

**Exercício 1.** Resolver exercícios de Johnson and Wichern (2007), disponíveis na Coteia WIKI:

- 3.13, 3.16, 3.17, 3.20 pág 146-148
- 4.1, 4.3, 4.4, 4.8, 4.9, 4.17, 4.19\*, 4.22, 4.29, 4.39\*, 4.40, pág 200-208

**Exercício 2.** Seja  $\mathbf{X} \sim N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ , com  $\sigma^2 > 0$  e  $I$  a matriz identidade de ordem  $p$ . Mostre que  $A\mathbf{X}$  e  $(I - A^{-1}A)\mathbf{X}$  são independentes e que cada uma tem distribuição normal. A matriz  $A^{-1}$  é a **inversa generalizada** de  $A$ , que satisfaz  $AA^{-1}A = A$ .

**Exercício 3.** Seja  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  e  $\mathbf{a}$  um vetor fixo qualquer de dimensão  $p$ . Mostre que

$$Z = \frac{\mathbf{a}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}}} \sim N(0, 1).$$

**Exercício 4.** Se  $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ , com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix},$$

determine o valor de  $a$  para que  $\mathbf{b}'\mathbf{X}$  e  $\mathbf{c}'\mathbf{X}$  sejam independentes, com  $\mathbf{b}' = (1, 1, 1)$  e  $\mathbf{c}' = (1, -1, -1)$ .

**Exercício 5.** Seja  $\mathbf{X} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho^2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mostre que a distribuição condicional de  $(X_1, X_2)$  dado  $X_3$  tem média  $[\mu_1 + \rho^2(X_3 - \mu_3), \mu_2]'$  e matriz de variâncias e covariâncias

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho^4 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 6.** Sejam  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  e  $\mathbf{X}_3$  vetores aleatórios independentes com distribuição  $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  e considere  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3$  e  $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_3$ . Obtenha a distribuição condicional de  $\mathbf{Y}_1|\mathbf{Y}_2$  e de  $\mathbf{Y}_1|\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ .

**Exercício 7.** \* Seja  $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  e considere a seguinte partição

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \sim N \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right),$$

em que  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são vetores aleatórios de dimensão  $(q \times 1)$  e  $(p - q \times 1)$ , respectivamente. Mostre que  $\Sigma_{12} = 0$  implica independência entre  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$ , utilizando a função densidade de probabilidade da normal multivariada (Veja dica no exercício 4.14 de Johnson and Wichern, 2007, p.204).

## Referências

- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007) Applied Multivariate Statistical Analysis. 5th edition. Prentice-Hall
- Coteia WIKI  
<http://wiki.icmc.usp.br/index.php/SME-263>.