01 – Grafos: parte 1

SCC0503 – Algoritmos e Estruturas de Dados II

Prof. Moacir Ponti Jr.

`www.icmc.usp.br/~moacir`

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP

2011/1

Sumário

Introdução e Problemas

Itens e relacionamento

- Muitas aplicações tem uma natureza que envolve não apenas um conjunto de itens, mas também um conjunto de **conexões** entre pares de items.
- Os items passam a ter uma relação estabelecida pelas conexões.
- Já viram alguma estrutura de dados que permita modelar itens e relacionamento entre eles?
  - Árvores provêem "apenas" uma forma de modelar relacionamento **hierárquico**.

Grafos

- Grafos são objetos abstratos que modelam itens e a relação entre eles.
- Teoria dos Grafos é uma grande área de matemática combinatória e envolve uma série de resultados importantes obtidos principalmente a partir do século XVII.

Alguns problemas

Mapas

- Uma pessoa que sai em uma viagem geralmente quer saber “qual o caminho mais curto” ou “qual o caminho mais barato” para ir de uma cidade a outra.
- Essas questões podem ser respondidas processando informações sobre conexões (estradas e ruas) entre itens (cidades).

Hypertexto

- Quando surfamos na Web, documentos fazem referências a outros documentos por meio de *links*.
- A Web é um grafo, onde os itens são documentos e as conexões são os *links*. Algoritmos baseados em grafos são essenciais para motores de busca, por exemplo.

Alguns problemas

Estrutura de um programa

- um compilador monta grafos para representar a estrutura de um sistema grande
- Os itens são as várias funções e módulos que compoem o sistema e as conexões estão associadas por exemplo com a possibilidade de uma função chamar outra função.

Redes sociais

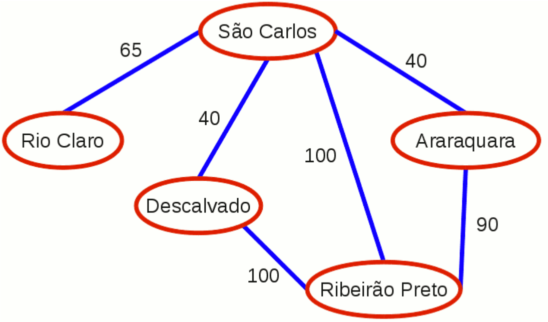
- Há diversas redes sociais: familiares, de trabalho, de amizades que podem ser modeladas por um grafo.
- As pessoas são os items e o relacionamento entre duas pessoas representada por uma conexão.

1. Redes


RNP
Boa Vista
Macapá
Belém
Santarém
São Luís
Alcântara
Tefé
Manaus
Fortaleza
Fernando de Noronha
Marabá
Teresina
Natal
Campina Grande
Recife
Porto Velho
Maceió
Rio Branco
Palmas
Aracaju
Salvador
EUA
Cuiabá
Cáceres
Brasília
Goiânia
Velocidade das conexões
2 Mbps
1 Mbps
512 Kbps
384 Kbps
256 Kbps
128 Kbps
64 Kbps
64 Kbps (solicitadas)
64 Kbps (pendentes de definição de pontos de presença)
Campo Grande
Belo Horizonte
Vitória
EUA
EUA
EUA
Rio de Janeiro
São Paulo
Curitiba
Florianópolis
EUA
Porto Alegre
f00199pd.gif
Copyright © 1999, RNP.

