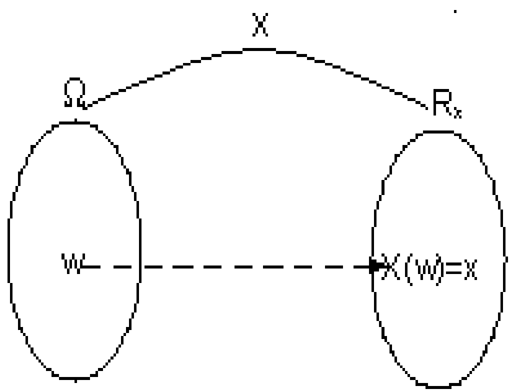
3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

2011

Variável aleatória

Ω é o espaço amostral de um experimento aleatório. Uma variável aleatória, X, é uma função que atribui um número real a cada resultado em Ω.



Exemplo. Retira-se, ao acaso, um item produzido de um lote de seis unidades. Variáveis:

X: Número de defeitos no item selecionado.

Y: Tempo de vida do item (em h).

O espaço amostral associado a este experimento aleatório é

$$\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_6\}.$$

Os possíveis valores da variável X são 0,1,2,..., e os possíveis valores da variável Y são os números reais não negativos.

Classificação:

•Variáveis aleatórias discretas (VDA). O conjunto de possíveis valores é finito ou infinito enumerável.

•Variáveis aleatórias contínuas (VAC). O conjunto de possíveis valores é infinito não enumerável (um intervalo, por exemplo).

No exemplo acima, X é discreta e Y é contínua.

Variáveis aleatórias discretas (VAD)

X é uma VAD com possíveis valores no conjunto R_X. Uma função f(x) é uma função de probabilidade se

$$\text{(i) } 0 \leq f(x_i) \leq 1,$$

$$\text{(ii) } \mathrm{P}(X = x_i) = f(x_i), \quad x_i \in \mathrm{R}_X \text{ e}$$

$$\text{(iii) } \sum_{x_i \in R_X} f(x_i) = 1.$$

Exemplo. Um lote de um certo produto é formado por 35 itens, sendo 21 itens do tipo H e 14 do tipo M. Uma amostra de 3 itens será formada sorteando-se, sem reposição, três itens do lote. Qual a probabilidade de encontrarmos na amostra pelo menos dois itens do tipo M?

Solução.

Exemplo. A demanda diária de um item é uma variável aleatória discreta com a função de probabilidade

$$\mathrm{P}(D = d) = \frac{C2^{d}}{d!}\ ; \quad d = 1, 2, 3, 4.$$

(a) Determinar a constante C.

(b) Calcular P(D $\geq$ 2).

Solução.

Função de distribuição acumulada de uma VAD

Função de distribuição acumulada (FDA)

X é uma VAD com valores em $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ e função de probabilidade f(x) = P(X =x). Para qualquer x, a FDA de X, denotada por F(x), é definida como

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} \mathrm{P}(X = x_i), \quad \text{em que} \quad x_i \in R_X .$$

Exemplo. Uma variável aleatória X tem função de probabilidade

$$f(x) = \mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} 1/15, & \text{se} \quad x = 1, \\ 7/15, & \text{se} \quad x = 2,3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determinar F(x).

Solução.

Observação.

Se $x \in [1,2)$, então $F(x) = F(1)$;

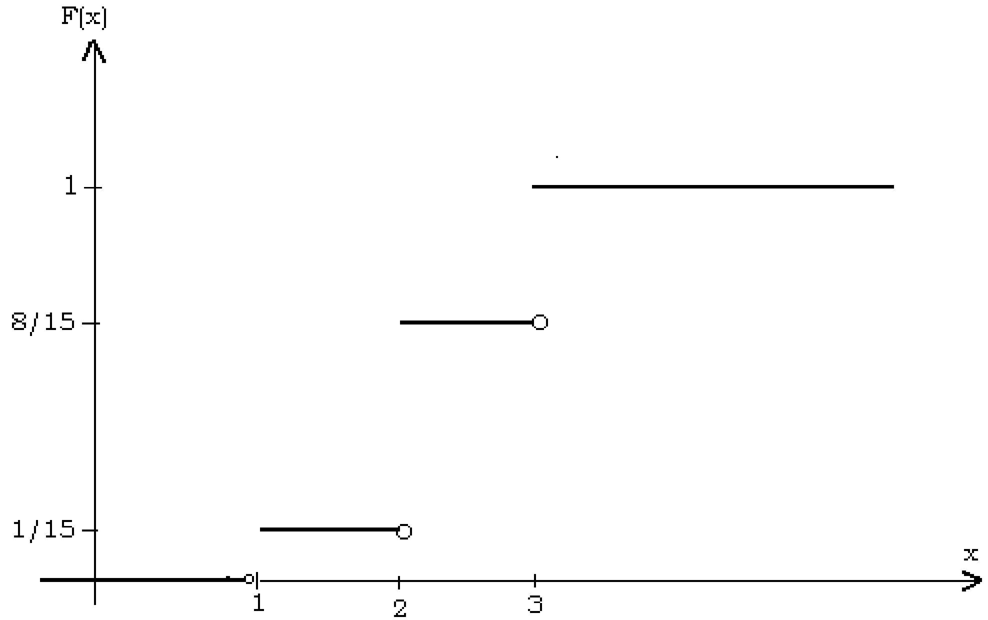
se $x \in [2,3)$, então $F(x) = F(2)$.

