$\boxed{\textbf{6}^a\textbf{ Lista de Exercícios de SMA332 - Cálculo II}}$

Professor: Thais Jordão e Wagner Vieira Leite Nunes 17.02.2014

Exercício 1 *Para cada uma das funções abaixo:*

a) $f(x,y) \doteq 4y^3 + \sqrt{x^2+y^2}$, *encontre* $f_x(x,y), f_y(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

b) $f(x,y) \doteq \dfrac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}}$, *encontre* $\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *com* $y^2 - x^2 \neq 0$

c) $f(x,y) \doteq 4xyz - \ln(2xyz)$, *encontre* $\partial_x f(x,y,z), \partial_y f(x,y,z), \partial_z f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *com* $xyz > 0$

d) $f(r,\theta) \doteq r\tan(\theta) - r^2\,\mathrm{sen}(\theta)$, *encontre* $f_r\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right), f_\theta(3,\pi)$

e) $f(x,y,z) \doteq e^{xy^2} + \ln(y+x)$, *encontre* $f_x(3,0,17), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *com* $y+x>0$

f) $f(x,y) \doteq \displaystyle\int_x^y \ln[\mathrm{sen}(t)]\,dt$, *encontre* , $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y), \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y), \quad (x,y) \in \mathrm{Dom}(f)$

g) $f(x,y,z) \doteq x^\alpha y^\beta z^\gamma$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z), \quad (x,y,z)\mathrm{Dom}(f)$

h) $w \doteq f(u,v)$, $u \doteq r\cos(\theta), v \doteq r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,\theta), \dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r,\theta), \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}(r,\theta), \quad (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 2 *Nos itens a), b), c) e f) do Exercício acima encontrar o vetor gradiente da função* $\underline{f}$, *isto é,* $\nabla f(x,y)$, *nos pontos onde ele existir.*

Exercício 3 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Mostre que a função $\underline{f}$ *lé contínua em* $\mathbb{R}^2$*;*
b) Calcule $f_x(x,y)$ *e* $f_y(x,y)$ *para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*;*
c) Calcule $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$*, caso existam.*
d) Mostre que as funções f_x *e* f_x *são contínuas em* $\mathbb{R}^2$*;*
e) Calule $f_{xy}(x,y)$ *e* $f_{yx}(x,y)$ *para* $(x,y) \neq (0,0)$.
f) Verifique que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. *Há alguma contradição disto com a teoria? justifique sua resposta.*

Exercício 4 *Mostre que a função* $f : \mathbb{R}\ 2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x^2y - xy}{x^2+y^2}, \ (x,y,z) \neq (0,0) \\ 0, \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *é diferenciável em* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 5 *Encontre a inclinação da reta tangente à curva obtida da intersecção da superfície* $36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36 = 0$ *com o plano* $x = 1$ *no ponto* $(1, \sqrt{12}, 3)$. *Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.*

Exercício 6 *Encontre a inclinação da reta tangente à curva obtida da intersecção da superfície* $z = x^2 + y^2$ *com o plano* $y = 1$ *no ponto* $(2,1,5)$. *Interprete essa inclinação como uma derivada parcial.*

Exercício 7 *A temperatura* T *em qualquer ponto de uma placa plana é dada pela função* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *onde* $T(x,y) \doteq 54 - \dfrac{2}{3}x^2 - 4y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *Ache a taxa de variação da temperatura na placa nas direções dos eixos positivos dos* Ox *e dos* Oy, *no ponto* $(3,1)$.

Exercício 8 *Determine uma equação do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto* P *indicado nos seguintes casos:*

a) $z = \left(x^2 + y^2\right)^2$, $P = (1, 2, 25)$

b) $z = 4xy$, $P = \left(4, \frac{1}{4}, 4\right)$

c) $z = \text{sen}(x) + \text{sen}(2y) + \text{sen}(3(x+y))$, $P = (0, 0, 0)$

d) $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $P = \left(4, 4, \frac{\pi}{4}\right)$

Exercício 9 *Em quais pontos do cone* $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ *o plano tangente é paralelo ao plano* $4x - 2y + 4z = 5$ *?*

Exercício 10 *Mostre que os planos tangentes à representação geométrica do gráfico da função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) \doteq \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, *passam pela origem.*

Exercício 11 *Determine o plano que é paralelo ao plano* $z = 2x + 3y$ *e tangente à representação geométrica do gráfico da função* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y) \doteq x^2 + xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 12 *Definimdo o* **ângulo entre duas superfícies** *em um ponto* P, *comum as mesmas, como sendo o menor ângulo entre as retas normais a essas superfícies nesse ponto. Determine o ângulo entre às representações geométricas dos gráficos das funções* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f(x, y) \doteq e^{xy} - 1$ *e* $g(x, y) \doteq \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\right)$ *no ponto* $P = (0, 0, 0)$.

Exercício 13 *Diremos que duas* S_1 *e* S_2 *superfícies são* **tangentes** *em um ponto* P *pertencente a ambas se o plano tangente à superfície* S_1 *no ponto* P *coincidir com plano tangente à superfície* S_2 *no ponto* P. *Mostre que o cone* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ *e a esfera* $x^2 + y^2 + \left(z - \dfrac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \dfrac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$ *são tangentes nos pontos* $(0, b, c)$ *e* $(0, -b, c)$.

Exercício 14 *Encontre os pontos do parabolóide* $z = x^2 + y^2 - 1$ *nos quais a reta normal a esta superfície coincide com a reta que liga estes pontos a origem.*

Exercício 15 *Mostre que a função* $u : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $u(t, x) \doteq \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$, $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, *satisfaz a* **equação do calor unidimensional** $u_t(t, x) = k u_{xx}(t, x)$, *para todo* $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, *onde* $k > 0$ *é uma cosntante fixada.*

Exercício 16 *Mostre que a se as funções* $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções com duas derivadas contínuas em* $\mathbb{R}$ *então a função* $u ; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $u(t, x) \doteq \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, *satisfaz a* **equação da onda unidimensional**, *isto é, a equação diferencial parcial* $u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x)$ *para* $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, *onde* $c > 0$ *é uma constante fixada.*

Exercício 17 *Verifique se a função* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $u(x, y, z) \doteq x^2 + 2y^2 - 3z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *satisfaz a* **equação de Laplace em** R^3, *isto é, a equação diferencial parcial* $\triangle u(x, y, z) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z) = 0$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 18 *Encontrar as seguintes derivadas direcionais da função* $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y, z) \doteq \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *no ponto* $P = (1, 2, -1)$:

a) na direção do vetor $\overrightarrow{OP}$.

b) na direção em que ela seja máxima.

c) na direção dos vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ *e* $\vec{e}_3$.