Aplicações

1. Estradas

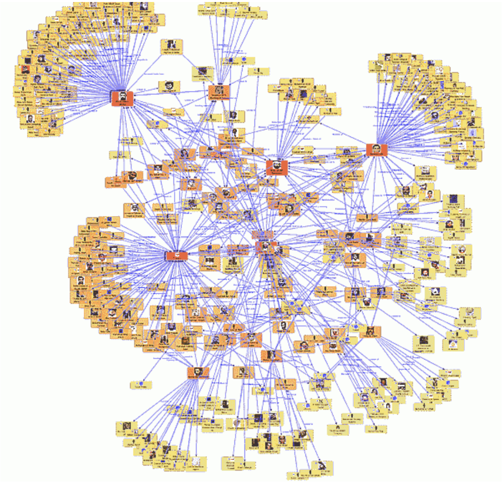


Aplicações

1. Vôos

Aplicações

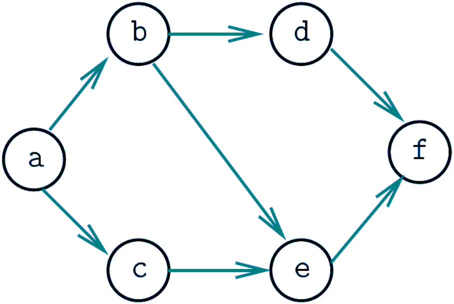
1. Redes Sociais...
2. *small world network* (rede de mundo pequeno)



Sumário

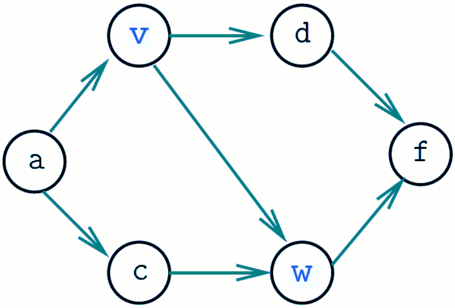
Digrafos

- *Directed graph*, ou **digrafo** é um conjunto de **vértices** (bolas) e um conjunto de **arcos** (flechas)



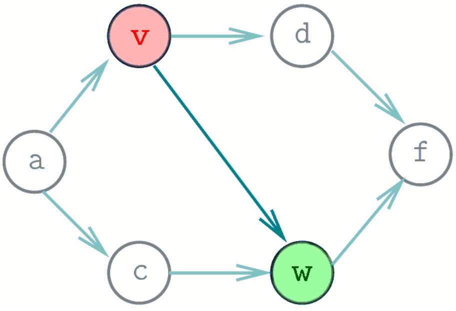
Arcos e Vértices

- Um **arco**, é um par ordenado de vértices
- Exemplo: `v` e `w` são vértices e `v-w` é um arco.



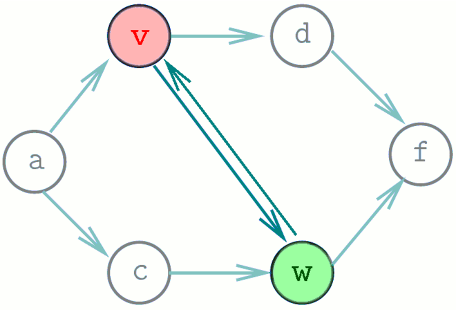
Examinando um arco

- O primeiro vértice do par ordenado é a ponta inicial do arco, e o segundo a ponta final.
- A presença de um arco `v-w` é independente da existência de `w-v`.
- Dizemos que o vértice `w` é **vizinho** de um vértice `v`, que `w` é **adjacente** a `v`, ou ainda que `v` **domina** `w`.



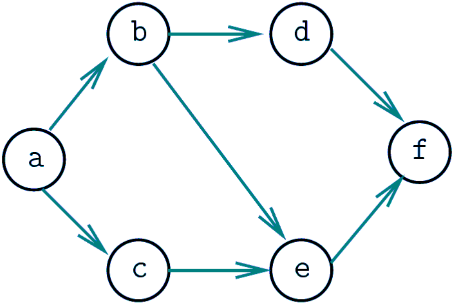
Digrafos Simétricos

- Um digrafo é **simétrico** se cada um de seus arcos é anti-paralelo a outro.
- Dois arcos são **anti-paralelos** se a ponta inicial de um é a ponta final do outro
- Os arcos `v-w` e `w-v` são anti-paralelos.