Em geral, se $x \in [x_l\ x_{l+1})$, então $F(x) = F(x_l)$

sendo que x_l e x_{l+1} são elementos de R_x.

Logo, a FDA é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 1, \\ 1/15, & \text{se} \quad 1 \le x < 2, \\ 8/15, & \text{se} \quad 2 \le x < 3, \\ 1, & \text{se} \quad x \ge 3. \end{cases}$$



X é uma VAD

1. Para todo x, $0 \le F(x) \le 1$.
2. F(x) é uma função monótona não decrescente.

3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4. Se $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, em que $x_1 < x_2 < \ldots$, então $f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

5. Se a e b são tais que a<b, então

$$(i)\ \mathrm{P}(X \le a) = F(a),$$

$$(ii)\ \mathrm{P}(X \ge a) = 1 - \mathrm{P}(X < a),$$

$$(iii)\ \mathrm{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a),$$

$$(iv)\ \mathrm{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + \mathrm{P}(X = a) \quad \mathrm{e}$$

$$(v)\ \mathrm{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) - \mathrm{P}(X = b).$$

Exemplo. A variável aleatória X tem função de distribuição acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ 1/8, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1/2, & \text{se} \quad 1 \leq x < 2, \\ 5/8, & \text{se} \quad 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

Determinar

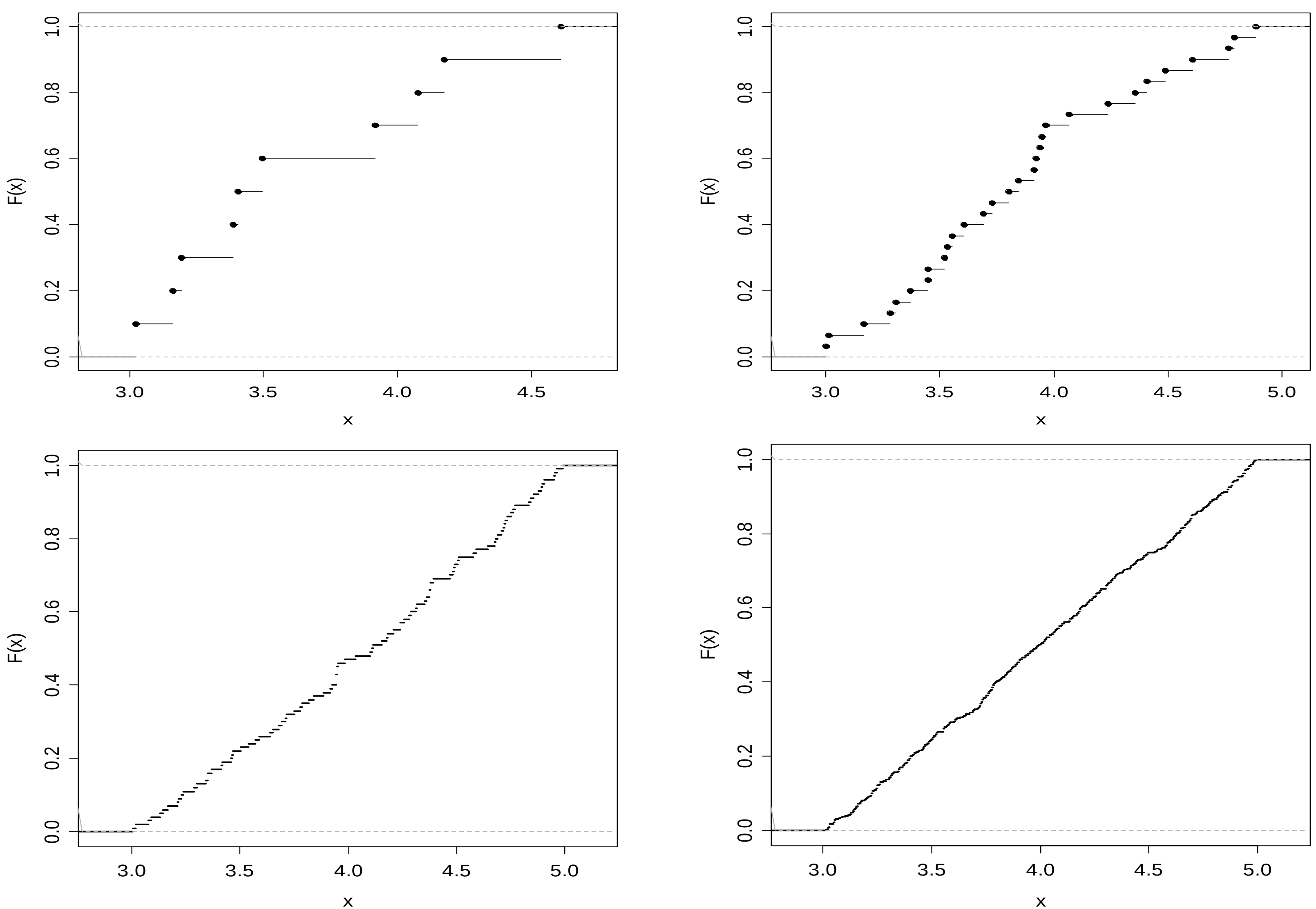
(a) $\mathrm{P}(1 < X \leq 3)$

(b) $\mathrm{P}(X \geq 2)$

(c) $f(x)$.

Solução.

Exemplos



Variáveis aleatórias contínuas (VAC)

Função densidade de probabilidade

Uma função f(x) é chamada função densidade de probabilidade de uma VAC X se

1. $f(x) \geq 0, \quad \text{para todo } x.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

3. Se $A = \{x; a \leq x \leq b\}$, então $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

Exemplo. O tempo de produção de um componente (em minutos) é uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5-x}{4}, & \text{se } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verificar se f(x) é uma função densidade de probabilidade e calcular a probabilidade que o tempo de produção de um artigo escolhido ao acaso seja menor do que 3 minutos.

