SCC0214 – Projeto de Algoritmos

Recursão

Definição

- Uma função é dita *recursiva* quando é definida em seus próprios termos, direta ou indiretamente
  - Dicionário Michaelis: *ato ou efeito de recorrer*
    - Recorrer: *Correr de novo por; tornar a percorrer. Repassar na memória; evocar.*
- É uma função **como qualquer outra**

Recursividade

- Utiliza-se uma função que permite chamar a si mesma (direta ou indiretamente)
- Exemplo: soma dos primeiros N inteiros
  - S(5) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1
  - = 5 + S(4)
  - S(4) = 4 + S(3)
  - S(3) = 3 + S(2)
  - S(2) = 2 + S(1)
  - S(1) = 1 (solução trivial)

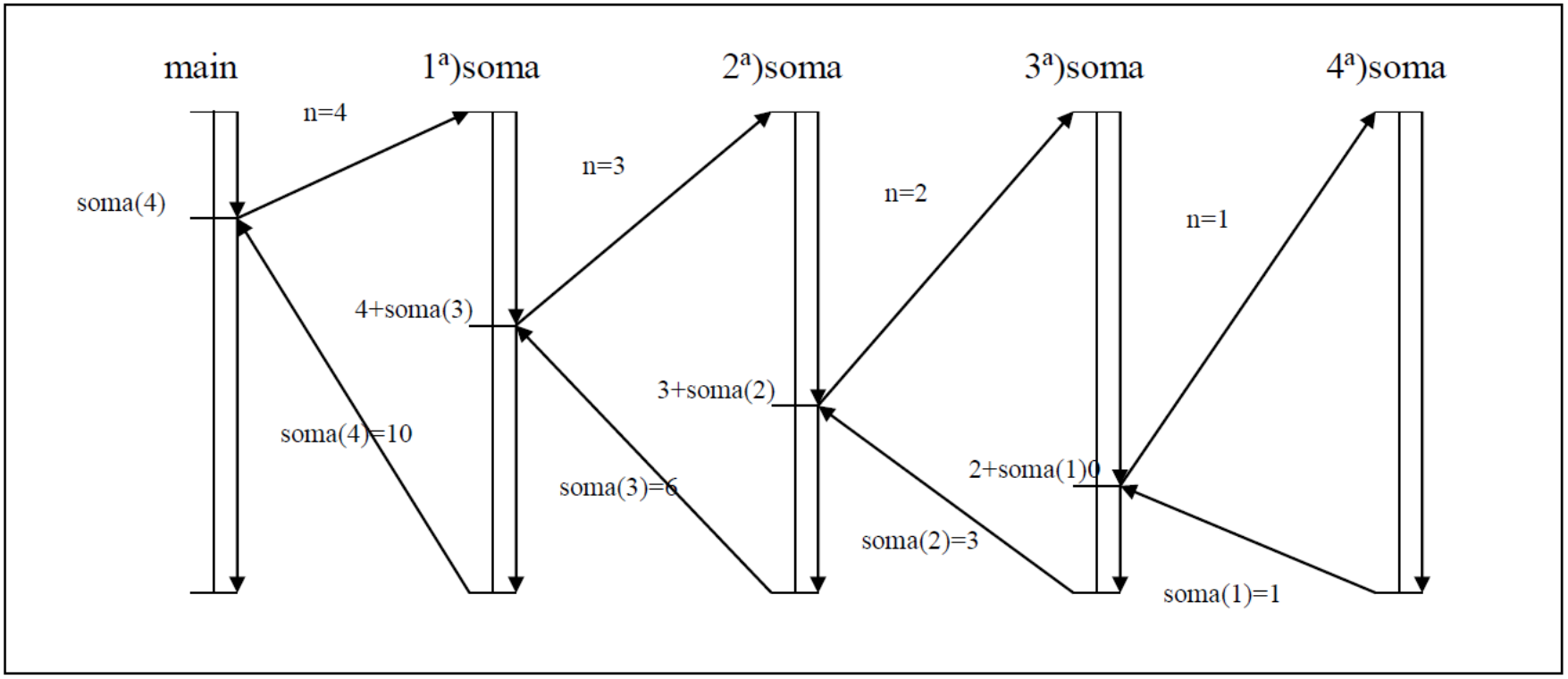
Recursividade

- **2 passos:**
  - Definir uma função recursiva, que decresce até alcançar a solução mais simples (trivial)
    - Ex: S(n) = n + S(n-1)
  - Definir a condição de parada (solução trivial)
    - Ex.: S(1) = 1

Recursividade

```
main( )
{
   int n;
   scanf("%d", &n);
   printf("%d", soma(n));
}
int soma(int n)
{
   if (n == 1)   return (1);
   else return (n + soma(n - 1));
}
```

Recursividade



Exercício

- Implemente uma função recursiva para calcular o fatorial de um número inteiro positivo

Exercício

- Implemente uma função recursiva para calcular o fatorial de um número inteiro positivo

```
//versão recursiva
int fatorial(int n) {
    int fat;

    if (n==0) fat=1;
    else fat=n*fatorial(n-1);

    return(fat);
}
```

Exemplo

- Função que imprime os elementos de um vetor

```
void imprime(int v[], int tamanho) {
    int i;
    for (i=0;i<tamanho;i++)
        printf("%d ",v[i]);
}
```

Exercício

- Faça a versão recursiva da função

Exercício

- Faça a versão recursiva da função

```
void imprime(int v[], int tamanho, int indice_atual) {
    if ( indice_atual < tamanho ) {
       printf("%d ", v[indice_atual] );
       imprime(v,tamanho,indice_atual+1);
    }
}
```

Efeitos da recursão

- A cada chamada
  - Empilham-se na memória os dados locais (variáveis e parâmetros) e o endereço de retorno
    - A função corrente só termina quando a função chamada terminar
  - Executa-se a nova chamada (que também pode ser recursiva)
  - Ao retornar, desempilham-se os dados da memória, restaurando o estado antes da chamada recursiva

Exercício para casa

- Simule a execução da função para um vetor de tamanho 3 e mostre a situação da memória a cada chamada recursiva

```
void imprime(int v[], int tamanho, int indice_atual) {
    if (indice_atual<tamanho) {
       printf("%d ",v[indice_atual]);
       imprime(v,tamanho,indice_atual+1);
    }
}
```

Alternativa: tem o mesmo efeito?

```
void imprime0(int v[], ...) {
        printf("%d ",v[0]);
        imprime1(v,...);
    }
}

void imprime1(int v[], ...) {
        printf("%d ",v[1]);
        imprime2(v,...);
    }
}
```

```
void imprime2(int v[], ...) {
        printf("%d ",v[2]);
        imprime3(v,...);
    }
}

...
```

Alternativa: tem o mesmo efeito?

```
void imprime0(int v[], ...) {
        printf("%d ",v[0]);
        imprime1(v,...);
    }
}

void imprime1(int v[], ...) {
        printf("%d ",v[1]);
        imprime2(v,...);
    }
}
```

```
void imprime2(int v[], ...) {
        printf("%d ",v[2]);
        imprime3(v,...);
    }
}

...
```

Mesmo resultado, com diferença de haver duplicação de código

Efeitos da recursão

- *Mesmo resultado, com diferença de haver duplicação de código*
  - O que isso quer dizer? Funções recursivas são sempre melhores do que funções não recursivas?

Efeitos da recursão

- *Mesmo resultado, com diferença de haver duplicação de código*
  - O que isso quer dizer? Funções recursivas são sempre melhores do que funções não recursivas?
    - Depende do problema, pois nem sempre a recursão é a melhor forma de resolver o problema, já que pode haver uma versão simples e não recursiva da função (que não duplica código e não consome mais memória)

Recursão

- Quando usar: quando o problema pode ser definido recursivamente de forma natural

- Como usar
  - 1º ponto: definir o problema de forma recursiva, ou seja, em termos dele mesmo
  - 2º ponto: definir a condição de término (ou *condição básica*)
  - 3º ponto: a cada chamada recursiva, deve-se tentar garantir que se está mais próximo de satisfazer a condição de término (caso mais simples)
    - Caso contrário, qual o problema?

Recursão

- Problema do fatorial
  - 1º ponto: definir o problema de forma recursiva
    - n! = n * (n-1)!
  - 2º ponto: definir a condição de término
    - n=0
  - 3º ponto: a cada chamada recursiva, deve-se tentar garantir que se está mais próximo de satisfazer a condição de término
    - A cada chamada, n é decrementado, ficando mais próximo da condição de término

Recursão vs. iteração

- Quem é melhor?

```
//versão recursiva
int fatorial(int n) {
    int fat;

    if (n==0) fat=1;
    else fat=n*fatorial(n-1);

    return(fat);
}
```

```
//versão iterativa
int fatorial(int n) {
    int i, fat=1;

    for (i=2;i<=n;i++)
        fat=fat*i;

    return(fat);
}
```

Exercício

- Implemente uma função que verifique se uma dada string é um palíndromo
  - Implementação iterativa
  - Implementação recursiva

Exercício

- Implemente uma função recursiva para calcular o enésimo número de Fibonacci
  - 1º ponto: definir o problema de forma recursiva
  - 2º ponto: definir a condição de término
  - 3º ponto: a cada chamada recursiva, deve-se tentar garantir que se está mais próximo de satisfazer a condição de término

Exercício

- Implemente uma função recursiva para calcular o enésimo número de Fibonacci
  - 1º ponto: definir o problema de forma recursiva
    - f(0)=0, f(1)=1, f(n)=f(n-1)+f(n-2) para n>=2
  - 2º ponto: definir a condição de término
    - n=0 e/ou n=1
  - 3º ponto: a cada chamada recursiva, deve-se tentar garantir que se está mais próximo de satisfazer a condição de término
    - n é decrementado em cada chamada

Recursão vs. iteração

- Quem é melhor? Simule a execução

```
//versão recursiva
int fib(int n) {
    int resultado;

    if (n<2) resultado=n;
    else resultado=fib(n-1)+fib(n-2);

    return(resultado);
}
```

```
//versão iterativa
int fib(int n) {
    int i=1, k, resultado=0;

    for (k=1;k<=n;k++) {
        resultado=resultado+i;
        i=resultado-i;
    }

    return(resultado);
}
```

