# Grafos: caminhos (matriz adjacência)

Algoritmos e Estruturas de Dados 2

Graça Nunes

# O problema do menor caminho

- Um motorista deseja encontrar o caminho mais curto possível entre duas cidades do Brasil

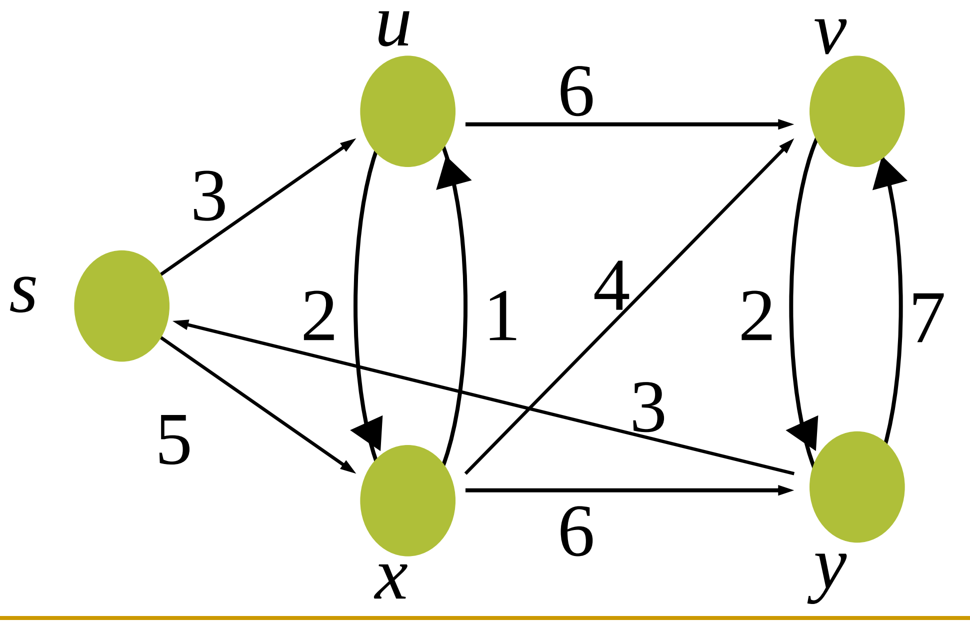
- Caso ele receba um mapa das estradas de rodagem do Brasil, no qual a distância entre cada par adjacente de cidades está exposta, como poderia determinar uma rota mais curta entre as cidades desejadas?

- Uma maneira possível é enumerar todas as rotas possíveis que levam de uma cidade à outra, e então selecionar a menor

# Caminhos mínimos

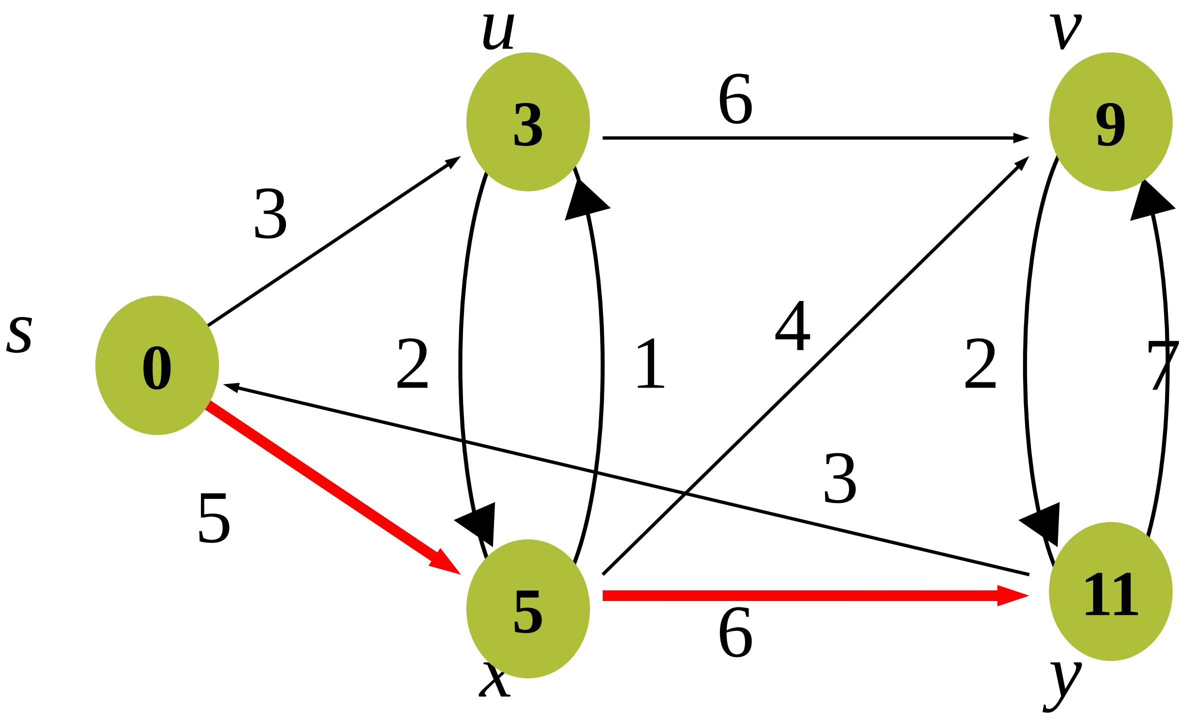
- O problema do caminho mínimo consiste em determinar um menor caminho entre um vértice de origem u e um vértice de destino v

