EST507 Modelos de Regressão
2017

Resultados de Álgebra Matricial
(Adaptação da segunda versão)

Versão original: Cibele Russo (ICMC/USP)
Segunda versão: Gustavo Pereira (UFSCAr)

Notação

Escreveremos $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n\times m}$ para denotar uma matriz de dimensão $n \times m$, ou seja, uma matriz com n linhas e m colunas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Obs. Quando manuscrito, utilizamos a notação $\underset{\sim}{\mathrm{A}}$.

Notação

Escrevemos $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{s \times 1}$ para denotar um vetor coluna com s componentes:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \tag{1}$$

Obs. Quando manuscrito, utilizamos a notação $\underset{\sim}{\mathrm{v}}$.

Notação

A matriz transposta de $\mathbf{A}$ é denotada por $\mathbf{A}^\top$ e é definida como

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

O vetor transposto de $\mathbf{v}$ é denotado por $\mathbf{v}^\top$ e definido como

$$\mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} v_1, & \dots, & v_s \end{pmatrix} \tag{2}$$

Matriz transposta

1. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \Rightarrow \mathbf{A}$ é simétrica.
2. $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ são simétricas.
3. $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes; $\exists\ \mathbf{AB} \Rightarrow (\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$.

Traço de uma matriz

O traço de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$, denotado por $tr(\mathbf{A})$, é a soma dos elementos da diagonal principal de $\mathbf{A}$.

Pode-se provar que

1. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $n \times n$, então $\mathrm{tr}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \pm \mathrm{tr}(\mathbf{B})$
2. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $n \times p$ e $p \times n$, respectivamente, então $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

Matriz inversa

1. Se $\mathbf{A}_{n\times n}$ admite inversa, então $\mathbf{A}$ é dita não singular. Caso contrário, $\mathbf{A}$ é singular.
2. Se $\mathbf{A}_{n\times n}$ admite inversa, digamos $\mathbf{A}^{-1}$, então a inversa é única.
3. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.
4. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
5. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $n \times n$ não singulares, então $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
6. $\mathbf{A}_{n\times n}$ é não singular e $k \neq 0$. Então, $(k\mathbf{A})^{-1} = (1/k)\mathbf{A}^{-1}$.
7. Se $\mathbf{A}_{n\times n}$ é não singular, $(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1}$, com notação $\mathbf{A}^{-\top}$.

Determinante de uma matriz

1. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $n \times n$, então $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.
2. $\det(\mathbf{A}_{n\times n}) = 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ é singular.
3. $\det(\mathbf{A}_{n\times n}) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ é não singular.
4. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$.

Definição

Dependência linear de vetores

Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ m vetores $n \times 1$, ou seja, $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$.

O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes (li) se

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots = c_m = 0.$$

Caso contrário, dizemos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes (ld).

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times m}$, denotado por r $(\mathbf{A})$, satisfaz r $(\mathbf{A}) =$ número de colunas li de $\mathbf{A}$ = número de linhas li de $\mathbf{A}$ = ordem da maior submatriz de $\mathbf{A}$ com determinante não nulo.

r $(\mathbf{A}_{n\times m}) \leqq \min(n, m)$.

Se r $(\mathbf{A}_{n\times m}) = \min(n, m)$, dizemos que a matriz é de **posto completo**.

Caso contrário, dizemos que a matriz é de **posto incompleto**.

Posto de uma matriz

Pode-se provar que

1. Para qualquer matriz $\mathbf{A}$, $\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = \mathrm{r}\left(\mathbf{A}^\top\right)$.
2. Para qualquer matriz $\mathbf{A}$,
   $\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = \mathrm{r}\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\right) = \mathrm{r}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top\right)$.
3. $\det(\mathbf{A}_{n\times n}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) < n$.
4. $\det(\mathbf{A}_{n\times n}) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = n$.
5. $\mathbf{A}_{n\times n}$ matriz não singular $\Rightarrow \mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = \mathrm{r}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)$.

Matrizes ortogonais

- Os vetores $\mathbf{x}_{nx1}$ e $\mathbf{y}_{nx1}$ são ortogonais se $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$.
- Os vetores $\mathbf{x}_{nx1}$ e $\mathbf{y}_{nx1}$ são ortonormais se forem ortogonais e tanto $\mathbf{x}$ como $\mathbf{y}$ tiverem norma (euclidiana) igual a 1, lembrando que a norma do vetor $\mathbf{x}$ é igual a $(\mathbf{x}^\top \mathbf{x})^{1/2}$.
- $\mathbf{P}_{n\times n}$ é ortogonal se suas colunas forem vetores ortogonais.
- $\mathbf{P}_{n\times n}$ é ortogonal $\Rightarrow \mathbf{P}^\top \mathbf{P} = \mathbf{I}_n$.
- $\mathbf{P}_{n\times n}$ é ortogonal $\Rightarrow \det(\mathbf{P}) \in \{-1, 1\}$.
- $\mathbf{P}_{n\times n}$ é ortogonal $\iff \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top$.