Recursão vs. iteração

- Quem é melhor? Simule a execução

```
//versão recursiva
int fib(int n) {
    int resultado;

    if (n<2) resultado=n;
    else resultado=fib(n-1)+fib(n-2);

    return(resultado);
}
```

Certamente mais elegante, mas duplica muitos cálculos!

```
//versão iterativa
int fib(int n) {
    int i=1, k, resultado=0;

    for (k=1;k<=n;k++) {
        resultado=resultado+i;
        i=resultado-i;
    }

    return(resultado);
}
```

Recursão vs. iteração

- Quem é melhor?
  - Estimativa de tempo para Fibonacci (Brassard e Bradley, 1996)

n	***10***	***20***	***30***	***50***	***100***
Recursão	8 ms	1 s	2 min	21 dias	10^9 anos
Iteração	1/6 ms	1/3 ms	1/2 ms	3/4 ms	1,5 ms

Fibonacci recursivo eficiente

- Crie um procedimento recursivo eficiente para calcular o n-ésimo termo da série de Fibonacci.
  - Evite chamadas recursivas desnecessárias

Fibonacci recursivo eficiente

- Crie um procedimento recursivo eficiente para calcular o n-ésimo termo da série de Fibonacci.
  - Evite chamadas recursivas desnecessárias
  - Dica: armazene os valores da série já calculados em um vetor

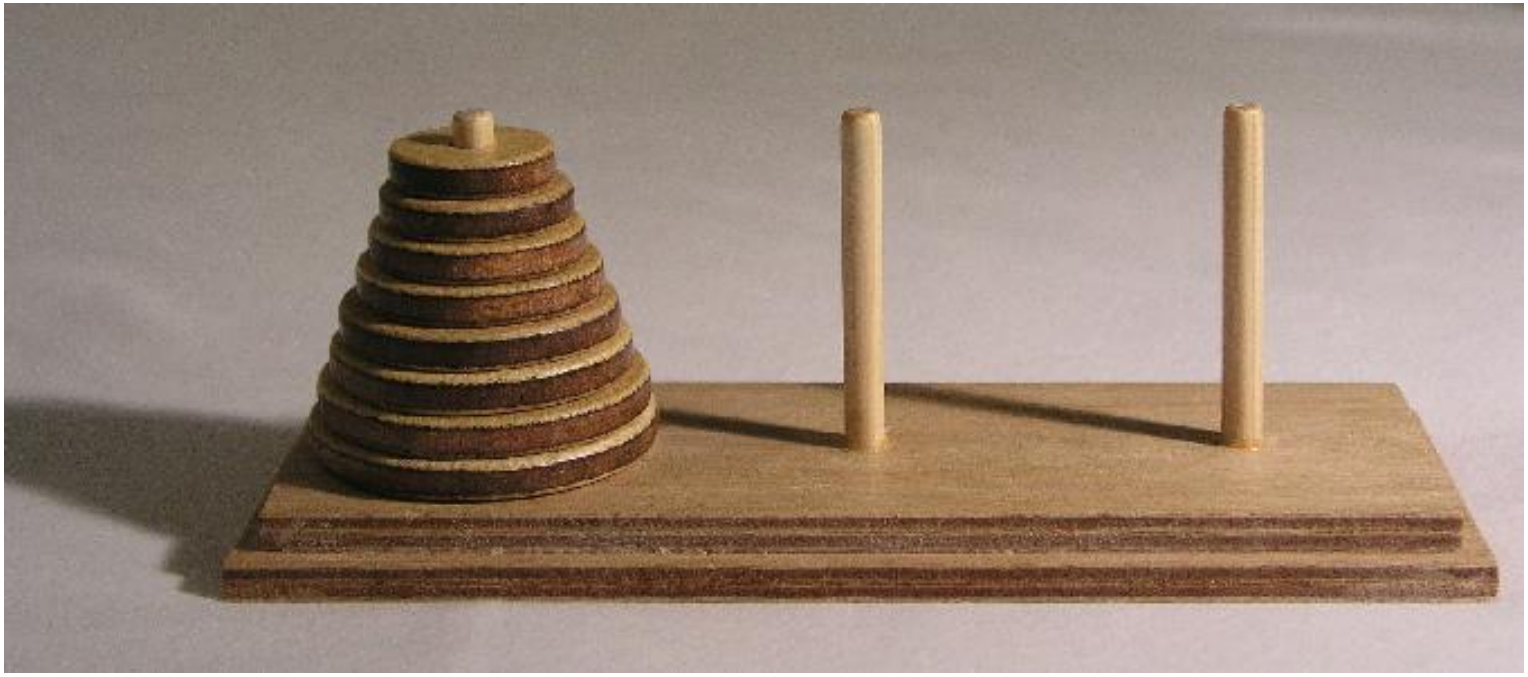
```c
void fib( int v[], int n,
          int *current)
{

    //Caso simples
    if ( n == 1)
    {
        v[0] = 0;
        v[1] = 1;
        *current = 1;
        return ;
    }

    if ( n-1 > *current )
        fib( v,n-1,current );

    //Atualiza vetor
    v[n] = v[n-1] + v[n-2];
    *current = n;

}
```

```c
int main()
{

    int v[50];
    int current = 0;

    //Chamando fib
    fib( v, 49, &current );

    int i;
    for ( i = 0; i < 50; i++)
        printf("%d\n", v[i]);

    return 0;
}
```

Recursão vs. iteração

- Programas recursivos que possuem chamadas ao final do código são ditos terem **recursividade de cauda**
  - São mais facilmente transformáveis em programas iterativos

Torres de Hanoi



Torres de Hanoi

- Jogo
  - Tradicionalmente com 3 hastes: Origem, Destino, Temporária
  - Número qualquer de discos de tamanhos diferentes na haste Origem, dispostos em ordem de tamanho: os maiores embaixo
  - Objetivo: usando a haste Temporária, movimentar um a um os discos da haste Origem para a Destino, sempre respeitando a ordem de tamanho
    - Um disco maior não pode ficar sobre um menor!

Torres de Hanoi

- Implemente uma função recursiva que resolva o problema das Torres de Hanoi

Torres de Hanoi

- Implemente uma função recursiva que resolva o problema das Torres de Hanoi
  - Mover n-1 discos da haste Origem para a haste Temporária
  - Mover o disco n da haste Origem para a haste Destino
  - Recomeçar, movendo os n-1 discos da haste Temporária para a haste Destino

Torres de Hanoi

```
#include <stdio.h>

void mover(int, char, char, char);

int main(void) {
    mover(3,'O','T','D');
    system("pause");
    return 0;
}

void mover(int n, char Orig, char Temp, char Dest) {
     if (n==1) printf("Mova o disco 1 da haste %c para a haste %c\n",Orig,Dest);
     else {
          mover(n-1,Orig,Dest,Temp);
          printf("Mova o disco %d da haste %c para a haste %c\n",n,Orig,Dest);
          mover(n-1,Temp,Orig,Dest);
     }
}
```

Torres de Hanoi

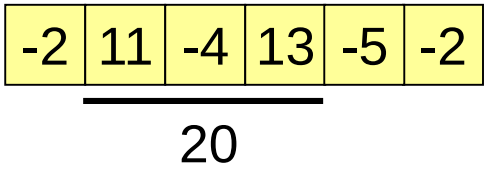
- Exercício para casa
  - Execute na mão o programa anterior
  - Tente fazer a versão não recursiva do programa

Multiplicação de matrizes

- Exercício para casa
  - Tente fazer uma função recursiva que calcule a multiplicação de duas matrizes inteiras quadradas.

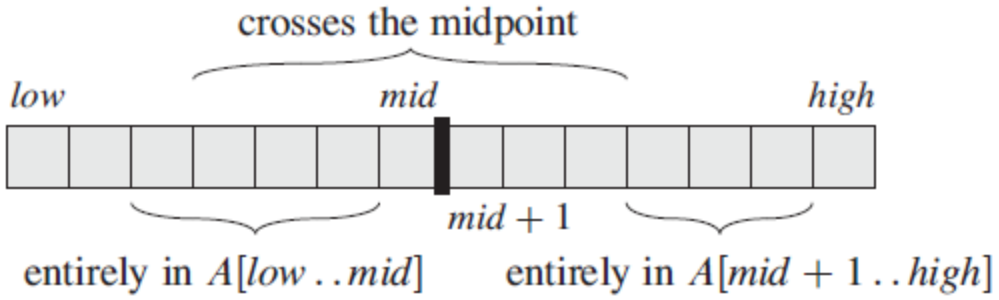
Exercício

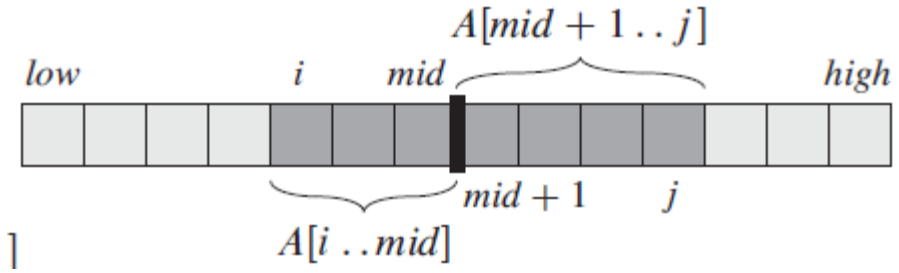
- Problema da maior soma de subseqüência em um vetor



- Implemente um programa iterativo para resolver o problema
- Implemente um programa recursivo

Duas possibilidades na divisão





Vetores cruzando o ponto central

```
FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
 1  left-sum = −∞
 2  sum = 0
 3  for i = mid downto low
 4       sum = sum + A[i]
 5       if sum > left-sum
 6            left-sum = sum
 7            max-left = i
 8  right-sum = −∞
 9  sum = 0
10  for j = mid + 1 to high
11       sum = sum + A[j]
12       if sum > right-sum
13            right-sum = sum
14            max-right = j
15  return (max-left, max-right, left-sum + right-sum)
```

Solução final

```
FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, high)
 1  if high == low
 2       return (low, high, A[low])          // base case: only one element
 3  else mid = ⌊(low + high)/2⌋
 4       (left-low, left-high, left-sum) =
              FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, low, mid)
 5       (right-low, right-high, right-sum) =
              FIND-MAXIMUM-SUBARRAY(A, mid + 1, high)
 6       (cross-low, cross-high, cross-sum) =
              FIND-MAX-CROSSING-SUBARRAY(A, low, mid, high)
 7       if left-sum ≥ right-sum and left-sum ≥ cross-sum
 8            return (left-low, left-high, left-sum)
 9       elseif right-sum ≥ left-sum and right-sum ≥ cross-sum
10            return (right-low, right-high, right-sum)
11       else return (cross-low, cross-high, cross-sum)
```

Exercício

- Escreva uma função que retorne o segundo maior valor de uma função. Utilize recursão nesta função dividindo o vetor analisado ao meio à cada chamada.