- Qual o menor caminho entre s e y?



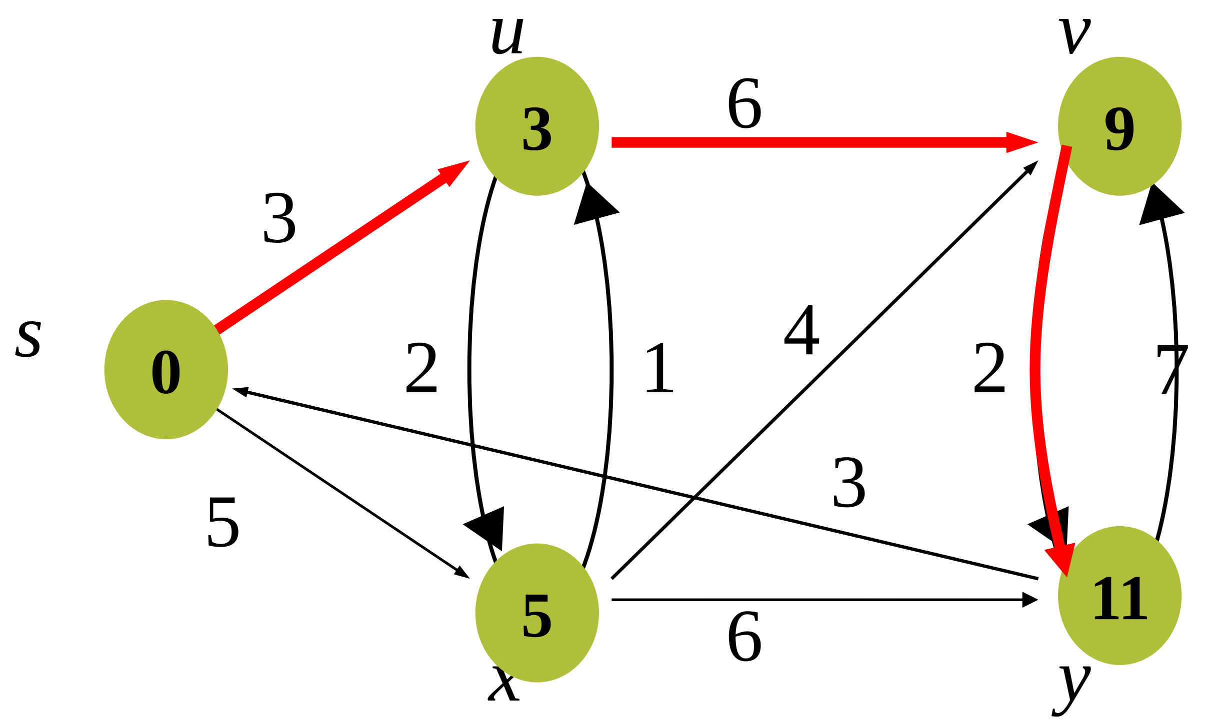
# Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos simples



