ICMC – USP

SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1

7ª lista de exercícios

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} f(\cdot;\theta)$, em que $f(x;\theta) = \frac{1}{2}(1+\theta\,x)\,I_{(-1,1)}(x)$, $-1 < \theta < 1$. Apresente estimadores consistentes[1] para θ e θ^2.

2. Sejam $X_{ij} \stackrel{\text{indep.}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu_i, \sigma^2)$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$.
   (a) Mostre que os EMV's de μ_i e σ^2 são $\widehat{\mu_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_{ij}$, $i = 1, \ldots, k$ e $\widehat{\sigma^2} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \widehat{\mu_i})^2/nk$.
   (b) Suponha n fixo. Prove que $\widehat{\sigma^2} \to \frac{n-1}{n}\sigma^2$, em probabilidade quando $k \to \infty$; logo, não é consistente (observe que o número de parâmetros $\to \infty$). Obtenha um estimador consistente de σ^2.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}((0,\theta])$. Prove que $X_{(n)} = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$ é um estimador consistente para θ. É não viesado?

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathsf{exponencial}(\lambda)$ e $X_{(1)} = \min_{i=1,\ldots,n} X_i$. Prove que $n\,X_{(1)}$ é um estimador não viesado de $\mathrm{E}_\lambda(X_1) = 1/\lambda$. É consistente?

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com função distribuição acumulada $F(\cdot)$. A função distribuição empírica é definida como
$$\widehat{F}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_{(-\infty,t]}(X_i),\ t \in \mathbb{R}.$$
   (a) A partir das observações $X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n$, esboce graficamente $\widehat{F}_n(\cdot)$.
   (b) Prove que $\widehat{F}_n(t)$ é um ENV e consistente para $F(t)$.

6. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com média μ e variância σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$. Qual(is) dos seguintes estimadores é(são) consistente(s) para μ?
$$\text{(a) } \widehat{\mu}_1 = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n iX_i, \quad \text{(b) } \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{\lfloor n/2 \rfloor}(X_1 + \cdots + X_{\lfloor n/2 \rfloor}) \quad \text{e} \quad \text{(c) } \widehat{\mu}_3 = X_n,$$
em que $\lfloor w \rfloor$ denota o maior inteiro menor do que ou igual a w.

7. Nas condições do exercício 6, qual(is) dos seguintes estimadores é(são) consistente(s) para σ^2?
$$\text{(a) } \widehat{\sigma^2}_1 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2}, \quad \text{(b) } \widehat{\sigma^2}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^2 (X_i - \mu_0)^2 \quad \text{e} \quad \text{(c) } \widehat{\sigma^2}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^2 (X_i - \widehat{\mu}_2)^2,$$
em que μ_0 é conhecido no item b e $\widehat{\mu}_2$ está definido no item 6b.

8. Considere $X_1, \ldots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}(0,\theta)$, $\theta > 0$.
   (a) Prove que $(\prod_{i=1}^n X_i)^{1/n}$ é um estimador consistente para θ/e.
   (b) Utilizando o resultado do item a, apresente estimadores consistentes para $\mathrm{E}_\theta(X_1)$ e $\mathrm{Var}_\theta(X_1)$.

[1] "Estimador consistente" refere-se a uma sequência de estimadores consistente.