Exercício

- Escreva imprima todas as n! permutações da string de entrada. Considere que a string de entrada não possui caracteres repetidos e que ela está armazenada na primeira linha de M

```
void permute ( char *a, int ini, int length )
```

Exercício

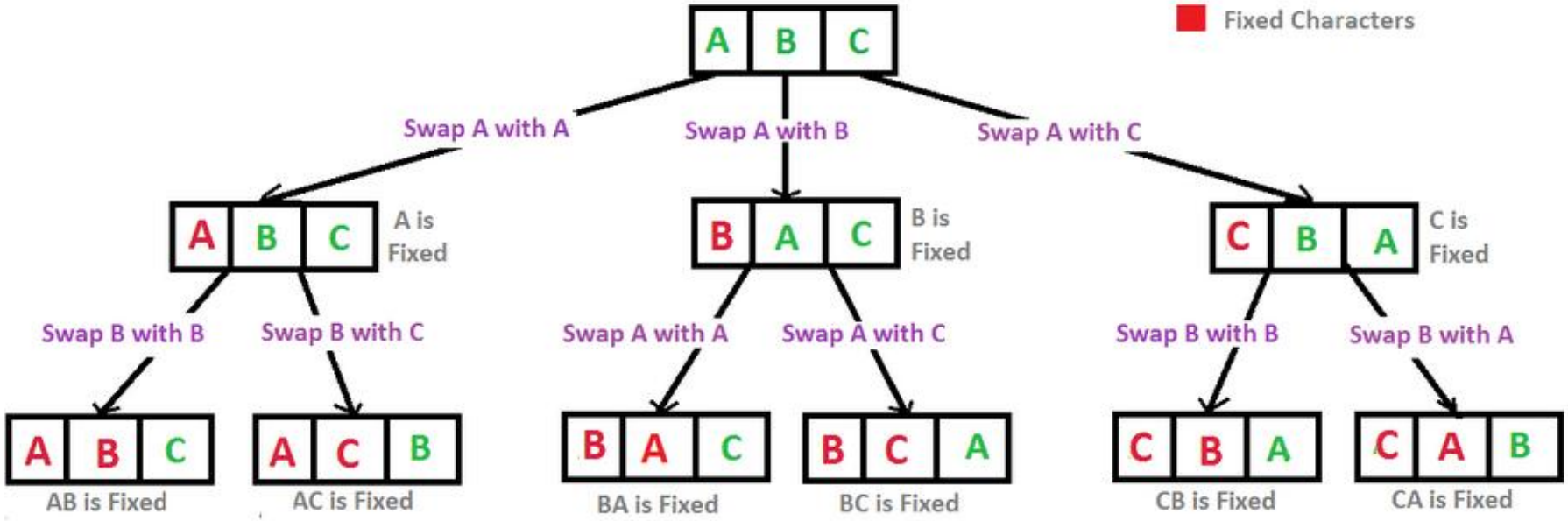
- void permute (char *a, int ini, int length)
- Como definir de forma recursiva?

Exercício

- void permute (char *a, int ini, int length)

- Como definir de forma recursiva
  - Trocar o primeiro por cada um dos outros restantes da substring
  - Fazer permutação da substring

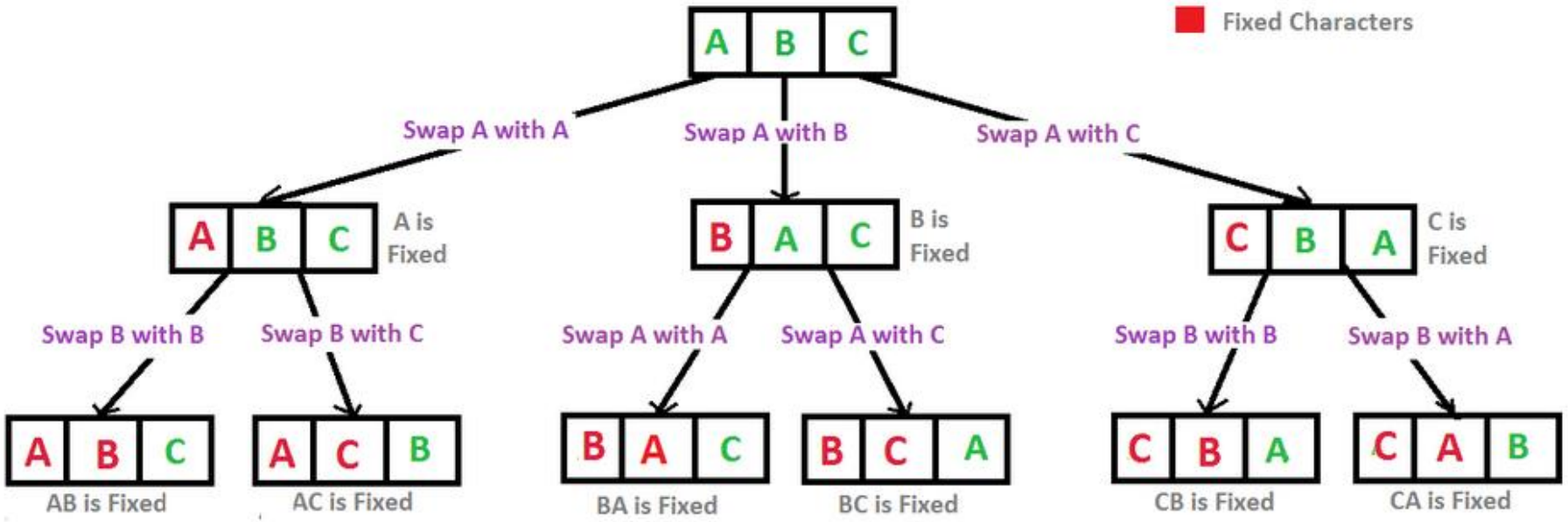
Árvore de recursão



```
void permute(char *a, int i, int n)
{
   int j;

   if ( i == n - 1) printf("%s\n", a);
   else
   {
        for (j = i; j < n; j++)
       {
          swap((a+i), (a+j));
          permute(a, i+1, n);
          swap((a+i), (a+j));
       }
   }
}
```

```
void swap(char *a, char *b)
{ char t = *a; *a = *b; *b = t; }

int main()
{

    char s[100];
    strcpy(s, "ABC");
    permute(s, 0, strlen(s));

    return 0;
}
```

Árvore de recursão

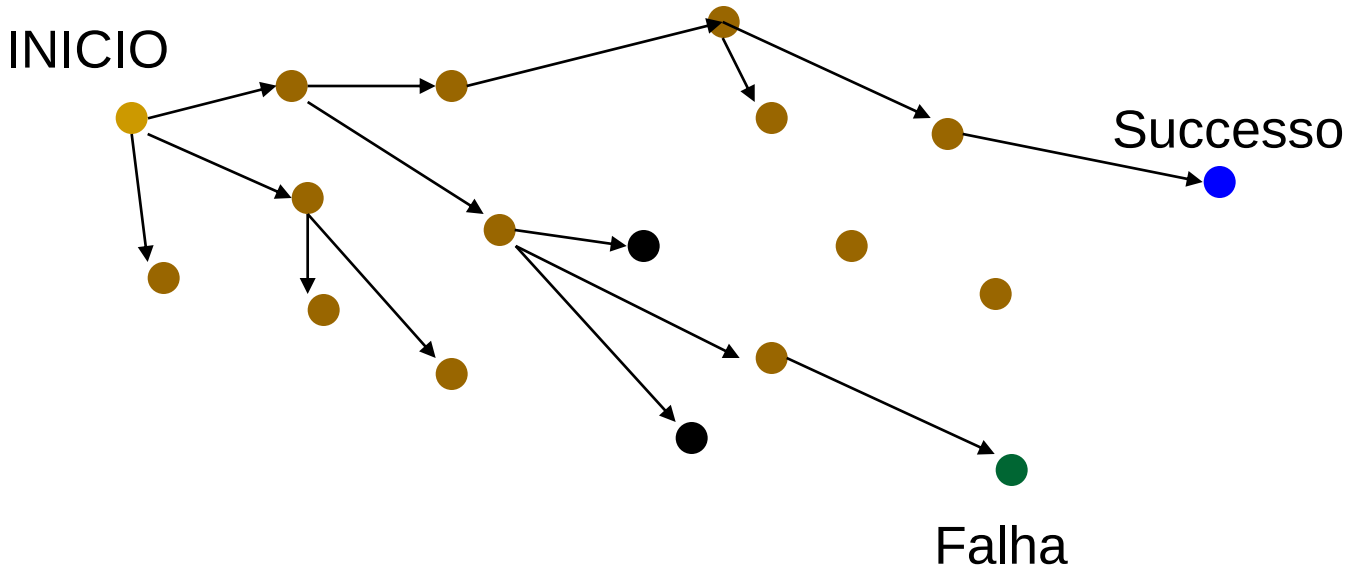


Backtracking

Backtracking

- Quando utilizar?
  - Problemas que não seguem uma regra fixa de cálculo, mas que são resolvidos por tentativa e erro
  - O problema pode ser decomposto em partes menores, através da exploração de pequenas partes. Pode ser visto como um algoritmo de busca em um dado espaço.
  - Se o próximo passo não deu certo, volto ao passo anterior e busca nova solução

Backtracking



Sudoku

- Matriz 9x9 com alguns números preenchidos
- Todos os números estão entre 1 e 9
- Objetivo: Cada linha, cada coluna, e cada mini matriz precisa conter os números entre 1 e 9 sem repetições

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Resolução via força bruta

- Solução simples e geral
- Tente todas as combinações até encontrar uma que funcione
- Esta abordagem não é "esperta"

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Resolução via força bruta

- Se não existem células vazias, resolvido
- Percorrer células da esquerda para direita, de cima para baixo
- Quando uma célula vazia é encontrada, preencher de 1 até 9
- Quando um dígito é colocado, verificar legalidade

5	3	1		7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Resolução via força bruta

- Se não existem células vazias, resolvido
- Percorrer células da esquerda para direita, de cima para baixo
- Quando uma célula vazia é encontrada, preencher de 1 até 9
- Quando um dígito é colocado, verificar legalidade

5	3	1		7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

ESTA NOVA INSTÂNCIA DO PROBLEMA É SIMILAR AO PROBLEMA ORIGINAL ?

