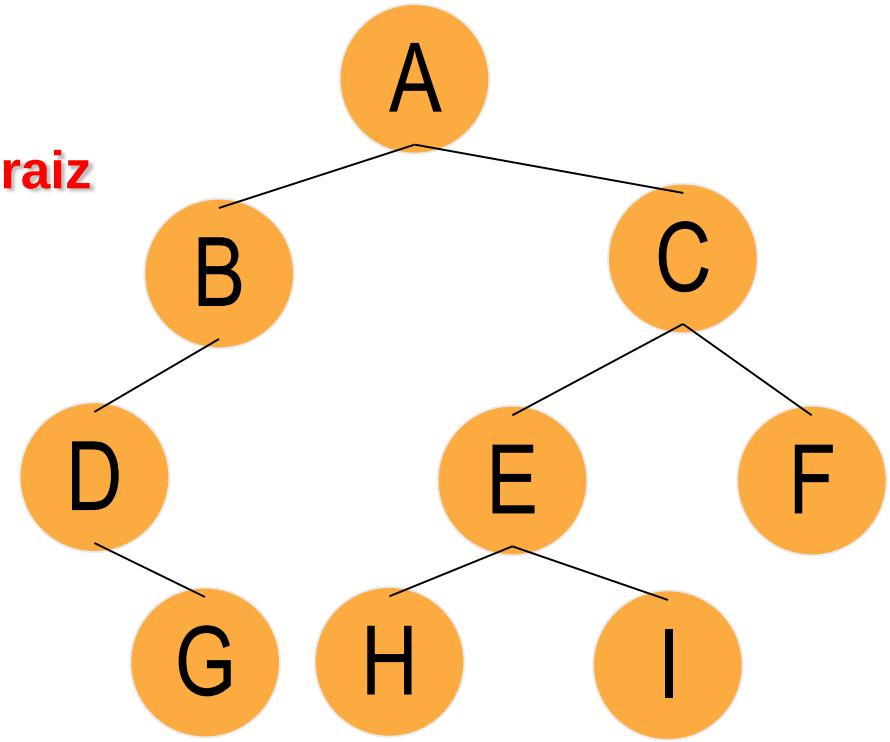
Pré-ordem

se árvore vazia; fim
1. visitar o nó raiz
2. percorrer em pré-ordem a subárvore esquerda
3. percorrer em pré-ordem a subárvore direita



AB - Percurso Pré-Ordem

```
void arv_percurso_pre_ordem(Arv a) {
    if (!arv_vazia(a)) {
       printf("%d\n",a->info); // processa raiz
       arv_percurso_pre_ordem(a->esq);
       arv_percurso_pre_ordem(a->dir);
    }
}
```



Resultado: ABDGCEHIF

E se invertermos as chamadas recursivas?

Trocar

```
pre_ordem(a->esq);
pre_ordem(a->dir);
```

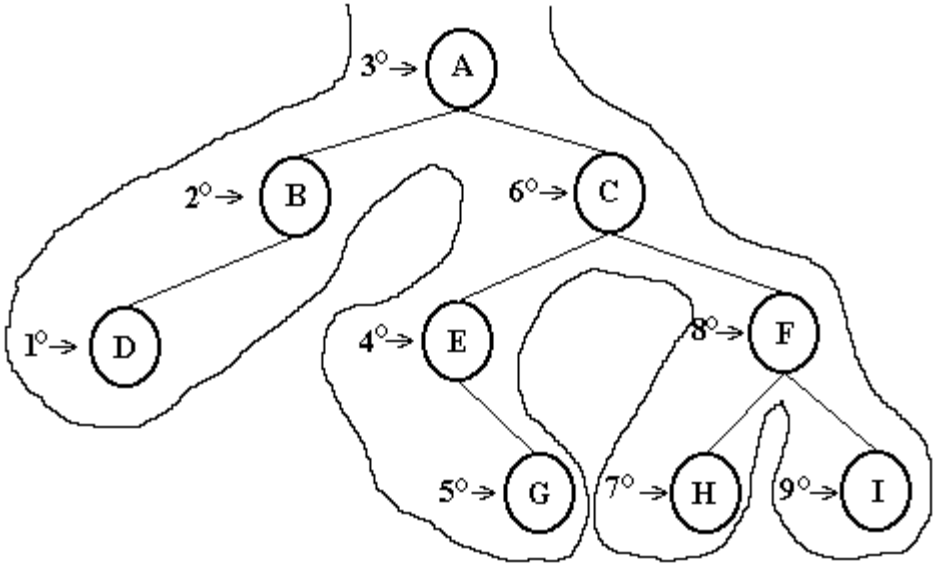
POR:

```
pre_ordem(a->dir);
pre_ordem(a->esq);
```