Raízes características (ou autovalores)

- As raízes características de uma matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ são soluções em λ da equação $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$.
- A soma das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$.
- O produto das raízes características de $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A})$.
- Se $\mathrm{r}\,(\mathbf{A}_{n\times n}) = p \leqq n$, então $n - p$ raízes da equação $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$ são nulas.

Matrizes idempotentes

1. $\mathbf{B}_{n\times n}$ é idempotente se $\mathbf{B} = \mathbf{BB}$.
2. Se $\mathbf{A}$ é idempotente, então $\mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$.
3. Se $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é idempotente, então $\mathrm{r}\,(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathrm{r}\,(\mathbf{A}) - \mathrm{r}\,(\mathbf{B})$.
4. As raízes características de uma matriz idempotente $\in \{0, 1\}$.

Matrizes idempotentes

Sejam $\mathbf{X}_{n \times p}$ com $n > p$ e posto p (posto completo) e $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ a matriz chapéu (*hat matrix*).

Então,

1. $\mathbf{H}$ é idempotente.
2. $\mathbf{I}_n - \mathbf{H}$ é idempotente.
3. $(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{H} = \mathbf{0}$.
4. $\mathrm{r}\,(\mathbf{H}) = \mathrm{r}\,(\mathbf{X}) = p$.
5. $\mathrm{r}\,(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) = n - p$.

Formas quadráticas

Se $\mathbf{A}_{n \times n}$ é uma matriz simétrica e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ é um vetor, então

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$$

é denominado uma **forma quadrática**.

Matrizes definidas e semidefinidas positivas

Se a matriz simétrica $\mathbf{A}_{n\times n}$ tem a propriedade $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ para todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então a forma quadrática $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é dita definida positiva e $\mathbf{A}$ é uma **matriz definida positiva**.

Se a matriz simétrica $\mathbf{A}_{n\times n}$ é tal que $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geqq 0$ para todo vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e existe pelo menos um $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, então a forma quadrática $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ é dita semidefinida positiva e $\mathbf{A}$ é uma **matriz semidefinida positiva**.

$\mathbf{A}_{n\times n}$ é **definida negativa** se -$\mathbf{A}_{n\times n}$ é definida positiva.

$\mathbf{A}_{n\times n}$ é **semidefinida negativa** se -$\mathbf{A}_{n\times n}$ é semidefinida positiva.

Matrizes definidas e semidefinidas positivas

1. Se $\mathbf{A}_{n\times n}$ é definida positiva, então $\mathbf{A}$ é não singular ($\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) = n$).
2. Se $\mathbf{A}_{n\times n}$ é semidefinida positiva, então $\mathbf{A}$ é singular ($\mathrm{r}\left(\mathbf{A}\right) < n$).
3. Se $\mathbf{A}$ é definida positiva, então $a_{ii} > 0$ para $i = 1, \ldots, n$.
4. Se $\mathbf{A}$ é semidefinida positiva, então $a_{ii} \geqq 0$ para $i = 1, \ldots, n$.
5. Se $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular e $\mathbf{A}$ é definida positiva, então $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}\mathbf{B}$ é definida positiva.
6. Se $\mathbf{B}$ é uma matriz não singular e $\mathbf{A}$ é semidefinida positiva, então $\mathbf{B}^\top\mathbf{A}\mathbf{B}$ é semidefinida positiva.

Matrizes definidas e semidefinidas positivas

1. Se $\mathbf{B}_{n \times p}$ é uma matriz qualquer e $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = p$, então $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ é definida positiva.
2. Se $\mathbf{B}_{n \times p}$ é uma matriz qualquer e $\mathrm{r}(\mathbf{B}) < p$, então $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ é semidefinida positiva.
3. Toda matriz de covariâncias é semidefinida positiva ou definida positiva.

Raízes características e matrizes definidas e semidefinidas positivas

Seja $\mathbf{A}_{n \times n}$ uma matriz com raízes características $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Se $\mathbf{A}$ é definida positiva, então $\lambda_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$.
2. Se $\mathbf{A}$ é semidefinida positiva, então $\lambda_i \geqq 0$ para $i = 1, \ldots, n$. O número de raízes características para as quais $\lambda_i > 0$ é o posto de $\mathbf{A}$.