5	3	1		7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	1	2	7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	1	2	7	4			
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	1	2	7	4	8		
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	1	2	7	4	8	9	
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

DEAD END

Sudoku – A Dead End

- Com a configuração atual, nenhum dos dígitos funciona para fechar a última linha

5	3	1	2	7	4	8	9	
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Back tracking

- Quando a busca alcança um ponto sem solução, ela volta à solução anterior e muda para o próximo digito
  - No exemplo, voltaríamos na célula anterior e colocaríamos um 9 e tentamos novamente

Back tracking

5	3	1	2	7	4	8	9	
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	1	2	7	4	9		
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Força bruta e backtracking

- Algoritmos de força bruta são lentos
- Não empregam muita lógica
  - Não enxergam muito à frente
- Mas ...
  - São fáceis de implementar como primeira solução

- Backtracking é um tipo de solução via força bruta

Características importantes

- Após tentar colocar um dígito na célula, queremos resolver o mesmo subproblema
- Após colocar um dígito na célula, é necessário lembrar o próximo número a ser tentado caso esta tentativa não funcione
- É necessário saber se a solução funcionou ou não. Se funcionou, não é necessário testar o próximo número
- Se todos os números são testados e nenhum deles funcionou, reportar

Pseudocódigo para backtracking

IF solução, RETURN sucesso

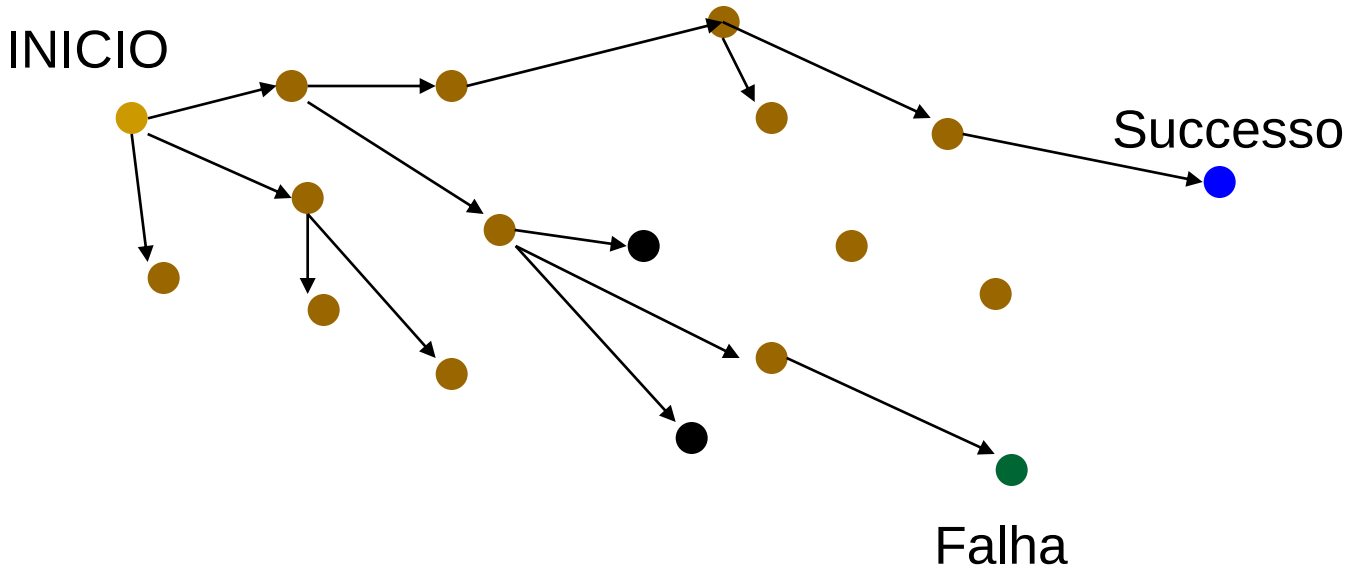
For (cada possível escolha do estado atual)

- faça a escolha e use o valor escolhido
- use recursão para resolver o problema para o novo estado

IF (chamada recursiva com sucesso)

RETURN sucesso

RETURN falha


INICIO
Successo
Falha

Implementação com pilha

- Como implementar a solução do backtracking recursivo com pilha?

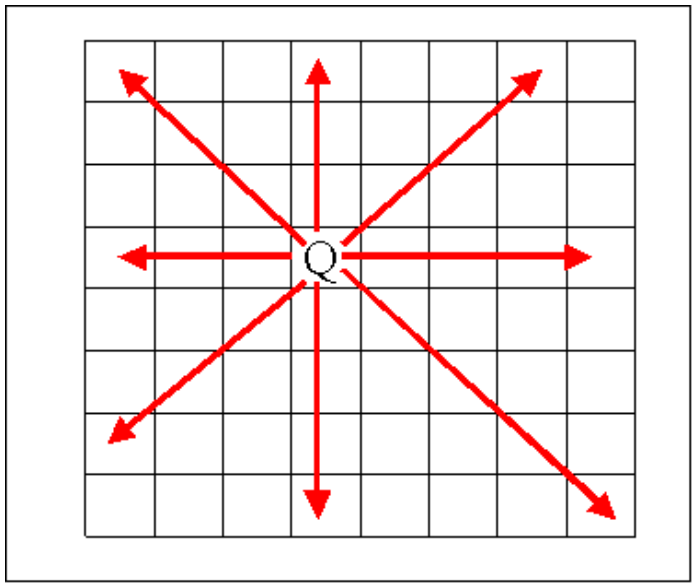
Implementação com pilha

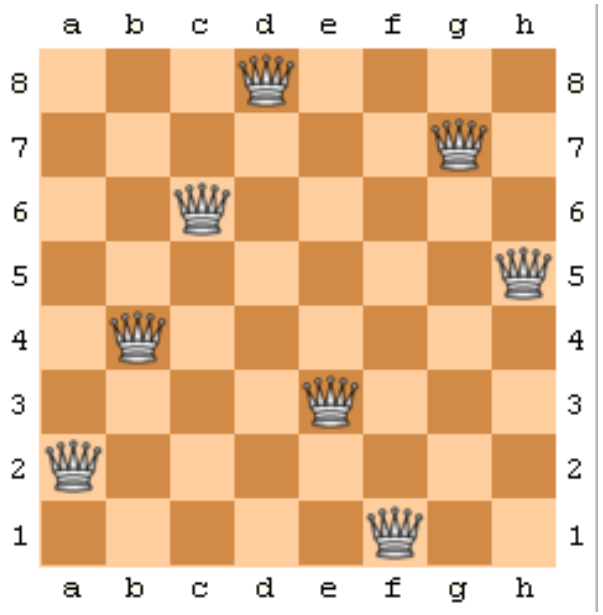
```
boolean solve(Node n) {
    Coloque n na pilha;
    while (pilha não esta vazia)
    {
        if ( nó no topo é folha ) {
            if ( nó no topo é solucao), return true
            else pop()
        }
        else {
            if ( nó no topo tem filhos não verificados )
                coloque o próximo filho não verificado na pilha
            else pop()
        }
    }
    return false
}
```

O problema das 8 rainhas

Problema das 8 rainhas

- Um problema clássico de xadrez
  - Colocar 8 rainhas no tabuleiro de forma que nenhuma delas possa atacar as outras





O problema das N rainhas

- Colocar N rainhas em um tabuleiro N x N de forma que nenhuma delas possa atacar a outra

- Número de disposições possíveis

- Em 8 x 8 → Combinação de 64 tomados 8 a 8
  = 4,426,165,368

- Se o número de rainhas é fixo e sabendo-se que não pode existir mais de uma rainha por coluna é possível iterar da seguinte forma

```
for(int c0 = 0; c0 < 8; c0++){
       board[c0][0] = 'q';
        for(int c1 = 0; c1 < 8; c1++){
              board[c1][1] = 'q';
              for(int c2 = 0; c2 < 8; c2++){
                    board[c2][2] = 'q';
                    // a little later
                    for(int c7 = 0; c7 < 8; c7++){
                          board[c7][7] = 'q';
                          if( queensAreSafe(board) )
                                printSolution(board);
                          board[c7][7] = ' '; //pick up queen
                    }
                    board[c6][6] = ' '; // pick up queen
```

Problema

- É possível implementar a solução anterior para um valor variável N?
  -

Problema

- É possível implementar a solução anterior para um valor variável N?
  - Não é possível implementar uma quantidade genérica de loops
- Solução: implementar o problema recursivamente