Ainda é pré-ordem??

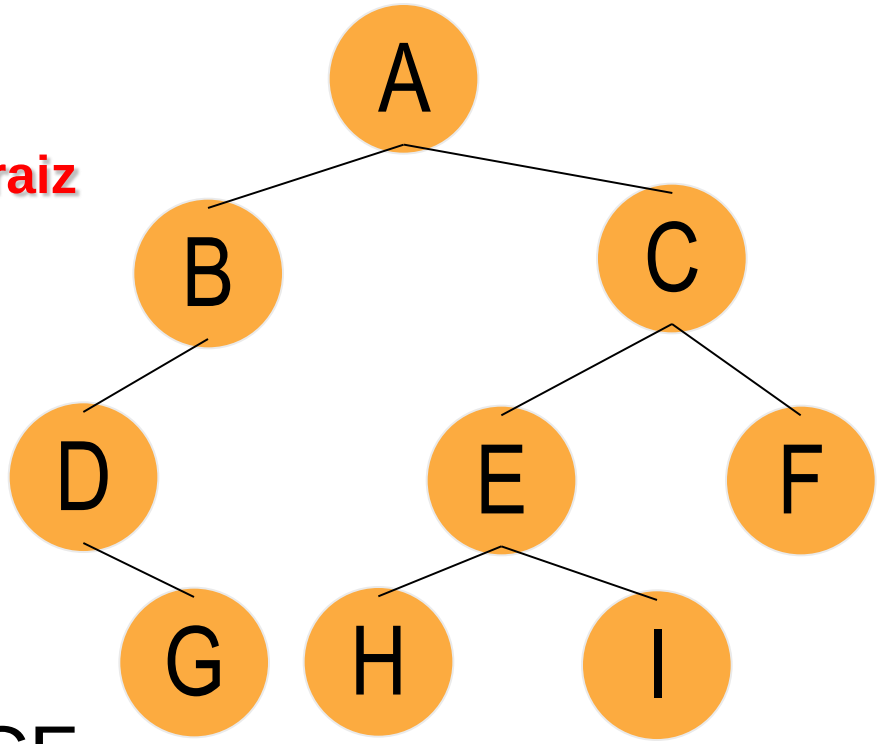
In-Ordem

se árvore vazia, fim
1. percorrer em in-ordem a subárvore esquerda
2. visitar o nó raiz
3. percorrer em in-ordem a subárvore direita