Solução.

Observação. Se X é uma VAC, então

(i) $\mathrm{P}(X = x) = 0$, para todo x,

(ii) $\mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a \le X \le b)$

$= \mathrm{P}(a < X \le b)$, para todos a e b com $a < b$,

(iii) $\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}(X < a)$, para todo a.

Função de distribuição acumulada. X é uma VAC com função densidade f(x). A função de distribuição acumulada (FDA) de X é

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \text{ para todo } x.$$

Obs. Se X é um tempo de vida, utilizamos a função de confiabilidade (*reliability function*): R(x) = P (X > x) = 1 – F(x).

Exemplo. Uma variável aleatória X tem função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5-x}{4}, & \text{se } 2 \le x \le 4, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determinar F(x).

Observação.

A FDA de X permite o cálculo de probabilidades de eventos da forma

$E = \{x;\ a \le x \le b\}$, com $a \le b$. Isto é,

$$P(E) = F(b) - F(a).$$

Exemplo. Considere a FDA abaixo. Obtenha $P(X \le 3)$ e $P(3 \le X < 5)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 2, \\ \dfrac{9-(5-x)^2}{8}, & \text{se} \quad 2 \le x \le 4, \\ 1, & \text{se} \quad x \ge 4. \end{cases}$$

Solução.

Propriedades

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, para todo x.
2. F(x) é uma função monótona não decrescente.
3. F(x) é uma função contínua para todo x.
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1.$
5. Do teorema fundamental do cálculo obtemos

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

Exemplo. Suponha que o tempo de vida de um processador é uma variável aleatória X com

$$F(x) = \begin{cases} 1 - ke^{-\frac{x}{2}}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinar (a) o valor de k, (b) $P(X \geq 2)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ e $P(X \leq -1)$ e (c) f(x).

Solução.