Esquema geral da construção

```
PROCEDURE Try(i: INTEGER);
BEGIN
  initialize selection of positions for i-th queen:
  REPEAT make next selection;
    IF safe THEN SetQueen;
      IF i < 8 THEN Try(i+1);
        IF not successful THEN RemoveQueen END
      END
    END
  UNTIL successful OR no more positions
END Try
```

O problema das 8 rainhas

- i representa o índice da coluna e o processo de seleção para posições varia entre as 8 possíveis valores para linha.
- Forma de representação matricial?
  - Mais natural, no entanto esta representação leva a operações inconvenientes
  - O que é relevante para o problema?
    - Se aquela linha já foi ocupada
    - Se aquela diagonal já foi ocupada

Representação

```
VAR  x: ARRAY 8 OF INTEGER;
     a: ARRAY 8 OF BOOLEAN;
     b, c: ARRAY 15 OF BOOLEAN
```

where

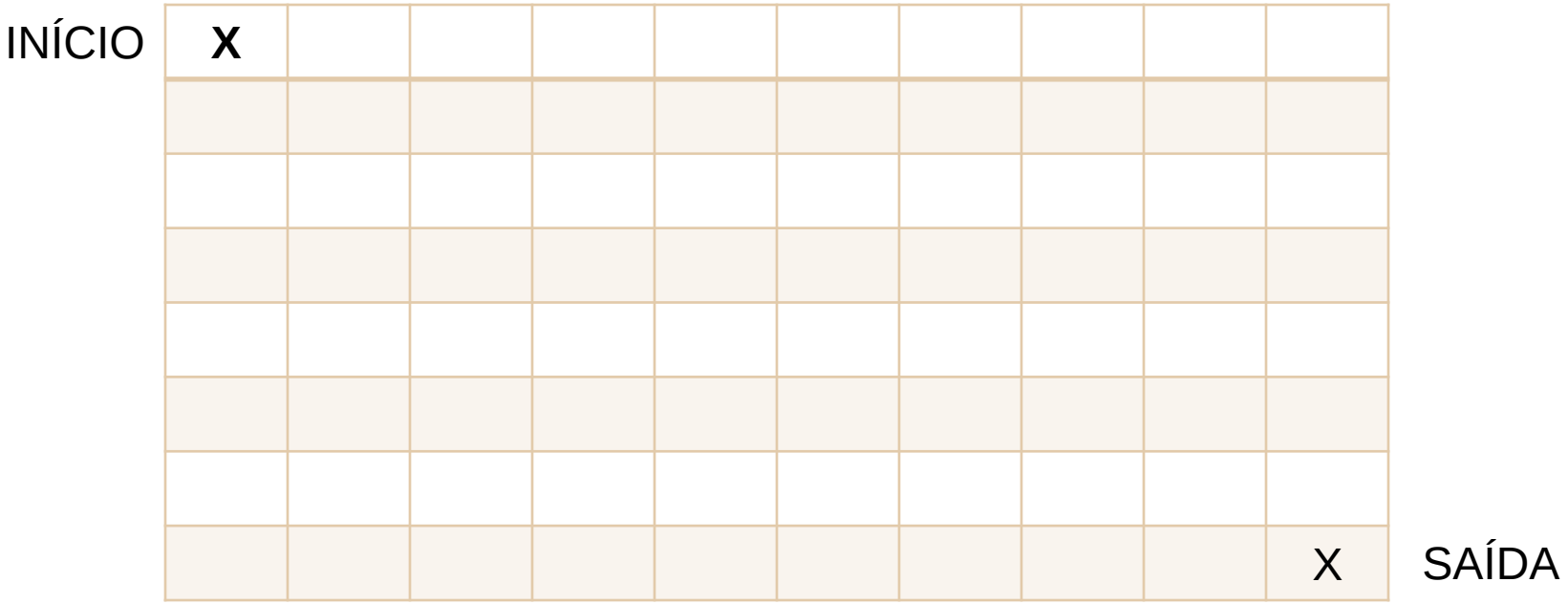
x_i denotes the position of the queen in the i th column;
a_j means "no queen lies in the j th row";
b_k means "no queen occupies the k th /-diagonal;
c_k means "no queen sits on the k th \-diagonal.

- Para facilitar a resolução, note que
  - Diagonal / : elementos tem a soma constante
  - Diagonal \ : a diferença (i – j) é constante
- *SetQueen:* colocar a rainha na posição
  - x[i] = j
  - a[j] = FALSE e b[i+j] = FALSE e c[i-j+7] = FALSE
- *RemoveQueen:* remove a rainha da posição
  - a[j] = TRUE e b[i+j] = TRUE e c[i-j+7] = TRUE
- Safe: a[j] && b[i+j] && c[i-j+7]

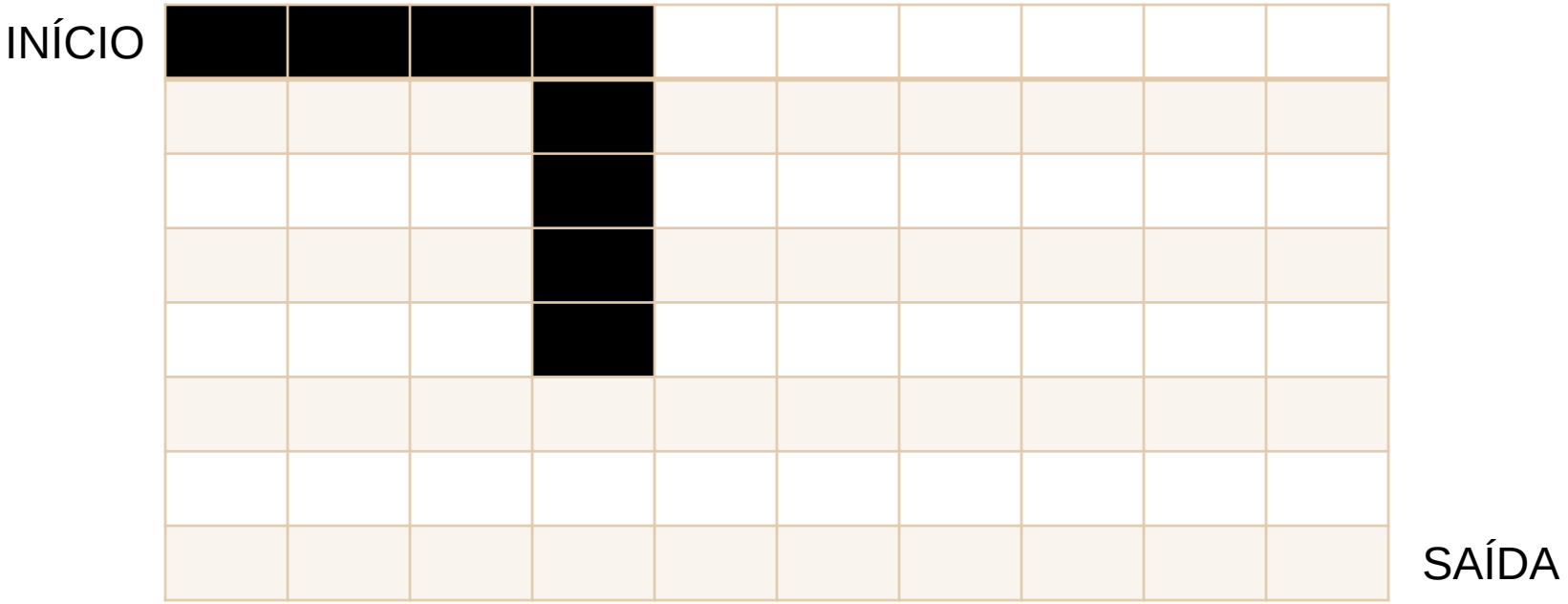
```
PROCEDURE Try(i: INTEGER; VAR q: BOOLEAN);
    VAR j: INTEGER;
BEGIN j := 0;
  REPEAT q := FALSE;
    IF a[j] & b[i+j] & c[i-j+7] THEN
      x[i] := j;
      a[j] := FALSE; b[i+j] := FALSE; c[i-j+7] := FALSE;
      IF i < 7 THEN
        Try(i+1, q);
        IF ~q THEN
          a[j] := TRUE; b[i+j] := TRUE; c[i-j+7] := TRUE
        END
      ELSE q := TRUE
      END
    END ;
    INC(j)
  UNTIL q OR (j = 8)
END Try;
```