AB - Percurso In-Ordem

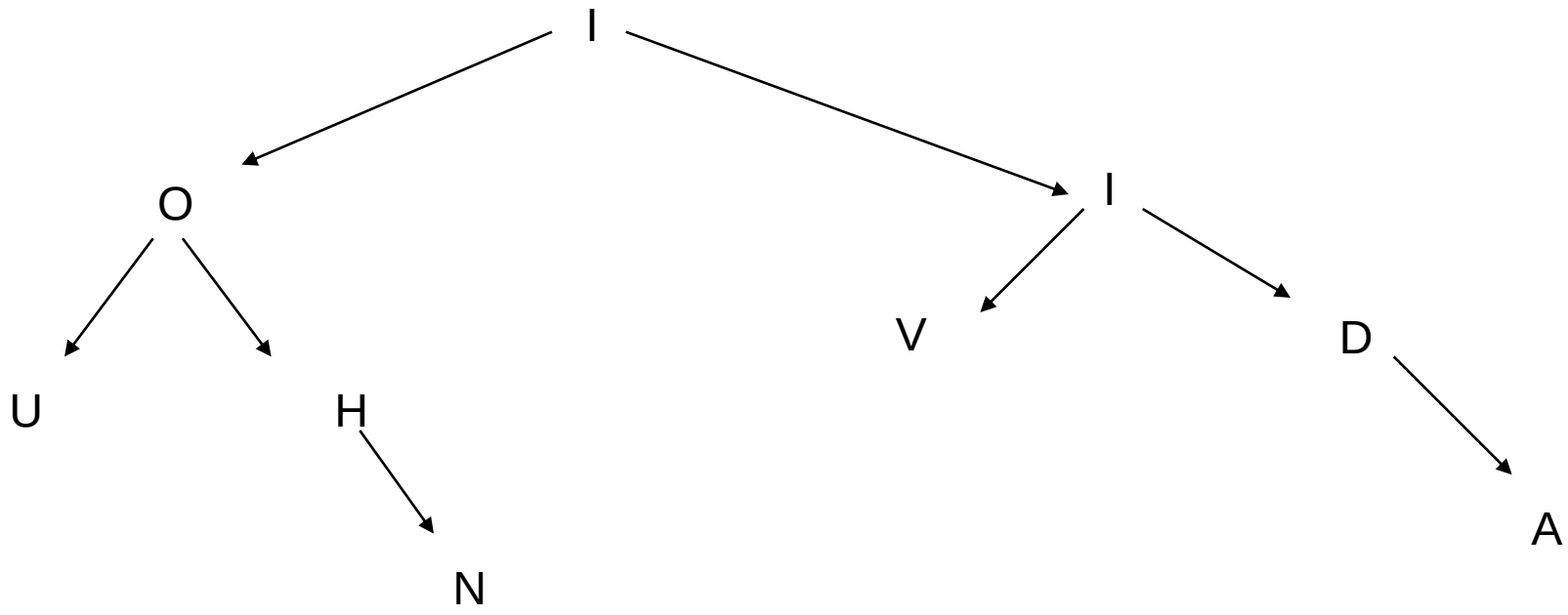
```
void arv_percurso_em_ordem(Arv a) {
    if (!arv_vazia(a)) {
       arv_percurso_em_ordem(a->esq);
       printf("%d\n",a->info); // processa raiz
       arv_percurso_em_ordem(a->dir);
    }
}
```



Resultado: DGBAHEICF

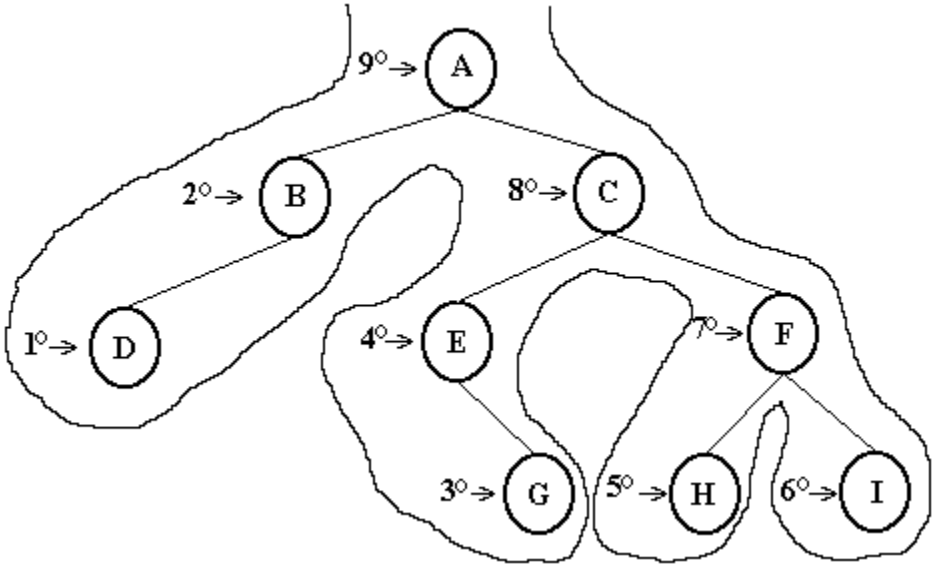
E se invertermos as chamadas recursivas?