Valor esperado e variância

Valor esperado de uma variável aleatória. X é uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade f(x). O valor esperado (ou esperança matemática ou média da variável aleatória), denotado por $E(X) = \mu_X$ é definido como

1. X é uma variável aleatória discreta:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) \quad \text{e}$$

2. X é uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

supondo que o somatório e a integral existem.

Valor esperado de uma função de variável aleatória

Y = h(X), sendo h uma função de X.

O valor esperado de h(X) é dado por

$$1.\ \text{X é uma variável aleatória discreta:}$$

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} h(x) f(x) \quad \text{e}$$

$$2.\ \text{X é uma variável aleatória contínua:}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx.$$

Variância de uma variável aleatória. X é uma variável aleatória com função de probabilidade ou função densidade de probabilidade f(x) e com média E(X) = μ_X.
A variância de X, denotada por $Var(X) = \sigma_X^2$ é definida como o valor esperado de $(X - \mu_X)^2$.

$$1.\ \text{X é uma variável aleatória discreta:}$$

$$Var(X) = \sum_{x \in R_X} (x-\mu)^2 f(x) \quad \text{e}$$

$$2.\ \text{X é uma variável aleatória contínua:}$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx.$$

Desvio padrão. É a raiz quadrada da variância:

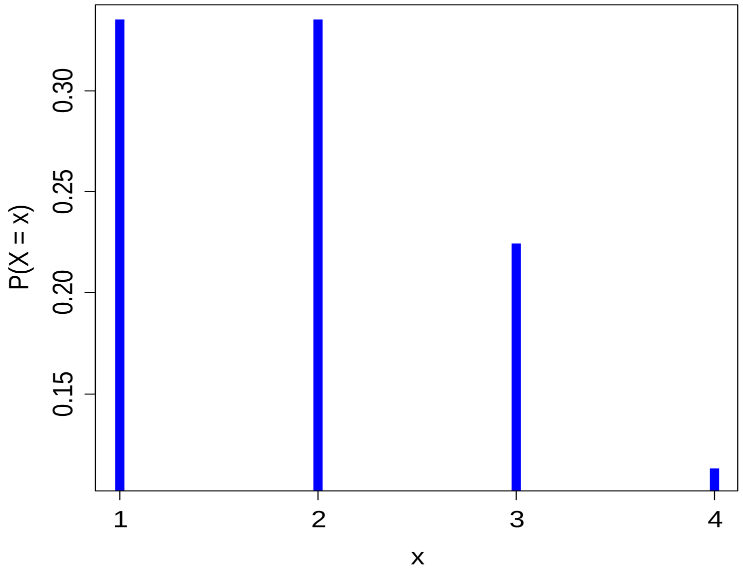
$$DP(X) = \sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

Exemplo. Suponha que a demanda diária de uma peça é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{2^x}{6x!}, & x = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

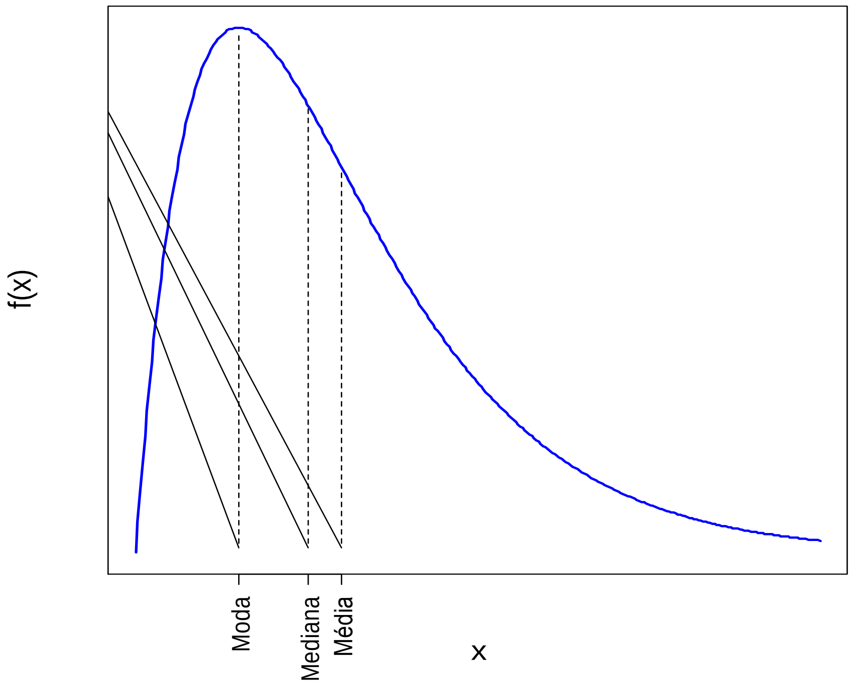
Determinar (a) a demanda esperada e (b) o desvio padrão da demanda.