Graus

- **Grau de entrada**:
  de um vértice v é o número de arcos com ponta *final* v
- **Grau de saída**:
  de um vértice v é o número de arcos com ponta *inicial* v
- No exemplo abaixo, b tem grau de entrada 1 e grau de saída 2.



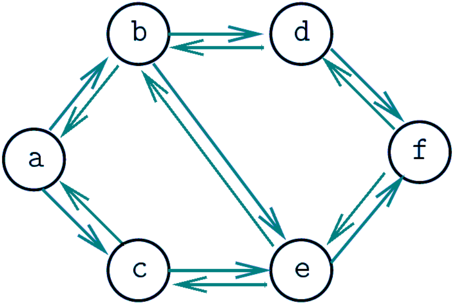
Como especificar um digrafo?

- Uma especificação possível é exibir o conjunto de seus arcos:
- Exemplo: `0-1, 0-5, 1-0, 1-5, 2-4, 3-1, 5-3.`

Sumário

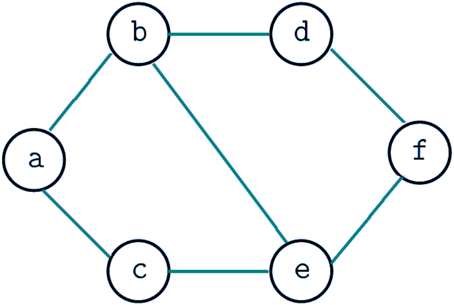
Grafos

- Um **grafo** (*graph*) é um tipo especial de digrafo: grafo não dirigido, grafo não orientado.
- Um **grafo** é um digrafo simétrico.



Grafos

- Um **grafo** é um digrafo simétrico.



- Um par de arcos antiparalelos é uma **aresta** (*edge*).
- Não há ponta final ou inicial e portanto uma aresta `v-w` = `w-v`

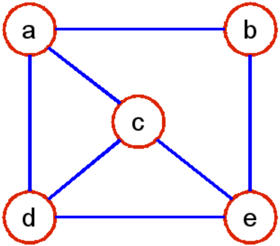
Definição

- Um grafo $G = (V, E)$ é composto de:

  V: conjunto de **vértices**

  E: conjunto de **arestas**

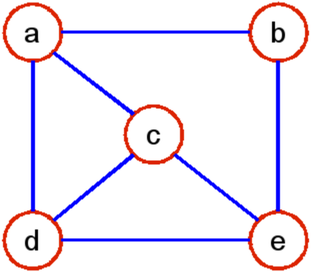
- Se $\alpha = \{v, w\}$ é uma aresta de um grafo, dizemos que α **liga** os vértices v e w, ou que **incide** em v (e em w).



$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, d, e\} \\
E &= \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), \\
&\quad (c, d), (c, e), (d, e)\}
\end{aligned}
$$

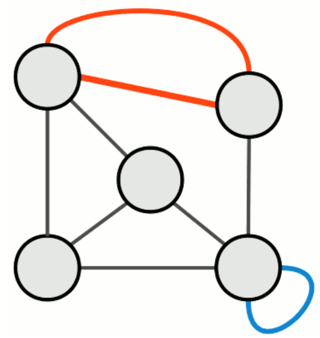
Adjacência e Grau

- **Vértices adjacentes**: vértices conectados por uma aresta.
  - as arestas são *incidentes* em um vértice.
- **Grau** de um vértice: número de arestas incidentes.



Grafos: laços e arestas múltiplas

- Um **laço** (*loop*) é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. No exemplo abaixo temos um laço na cor azul.
- **Arestas múltiplas** ocorrem quando existe a possibilidade de mais de uma aresta conectar o mesmo par de vértices. Abaixo um exemplo de arestas múltiplas em vermelho.



Sumário

Tipos de Grafos

Sejam:

- $V(G)$ o conjunto de vértices, em G, de tamanho n, e
- $E(G)$ o conjunto de arestas, em G, de tamanho m.

