1. O que significa uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ser divergente?

2. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas e seja α um número real. Prove que se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ também convergem, e valem as relações:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3. Falso ou verdadeiro? Prove se for verdadeiro ou dê um contra-exemplo se for falso.

   (a) ( ) Se (a_n) é uma sequência divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

   (b) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.

   (c) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ também diverge.

   (d) ( ) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

   (e) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

   (f) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

   (g) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries de termos positivos e convergentes, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também é convergente.

   (h) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge.

(i) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $a_n \neq 0$ para todo n, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge.

(j) ( ) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge, para qualquer $p \in \mathbb{N}$ fixado.

4. Estabeleça a convergência ou divergência das seguintes séries usando o critério da comparação:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$$
$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$
$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+1)}$$
$$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^n}{n^{2n}} \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

5. Estabeleça a convergência ou divergência das seguintes séries usando o critério da razão:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!e^{-n} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$
$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n!}$$
$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}$$