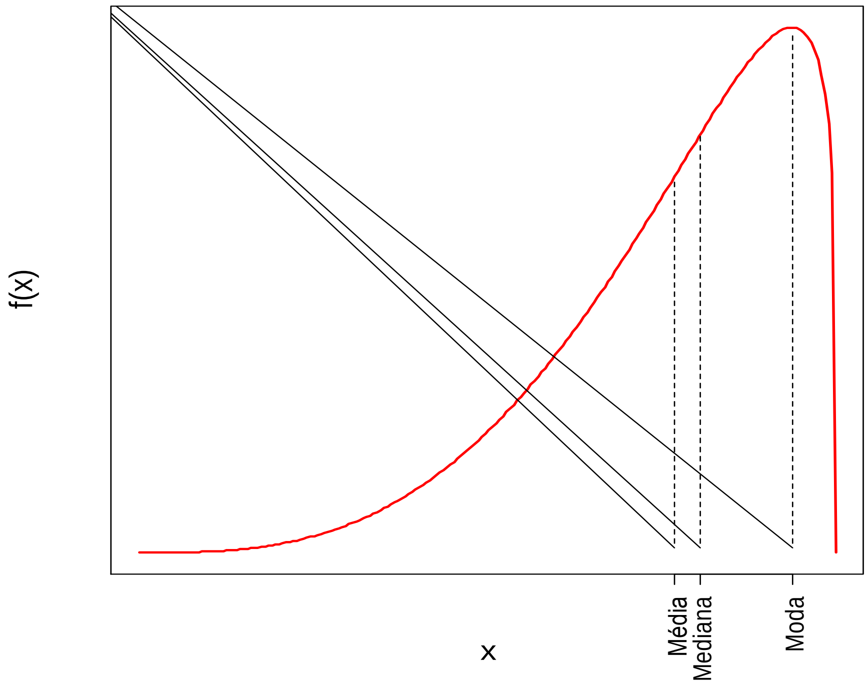
Observação. Gráfico de f(x).



Solução.

Moda, mediana e média (VAC)





Assimetria à direita:

Moda < Mediana < Média

Assimetria à esquerda:

Moda > Mediana > Média

Simetria: Mediana = Média (se existir).

Variáveis aleatórias independentes

X e Y são duas variáveis aleatórias. Dizemos que X e Y são independentes se, e somente se,

$$\mathrm{P}((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = \mathrm{P}(X \leq x) \times \mathrm{P}(Y \leq y))$$

$$= F_X(x) \times F_Y(y), \text{ para todos } x \text{ e } y,$$

sendo que F_X e F_Y são as FDA's de X e Y.

Em particular, se X e Y são duas variáveis aleatórias discretas, X e Y são independentes se, e somente se,

$$\mathrm{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathrm{P}(X = x) \times \mathrm{P}(Y = y), \text{ para todos } x \text{ e } y.$$

X e Y são duas variáveis aleatórias e *a* e *b* dois números reais.

$1. E(a) = a.$

$2. E(aX) = aE(X).$

$3. E(aX \pm b) = aE(X) \pm b.$

$4. E\left(aX \pm bY\right) = aE(X) \pm bE(Y).$

$5. Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2.$

$6. \; Var(a) = 0.$

$7. Var(aX) = a^2 Var(X).$

8. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então

$Var(a\mathrm{X} \pm b\mathrm{Y}) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y).$

9. Se $X_1, \cdots, X_n$ são n variáveis independentes, então

$Var(\mathrm{X}_1 + X_2 + \cdots X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n).$

Exemplo. O total de vendas diárias de um empresa que comercializa equipamentos eletrônicos (em dezenas de milhares de R$) é uma variável aleatória com função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{3}, & \text{se} \quad 2 \le x \le 4, \\ \dfrac{6-x}{6}, & \text{se} \quad 4 < x \le 6, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(a) Para um certo dia, determine a probabilidade de que as vendas da empresa sejam maiores do que R$ 22.000,00, mas não ultrapassem R$ 45.000,00.
(b) A média e o desvio padrão das vendas diárias.
(c) Se o lucro diário é dado pela função $Y = 0{,}2X - 0{,}5$, calcule a média e o desvio padrão do lucro diário.

Solução.