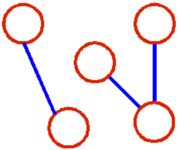
Podemos classificar os grafos em alguns tipos

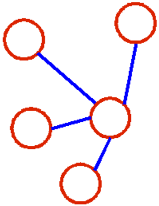
- **Simples**: grafo sem *laços* nem *arestas múltiplas*.
- **Vazio**: um grafo G é vazio se $V(G) = E(G) = \emptyset$.
- **Trivial**: um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta.
- **Completo**: grafo simples em que qualquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. Existe um único grafo completo com n vértices, denotado K_n. O grafo K_3 é também chamado de triângulo.

Grafo acíclico e árvore

- **Grafo acíclico**: grafo sem ciclos. O exemplo abaixo à esquerda é um grafo acíclico.

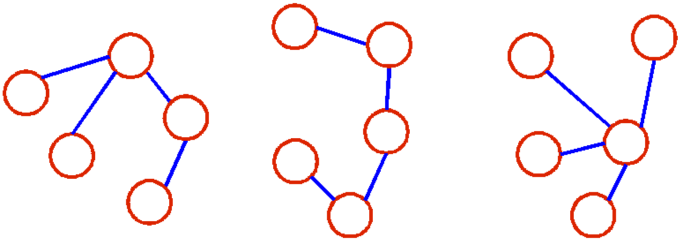
- **Árvore**: grafo acíclico conexo. O exemplo à direita é uma árvore.
- Em uma árvore, $m = n - 1$ (todo vértice tem grau 2).
- Se $m < n - 1$, então G é um grafo não conexo.





Floresta

- **Floresta**: conjunto de árvores



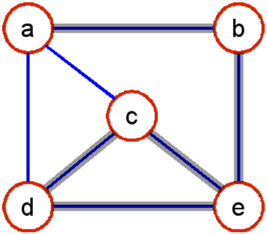
Sumário

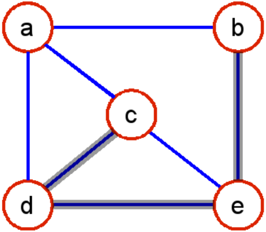
Caminho (I)

- **Caminho**: sequência de vértices $v_1, v_2, \cdots, v_k$ tal que os vértices consecutivos v_i e v_{i+1} são adjacentes

Ao lado temos os caminhos:

- a, b, e, d, c, e
- b, e, d, c

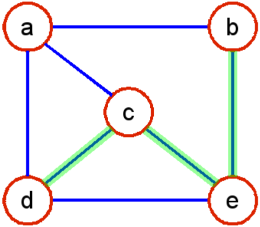




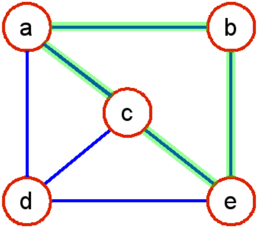
Caminho (II)

- **Caminho simples**: caminho para o qual não há vértices repetidos

- **Ciclo simples**: caminho simples $v_1, v_2, \cdots, v_k$, onde $v_k = v_1$.

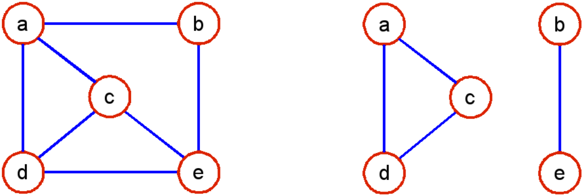


Caminho simples b, e, c, d



Ciclo simples a, b, e, c, a

- **Grafo conexo**: para todo par de vértices distintos u, v no grafo, existe um caminho de u a v. Um grafo que não é conexo é dito **não conexo**.