Resolução de labirintos

Exemplo: mazes

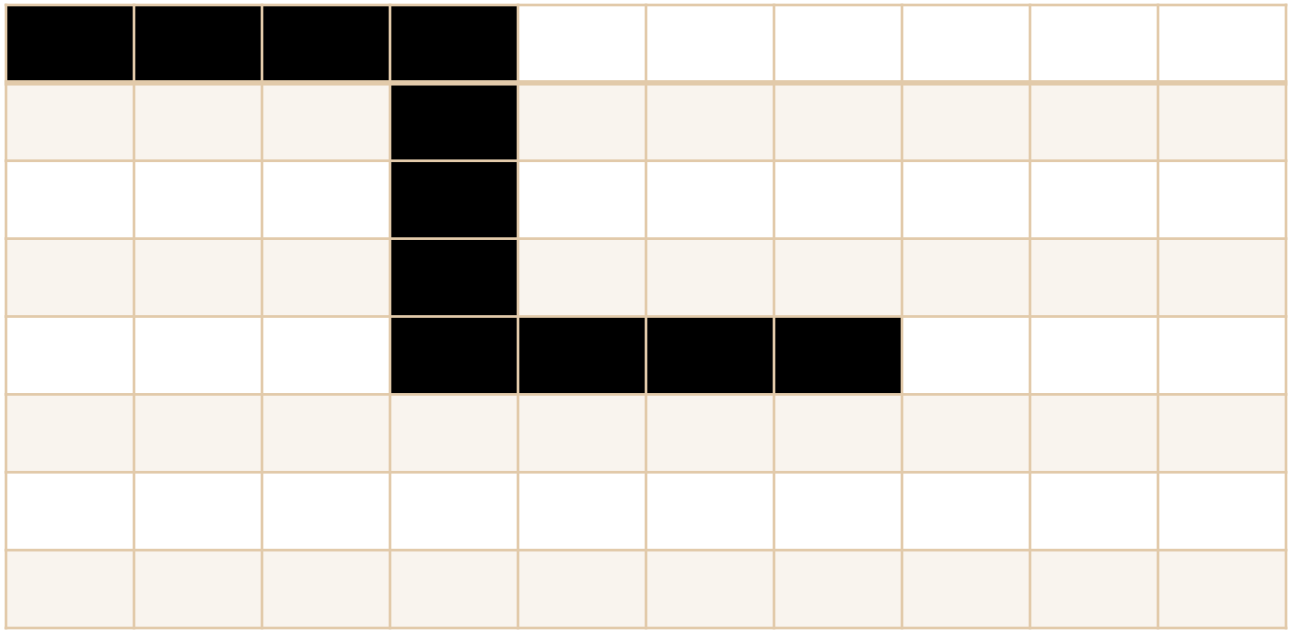


Exemplo: mazes



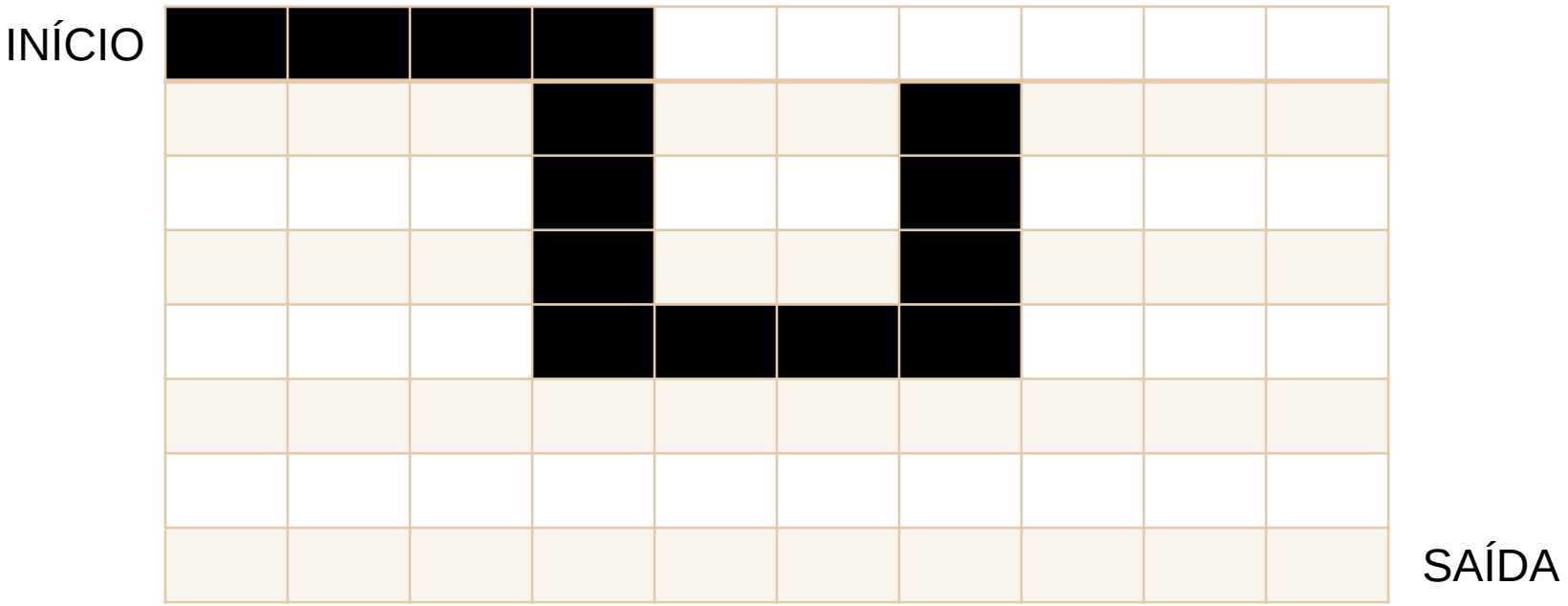
Exemplo: mazes

INÍCIO



SAÍDA

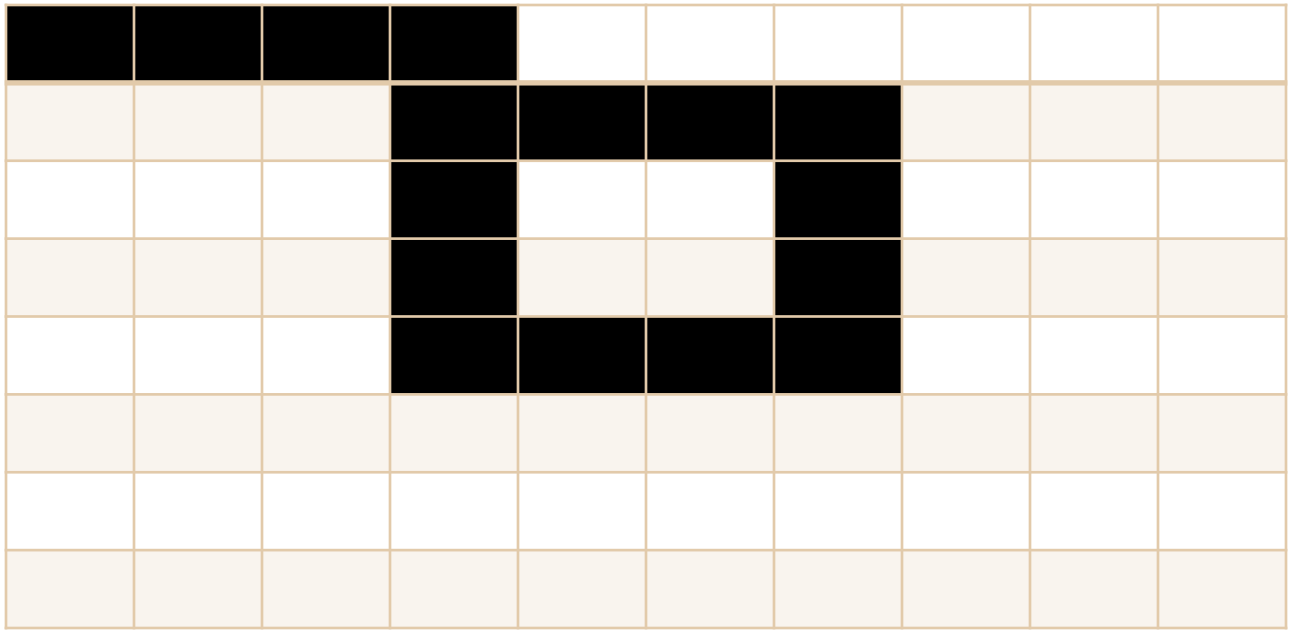
Exemplo: mazes



Exemplo: mazes

CAMINHO ERRADO !

INÍCIO

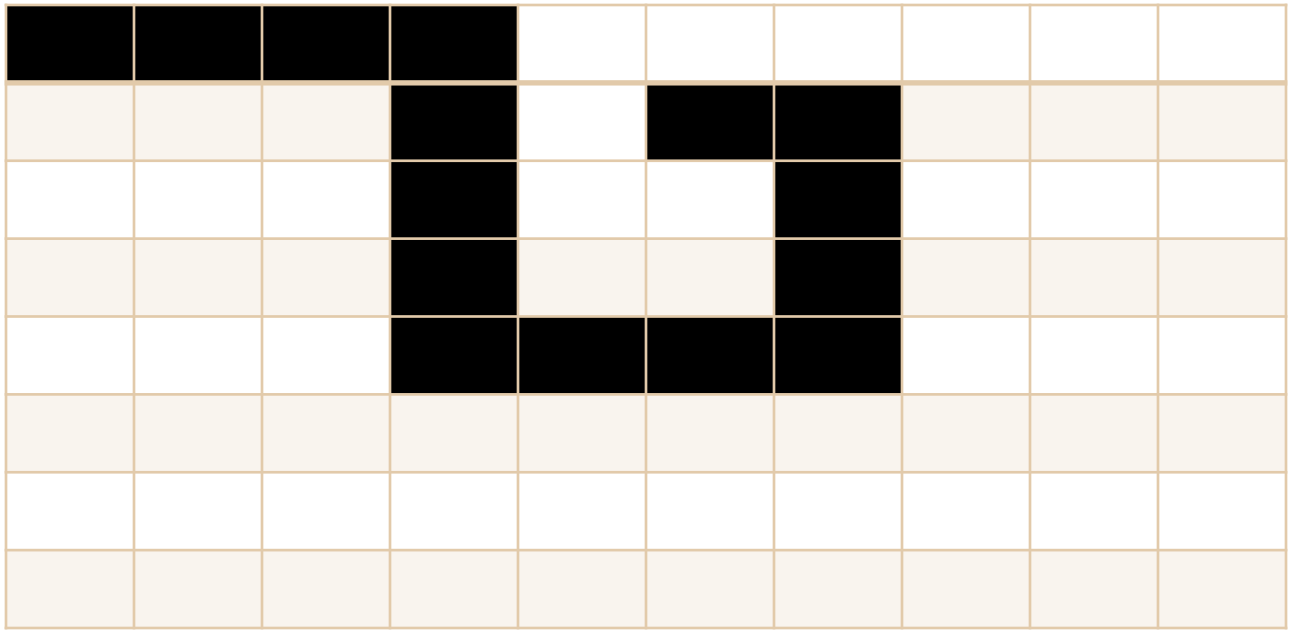


SAÍDA

Exemplo: mazes

VOLTA PARA ÚLTIMA SOLUÇÃO!