- Ainda é in-ordem? Qual o resultado para a árvore abaixo?



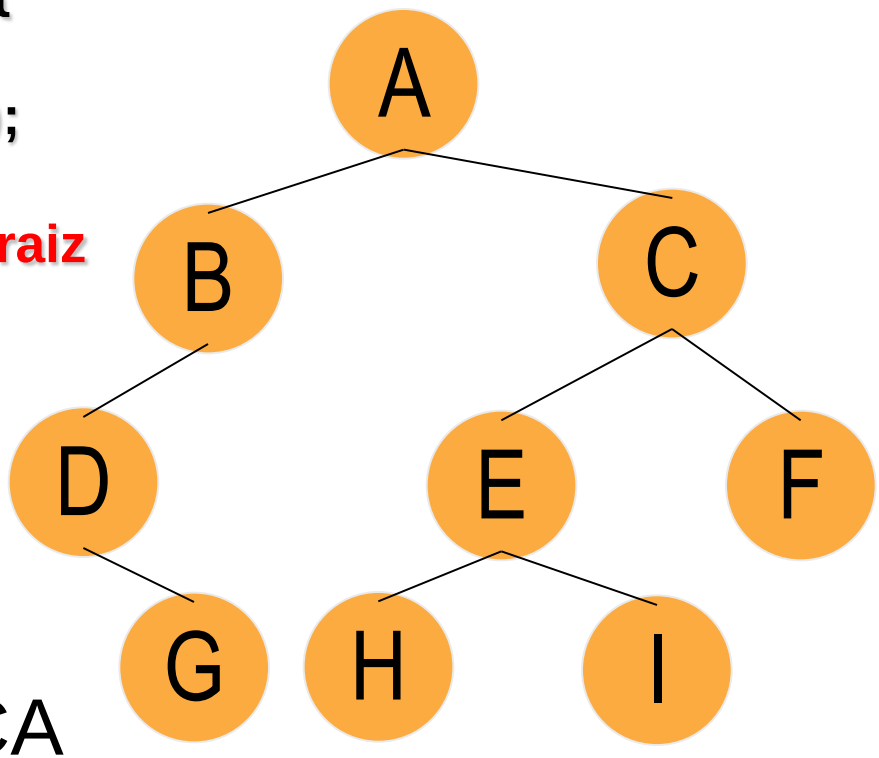
Pós-ordem

se árvore vazia, fim
1. percorrer em Pós-Ordem a subárvore esquerda
2. percorrer em Pós-Ordem a subárvore direita
3. visitar o nó raiz



AB - Percurso Pós-Ordem

```
void arv_percurso_pos_ordem(Arv a) {
    if (!arv_vazia(a)) {
       arv_percurso_pos_ordem(a->esq);
       arv_percurso_pos_ordem(a->dir);
       printf("%d\n",a->info); //processa raiz
    }
}
```



Resultado: GDBHIEFCA

E se invertermos as chamadas recursivas?

- Ainda é pós-ordem?

- Procedimento recursivo p/ destruir árvore, liberando o espaço alocado
  - Usar percurso em pós-ordem

- Arv arv_destroi (Arv a)

Procedimento recursivo p/ destruir árvore, liberando o espaço alocado (percurso em pós-ordem)

Porque não usamos pré ou in-ordem para esta tarefa???

```
Arv arv_destroi (Arv a) {
if (!arv_vazia(a)) {
arv_destroi(a->esq);  /* libera sae */
arv_destroi(a->dir);   /* libera sad */
free(a);                    /* libera raiz */
}
return NULL;
}
```