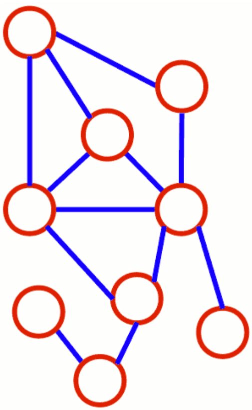


Conexo

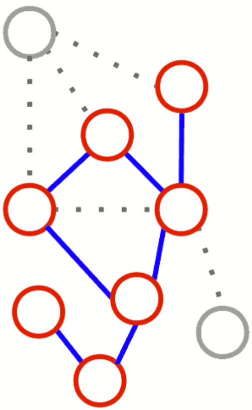
Não conexo

Subgrafos (I)

- **Subgrafo**: subconjunto de vértices e arestas que formam um grafo

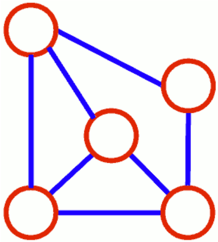


Grafo G

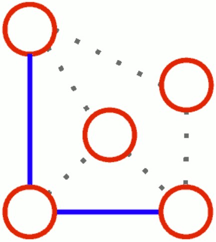


Subgrafo de G

- **Subgrafo gerador** (*spanning subgraph*) de G: é um subgrafo que contém todos os vértices de G



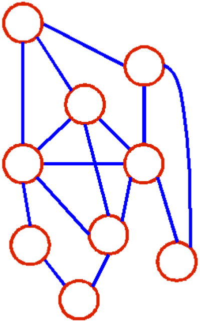
Grafo G

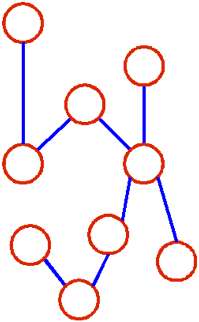


Subgrafo gerador de G

Árvore Geradora (*spanning tree*)

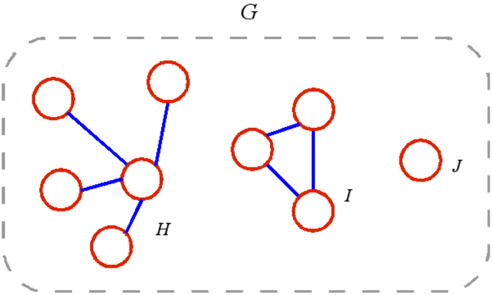
- Uma **árvore geradora** de G é um subgrafo que é uma árvore e que contém todos os vértices de G. Abaixo, à esquerda, um grafo G e à direita uma árvore geradora de G.





Componente conexo maximal

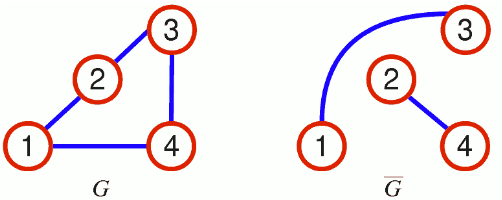
- **Componente conexo**: subgrafo conexo maximal.
- Se H é um subgrafo conexo maximal de G, não existe nenhum supergrafo de H que é um subgrafo conexo de G. Obs: nada impede que G tenha outro subgrafo conexo.
- O grafo abaixo possui 3 componentes conexos



Complemento

O complemento $\bar{G}$

de um **grafo** G é o grafo obtido a partir do mesmo conjunto de vértices de G conectado com as todas as arestas não existentes em G.

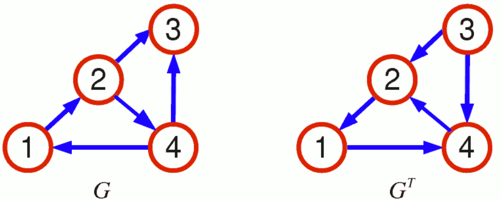


O que é $G \cup \bar{G}$? um grafo simples completo com todos os vértices de G

Transposição

O digrafo transposto G^T

de um **digrafo** G é o digrafo obtido de G com todas as suas arestas em direções opostas.



