

Lista Extra 1 - SMA 0332 Cálculo II

H. L. Guidorizzi, Vol 2, Capítulo 7, Seção 7.7

1. Dê exemplos de curvas γ e δ tais que $\text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\delta)$, mas que seus comprimentos sejam diferentes.
2. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ duas curvas com derivadas contínuas. Suponha que exista $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$, com derivada contínua e tal que $g'(u) > 0$ em $[c, d]$. Suponha, ainda, que $g(c) = a$ e $g(d) = b$ e $\delta(u) = \gamma(g(u))$ para todo $u \in [c, d]$. Prove que $\text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\delta)$ e que $L(\gamma) = L(\delta)$.

Observação. *Se as curvas γ e δ estiverem relacionadas desse modo, então dizemos que a curva δ é obtida de γ pela mudança de parâmetro $t = g(u)$ que conserva a orientação.*

3. Dizemos que uma curva $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, com derivada contínua, está parametrizada pelo comprimento de arco se $\|\delta'(s)\| = 1$, para todo $s \in [a, b]$. Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco.

(a) $\delta(s) = (\cos s, \sin s)$, $s \geq 0$.

(b) $\delta(s) = (R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R})$, $s \geq 0$, onde $R > 0$ é um real fixo.

(c) $\delta(s) = (\frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}})$, $s \geq 0$.

4. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, com derivada contínua, tal que $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Seja $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$.

(a) Verifique que $s = s(t)$ é invertível e seja $t = t(s)$ sua inversa.

(b) Verifique que a curva $\delta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (L é o comprimento de γ) dada por $\delta(s) = \gamma(t(s))$ está parametrizada pelo comprimento de arco.

5. Reparametrize pelo comprimento de arco a curva dada.

(a) $\gamma(t) = (2t + 1, 3t - 1)$, $t \geq 0$.

(b) $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \geq 0$.

(c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \geq 0$.

(d) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \geq 0$.