INÍCIO



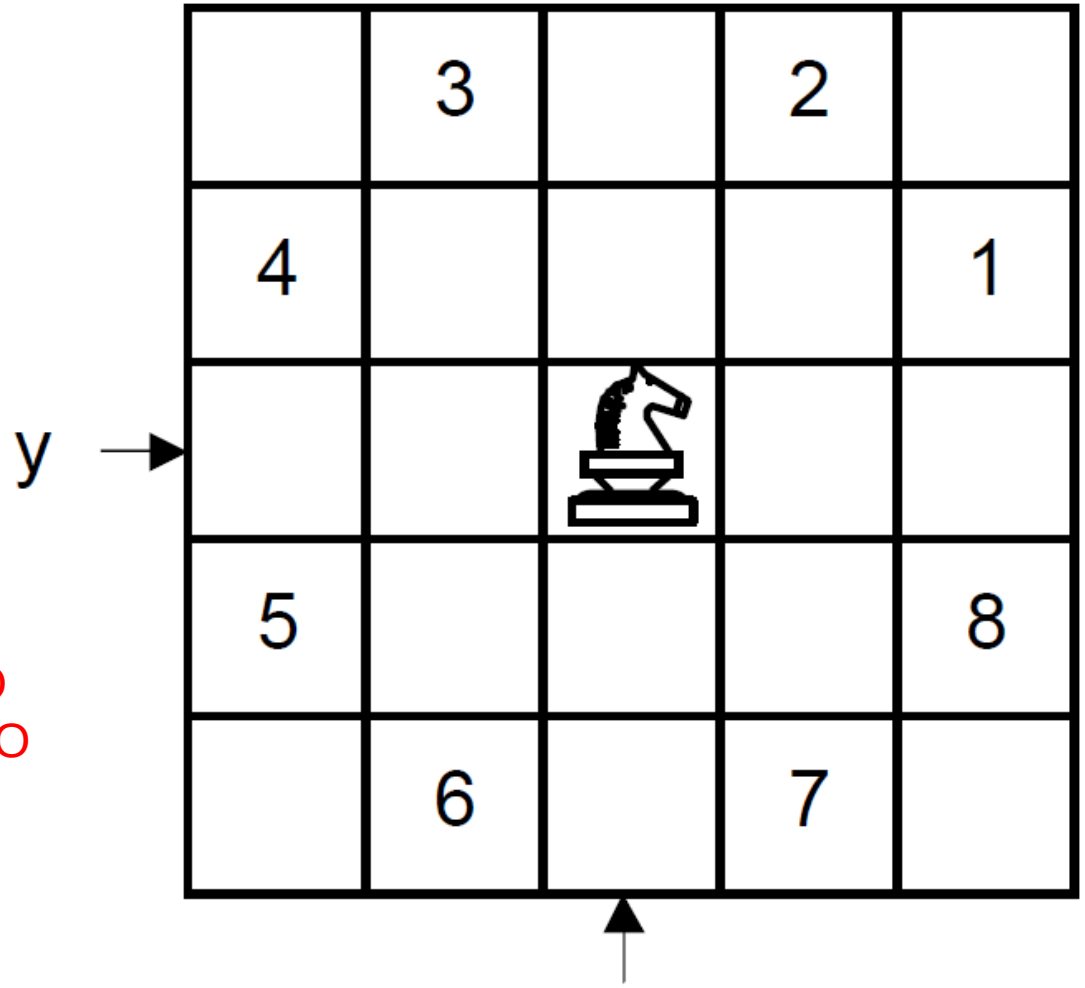
SAÍDA
DESCONHECIDA

O problema do cavalo no tabuleiro

Problema do cavalo no tabuleiro

- Suponha um tabuleiro de nxn campos
- O cavalo é colocado na posição inicial x0,y0
- Problema: encontrar uma série de n^2 -1 movimentos no tabuleiro tal que cada campo seja visitado apenas uma vez.

POSIÇÕES POSSÍVEIS DO CAVALO NO TABULEIRO DO XADREZ



$$dx = (2, 1, -1, -2, -2, -1, 1, 2)$$

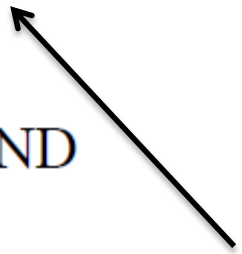
$$dy = (1, 2, 2, 1, -1, -2, -2, -1)$$

I-ÉSIMO MOVIMENTO

POSIÇÕES INICIAIS

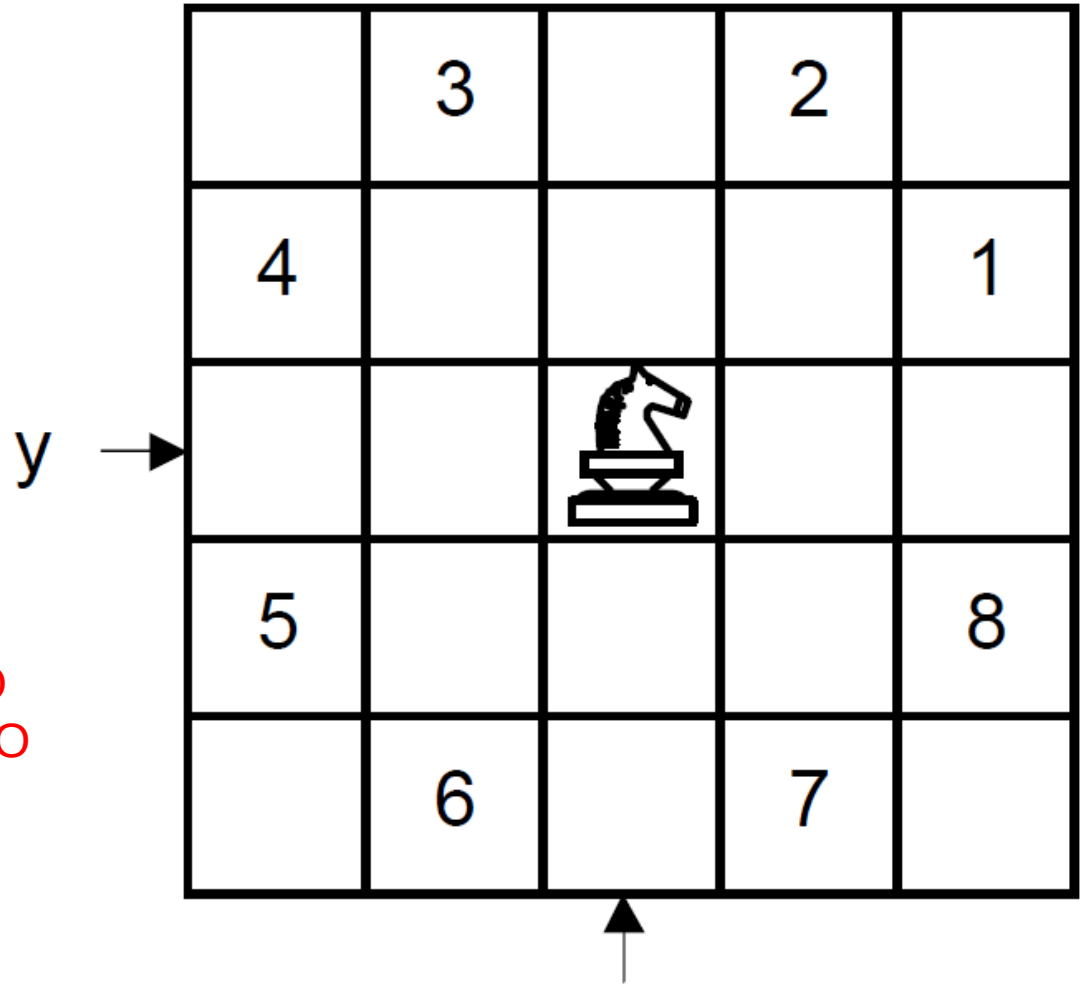
RETORNA Q=TRUE CASO SUCESSO

```
PROCEDURE Try(i: INTEGER; x, y: index; VAR q: BOOLEAN);
  VAR u, v: INTEGER; q1: BOOLEAN;
BEGIN initialize selection of moves;
  REPEAT let <u,v> be the coordinates of the next move
    as defined by the rules of chess;
    IF (0 <= u) & (u < n) & (0 <= v) & (v < n) & (h[u,v] = 0) THEN
      h[u,v] := i;
      IF i < n*n THEN Try(i+1, u, v, q1);
        IF ~q1 THEN h[u,v] := 0 ELSE q1 := TRUE END
      END
    END
  UNTIL q1 OR no more candidates;
  q := q1
END Try
```



POSIÇÃO AINDA NÃO VISITADA h(u,v) == 0

POSIÇÕES POSSÍVEIS DO CAVALO NO TABULEIRO DO XADREZ



$dx = (2, 1, -1, -2, -2, -1, 1, 2)$

$dy = (1, 2, 2, 1, -1, -2, -2, -1)$

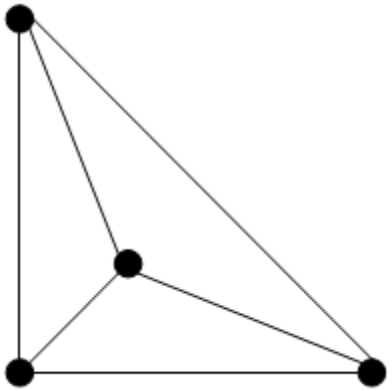
```
PROCEDURE Try(i, x, y: INTEGER; VAR q: BOOLEAN);
    VAR k, u, v: INTEGER; q1: BOOLEAN;
BEGIN k := 0;
    REPEAT k := k+1; q1 := FALSE;
      u := x + dx[k]; v := y + dy[k];
      IF (0 <= u) & (u < n) & (0 <= v) & (v < n) & (h[u,v] = 0) THEN
        h[u,v] := i;
        IF i < Nsqr THEN Try(i+1, u, v, q1);
          IF ~q1 THEN h[u,v] := 0 END
        ELSE q1 := TRUE
        END
      END
    UNTIL q1 OR (k = 8);
    q := q1
END Try;
```

Busca em profundidade

Grafos

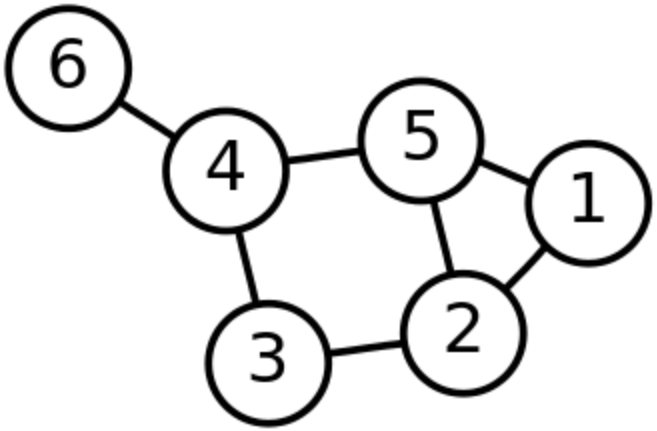
- Conjunto de vértices, ligados por arestas
  - Cidades conectadas por estradas
  - Páginas da Internet conectadas
  - Amigos do Facebook
  - E mais uma infinidade de

sistemas reais ...



