1. Determine a série de Fourier da função dada. Discuta a convergência da série obtida: em cada ponto x de continuidade e de descontinuidade dê o valor para o qual a série de Fourier converge, analisando inclusive a convergência uniforme.

   (a) $f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

   (b) $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \pi - x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } \ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 2(\pi - x), & \text{se } \ \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica definida por: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ e $f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

2. Esboce o gráfico de $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L})$$

   onde a série acima é a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $2L$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \frac{x}{L}) & \text{se } -L \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{L}) & \text{se } 0 < x \leq L \end{cases}$$

3. Seja f definida e de classe C^2 em $[-\pi, \pi]$ tal que $f(-\pi) = f(\pi)$. Use o teste M de Weierstrass para provar que a série de Fourier de f converge uniformemente.

4. Seja f definida e de classe C^3 em $[-\pi, \pi]$ e tal que $f(-\pi) = f(\pi)$ e $f'(-\pi) = f'(\pi)$. Sabemos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx],$$

onde a série do segundo membro é a série de Fourier de f. Prove que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[nb_n \cos nx - na_n \sin nx].$$

(Sugestão: prove que existe $M > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $|a_n| \leq \frac{M}{n^3}$ e $|b_n| \leq \frac{M}{n^3}$.)

5. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

onde o segundo membro é a série de Fourier de $f(x) = x^5 - \pi^4 x$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Prove que F é continua.

(b) Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx$$

(c) Esboce o gráfico de F.

(Sugestão: use os exercícios 3 e 4.)

6. Dado ω um número real não inteiro, considere a função $f(x) = \text{sen}(\omega x)$ definida em $[0, \frac{\pi}{\omega}]$.

(a) Escreva $f(x)$ em uma série de Fourier em cossenos no intervalo $[0, \frac{\pi}{\omega}]$.

(b) Discuta a convergência da série de Fourier encontrada.

7. Desenvolver a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

no intervalo $]0, \pi[$ em uma

(a) série de Fourier de senos.

(b) série de Fourier de cossenos.