Sumário

Número de arestas

Seja n o número de vértices e m o número de arestas num grafo:

1. A soma do grau dos vértices é igual ao dobro do número de arestas
2. Em um grafo, o número de arestas é limitado:

$$\binom{2}{n} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

3. Em um digrafo, podemos ter dois arcos para cada aresta de um grafo, e portanto:

$$m \leq n(n-1)$$

Grafo Denso e Esparso

Grafo denso

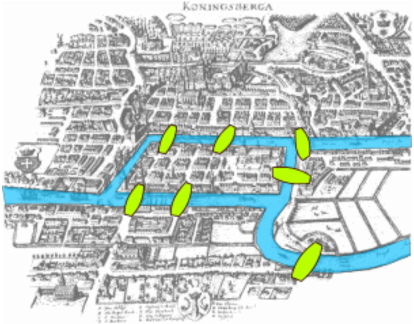
Um grafo simples G é dito **denso**: se a quantidade de arestas se aproxima do limitante definido nas propriedades anteriores.

Grafo esparso

G é **esparso**: se a quantidade de arestas é muito menor do que o limitante. Por exemplo, se $m \approx n - 1$, para um grafo conexo.

Sumário

Problema das Pontes de Königsberg

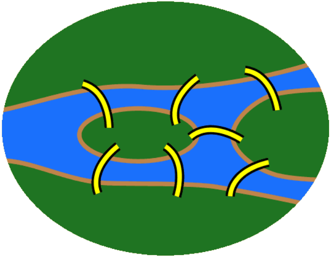


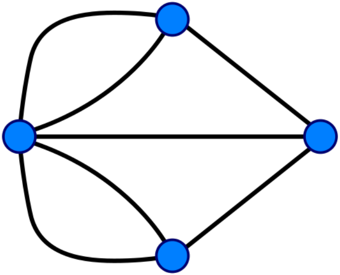
- Problema baseado na cidade de Königsberg *(Prússia até 1945, atual Kaliningrado, Rússia)* que é cortada pelo Rio Pregolia.
- Há duas grandes ilhas que na época contavam com sete pontes.

- **Problema**: encontrar um caminho que passe por cada ponte uma vez, e apenas uma vez.
  - as ilhas não podem ser alcançadas por outra rota que não as pontes
  - cada ponte deve ser sempre cruzada completamente.

Problema das Pontes de Königsberg

- Leonard Euler, em 1735, resolveu o problema, escrevendo um teorema provando que o caminho não era possível, por meio de um modelo que acredita-se ser o primeiro "grafo" da história.

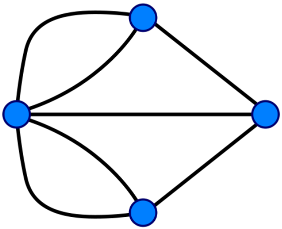




Problema das Pontes de Königsberg

- O modelo não é exatamente um grafo, pois há mais do que uma aresta entre dois vértices u e v. É mais especificamente, um *multigrafo*.
- O **teorema** de Euler é considerado o primeiro teorema de **teoria dos grafos**.

- Euler estabeleceu que um caminho que passe por todos as arestas uma única vez — atualmente chamado **Caminho Euleriano** —, depende do grau dos vértices do grafo.
  - é preciso haver exatamente zero ou dois nós de grau ímpar no grafo para que um caminho euleriano seja possível.



Bibliografia I

SEDGEWICK, R.
Algorithms in C: part 5, 3.ed., Addison-Wesley, 2002.
Seções: 17.0 e 17.1

ZIVIANI, N.
Projeto de Algoritmos, 3.ed. Cengage, 2004.
Capítulo: 7

PINA JR., J.C.
Notas de aula: Algoritmos em Grafos
IME/USP, 2010,
`http://www.ime.usp.br/~coelho/mac0328-2009/aulas/`.