Representação

- Matriz de Adjacências
  - M[1][2] = M[2][1] = 1
  - M[1][5] = M[5][1] = 1
  - M[2][5] = M[5][2] = 1
  - M[2][3] = M[3][2] = 1
  - M[3][4] = M[4][3] = 1
  - M[4][5] = M[5][4] = 1
  - M[4][6] = M[6][4] = 1



Questão

- Existe um caminho conectando dois vértices (src) e (tgt)?
  - Caso sejam vizinhos, qual o teste?
- E se não são vizinhos, posso reduzir ao mesmo subproblema?

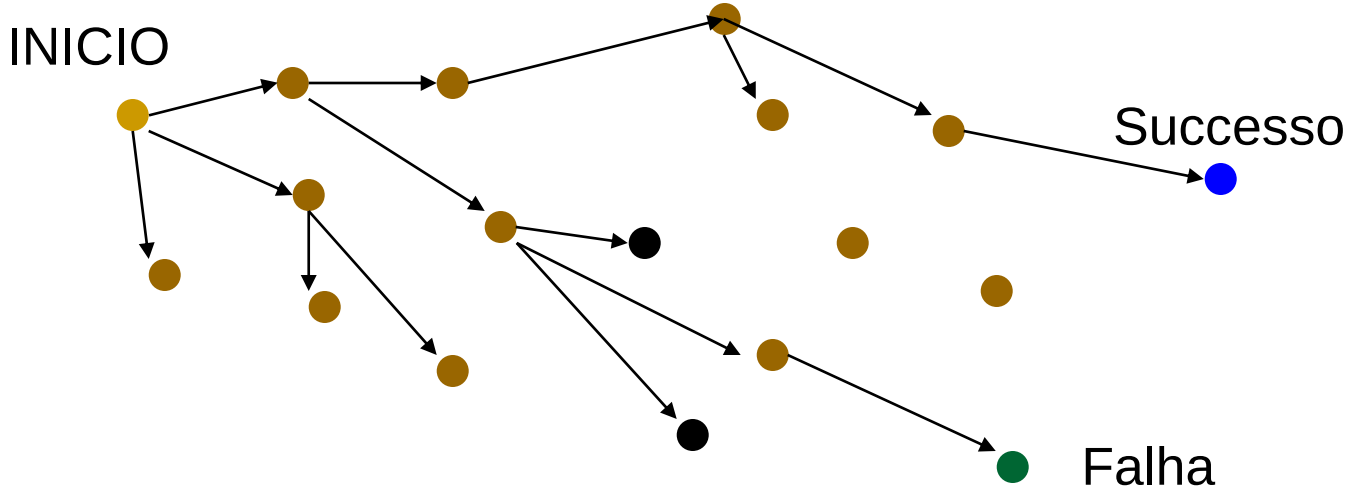
Questão

- Existe um caminho conectando dois vértices (src) e (tgt)?
  - Caso sejam vizinhos, qual o teste?

- E se não são vizinhos, posso reduzir ao mesmo subproblema?
  - Ir para um dos vizinhos e aplicar novamente

Busca em profundidade

- Ir caminhando por vizinhos (em profundidade) até achar a solução ou achar um dead-end
- Se achar o dead-end volta na solução anterior
- Atenção: ao caminhar, evitar ficar entrar em loops



```
int dfsR( int M[N][N], int src, int tgt, int prev[] )
{
   int viz;     prev[src] = 1;
   if ( src == tgt ) return 1;
   for ( viz = 1; viz <= N; viz++ )
        if ( M[src][viz] != 0 && prev[viz] == -1 )
           if ( dfsR ( M, viz, tgt, prev ) ) return 1;

   prev[src] = -1;
   return 0;    }
```

Exercício

- Escreva um algoritmo que escreva o caminho utilizado na solução recursiva da busca em profundidade

```
int dfsR( int M[N][N], int src, int tgt, int prev[] )
{
   int viz;     prev[src] = 1;
   if ( src == tgt ) printf(src);  return 1;
   for ( viz = 1; viz <= N; viz++ )
        if ( M[src][viz] != 0 && prev[viz] == -1 )
          if ( dfsR ( M, viz, tgt, prev ) == 1)
         {  printf(viz);  return 1;   }

   prev[src] = -1;
   return 0;    }
```

Exercícios

Exercícios

- Escreva uma função recursiva que calcula a média dos elementos de um vetor.

Exercício

- Escreva uma função recursiva que encontre um dado elemento num vetor dividindo-o ao meio em cada chamada recursiva.
  - Este algoritmo é chamado busca binária

```
// Esta função recebe um vetor crescente v[e+1..d-1] e um
// número x tal que v[e] < x <= v[d] (portanto, e < d).
// Ela devolve um índice j em e+1..d tal que
// v[j-1] < x <= v[j].

int
bb( int x, int e, int d, int v[]) {
   if (e == d-1) return d;    // base da recursão
   else {
      int m = (e + d)/2;
      if (v[m] < x)
         return bb( x, m, d, v);
      else
         return bb( x, e, m, v);
   }
}
```

Recursão

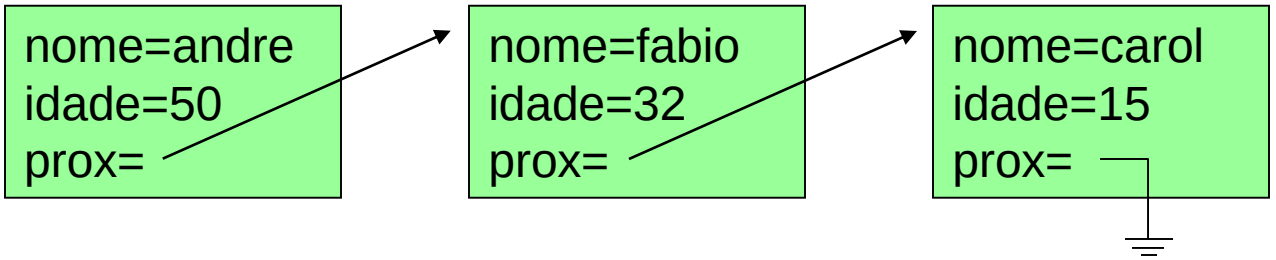
- Muito útil para lidar com estruturas de dados mais complexas
  - Listas sofisticadas, árvores, etc.

Exercício

- Imagine que você tem declarado vários blocos de memória para a seguinte estrutura

```
struct bloco {
        char nome[50];
        int idade;
        struct bloco *prox;
}
```

em que cada bloco aponta para o endereço do próximo bloco alocado. Por exemplo:



- Faça um programa que leia esses dados do usuário, armazenando-os nos blocos alocados dinamicamente, e, depois, chame uma função recursiva que imprima os dados armazenados na **ordem inversa**

Exercício

- Crie uma função recursiva para inserir uma célula no fim de uma lista

```
struct celula *insere (struct celula *cel,
                       struct celula *ini);

//Aceita a célula a ser inserida e o inicio da lista
//Retorna o inicio da lista
```

Solução

```
struct celula *insere (struct celula *cel,
                       struct celula *ini);
{
   cel->prox = NULL;
   if ( ini == NULL ) return cel;
   ini->prox = insere( cel, ini->prox );
   return ini;
}
```

Exercício

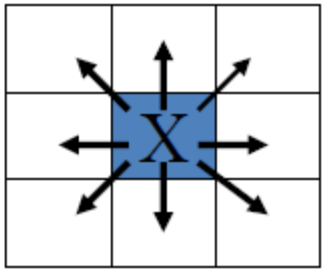
- Implementar a função para resolver o labirinto

```
int solveMaze ( const int *M, int N )
```

inicio = (0,0) e fim = (N-1,N-1)

Matriz de entrada contém 0's em posições vazias e 1's e blocos ocupados

```
/* matriz que define o 'labirinto'*/
int m[8][8];

/* dx e dy demarcam as 'células vizinhas' */
int dx[8] = {-1,-1,-1,0,0,1,1,1};
int dy[8] = {-1,0,1,-1,1,-1,0,1};

/* a função tenta() */
void tenta(int i, int j){
int k;
  if(m[i][j] == ' '){          /* alternativa é viável ?     */
    m[i][j] = 'x';             /* marcar o caminho           */
    if((i==DI)&&(j==DJ))       /* atingiu o objetivo ?       */
        imprime();
    else {                     /* tentar todas alternativas */
      for(k=0; k < 8; k++) tenta(i+dx[k],j+dy[k]);
    }
    m[i][j] = ' ';             /* desfazer a marca           */
  }
}
```



Exercício para casa

- Implemente a solução do Sudoku

Exercício para casa

- Implemente e mostre a "árvore de recursão" para um pequeno exemplo
  - Dado um arranjo v de n números inteiros, implemente uma função recursiva que retorne o maior elemento do arranjo
  - Considere como caso mais simples quando o arranjo possui dois elementos.
  - Considere como entrada tamanhos de vetores como potência de 2. Mostre que para um vetor contendo N elementos, N-2 chamadas recursivas são executadas, se cada chamada recursiva analisa metade do vetor.