

**Entregar Exercícios 8 e 16 em 06/07/2011**

**Exercício 1.** Suponha que a variável aleatória  $X$  tenha os valores possíveis  $1, 2, 3, \dots$ , e  $P(X = j) = 1/2^j, j = 1, 2, \dots$

- (a) Calcule  $P(X \text{ ser par})$ .
- (b) Calcule  $P(X \geq 5)$ .
- (c) Calcule  $P(X \text{ ser divisível por } 3)$ .

**Exercício 2.** Considere uma variável aleatória  $X$  com os resultados possíveis  $0, 1, 2, \dots$  e  $P(X = j) = (1 - a)a^j, j = 0, 1, 2, \dots$

- (a) Para que valores de  $a$  o modelo acima tem sentido?
- (b) Verifique que essa expressão representa uma distribuição de probabilidade.
- (c) Mostre que, para quaisquer dois inteiros positivos  $s$  e  $t$ ,

$$P(X > s + t | X > s) = P(X \geq t).$$

**Exercício 3.** Seja  $X$  a duração da vida de uma válvula eletrônica e admita-se que  $X$  possa ser representada por uma variável aleatória contínua, com fdp  $f(x) = be^{-bx}, x \geq 0$ . Seja  $p_j = P(j \leq X < j + 1)$ . Verifique que  $p_j$  é da forma  $(1 - a)a^j$  e determine  $a$ .

**Exercício 4.** A variável aleatória contínua  $X$  tem fdp  $f(x) = 3x^2, -1 \leq x \leq 0$ , se  $b$  for um número que satisfaça a  $-1 < b < 0$ , calcule  $P(X > b | X < b/2)$ .

**Exercício 5.** Suponha que  $f$  e  $g$  sejam fdp no mesmo intervalo  $a \leq x \leq b$ .

- (a) Verifique que  $f + g$  não é uma fdp nesse intervalo.
- (b) Verifique que, para todo  $\beta, 0 < \beta < 1, \beta f(x) + (1 - \beta)g(x)$  é uma fdp nesse intervalo.

**Exercício 6.** A percentagem de álcool ( $100X$ ) em certo composto pode ser considerada uma variável aleatória, em que  $X, 0 < X < 1$ , tem a seguinte fdp:  $f(x) = 20x^3(1 - x), 0 < x < 1$ .

- (a) Estabeleça a expressão da fd  $F$  e esboce seu gráfico.
- (b) Calcule  $P(X \leq 2/3)$ .
- (c) Suponha que o preço de venda desse composto dependa do conteúdo de álcool. Especificamente, se  $1/3X < 2/3$ , o composto se vende por  $C_1$  dólares/galão; caso contrário, ele se vende por  $C_2$  dólares/galão. Se o custo for  $C_2$  dólares/galão, calcule a distribuição de probabilidade do lucro líquido por galão.

**Exercício 7.** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua, com fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1, \\ a, & 1 < x \leq 2, \\ -ax + 3a, & 2 < x \leq 3, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

- (a) Determine a constante  $a$ .
- (b) Determine a fd  $F$  e esboce o seu gráfico.
- (c) Se  $X_1, X_2$  e  $X_3$  forem três observações independentes de  $X$ , qual será a probabilidade de, exatamente, um de esses três números ser maior do que 1,5?

**Exercício 8.** Suponha que a duração da vida (em horas) de certa válvula seja uma variável aleatória contínua  $X$  com fdp dada por  $f(x) = 100/x^2$ , para  $x > 100$ , e zero caso contrário.

- (a) Qual será a probabilidade de que uma válvula dure menos de 200 horas, se soubermos que ela ainda está funcionando após 150 horas de serviço?
- (b) Se três dessas válvulas forem instaladas em um conjunto, qual será a probabilidade de que exatamente uma delas tenha de ser substituída após 150 horas de serviço?
- (c) Qual será o número máximo de válvulas que poderá ser colocado em um conjunto, de modo que exista uma probabilidade de 0,5 de que após 150 horas de serviço todas elas estejam funcionando?

**Exercício 9.** Suponha que a variável aleatória  $X$  tenha valores possíveis  $1, 2, 3, \dots$  e que

$$P(X = r) = k(1 - \beta)^{r-1}, 0 < \beta < 1,$$

- (a) Determine a constante  $k$ .
- (b) Ache a moda desta distribuição, isto é, o valor de  $r$  que torne  $P(X = r)$  a maior de todas.

**Exercício 10.** Suponha que  $X$  seja uniformemente distribuída sobre  $(-1, 1)$ , ou seja,  $f(x) = 1/2, -1 < x < 1$ . Seja  $Y = 4 - X^2$ . Achar a fdp de  $Y, g(y)$ , e fazer seu gráfico. Verifique também que  $g(y)$  é a fdp adequada.

**Exercício 11.** Suponha que  $X$  seja uniformemente distribuída sobre  $(-1, 1)$ , ou seja,  $f(x) = 1/2, -1 < x < 1$ . Ache a fdp das seguintes variáveis aleatórias:

- (a)  $Y = \sin(\pi/2)X$ .
- (b)  $Z = \cos(\pi/2)X$
- (c)  $W = |X|$

**Exercício 12.** Suponha que a variável aleatória contínua  $X$  tenha fdp  $f(x) = e^{-x}, x > 0$ . Ache a fdp das seguintes variáveis aleatórias:

- (a)  $Y = X^2$
- (b)  $Z = 3/(X + 1)^2$

**Exercício 13.** Suponha que a variável aleatória discreta  $X$  tome os valores 1, 2, e 3 com igual probabilidade. Ache a distribuição de probabilidade de  $Y = 2X + 3$ .

**Exercício 14.** Suponha que o raio de uma esfera seja uma variável aleatória contínua. Em virtude de imprecisões do processo de fabricação, os raios das diferentes esferas podem ser diferentes. Suponha que o raio  $R$  tenha fdp  $f(r) = 6r(1 - r), 0 < r < 1$ . Ache a fdp do volume  $V$  e da área superficial  $S$  da esfera.

**Exercício 15.** A energia radiante (em Btu/horas/pé<sup>2</sup>) é dada pela seguinte função da temperatura  $T$  (em escala Fahrenheit):  $E = 0,173(T/100)^4$ . Suponho que a temperatura  $T$  seja considerada uma variável contínua com fdp  $f(t) = 200t^{-2}, 40 \leq t \leq 50$ . Estabeleça a fdp da energia radiante  $E$ .

**Exercício 16.** Suponha que  $P(X \leq 0,29) = 0,75$ , em que  $X$  é uma variável aleatória contínua com alguma distribuição definida sobre  $(0,1)$ . Quando  $Y = 1 - X$ , determinar  $k$  de modo que  $P(X \leq k) = 0,25$ .