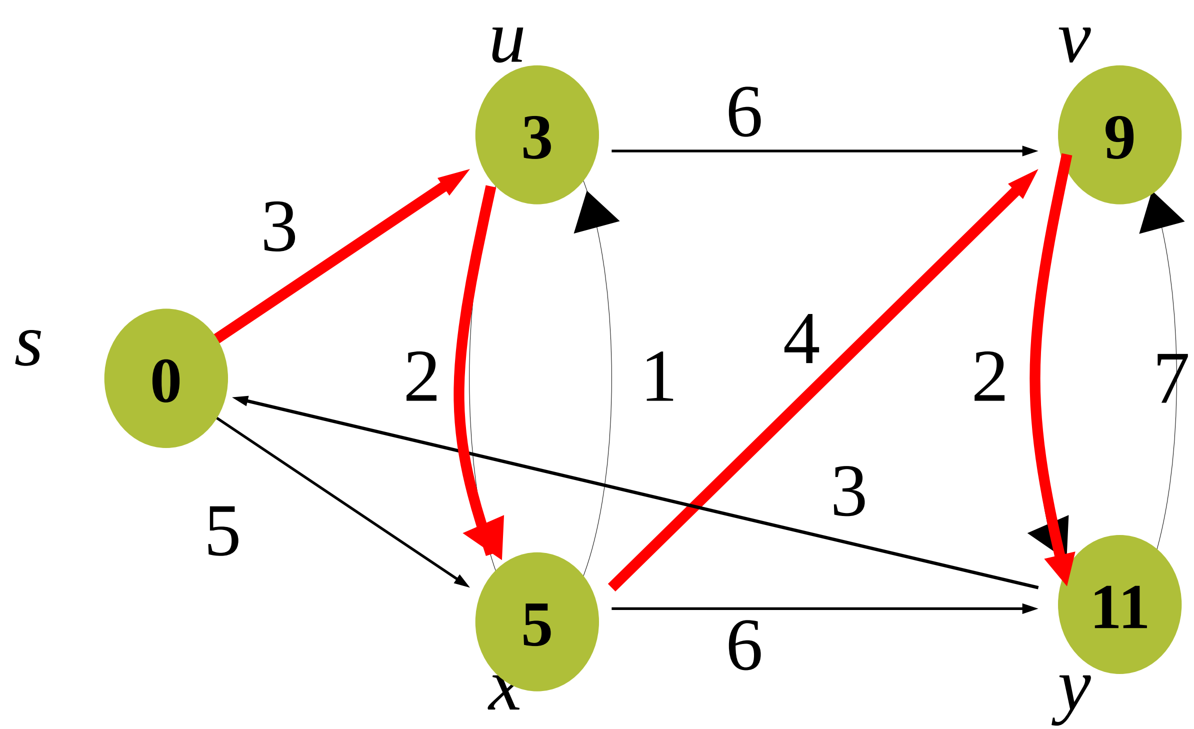
# Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos simples



# Caminhos mínimos

- Possíveis caminhos simples




Além de outros com ciclos....

# Caminho mínimo

- Duas abordagens para caminho mínimo
  - Se grafo não valorado (assume-se que cada aresta tem peso 1), busca em largura é uma boa opção ➔ o caminho mínimo coincide com o caminho mais curto
  - Se grafo valorado, outros algoritmos são necessários

# Caminho mínimo

- Grafo dirigido G(V,E) com função peso

  $w$: E$\rightarrow\Re$ que mapeia as arestas em pesos
- Peso (custo) do caminho (rota) p =<$v_0$, $v_1$, ..., $v_k$>

$$\boxed{w(p)=\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1},v_i)}$$

- Caminho de menor peso entre u e v:

$$\boxed{\delta(u,v)=\begin{cases}\min\{w(p):u\Rightarrow v\}\, se\,\exists\, rota\ de\ u\ \ p/v \\ \infty\ cc\end{cases}}$$

# Caminho mínimo

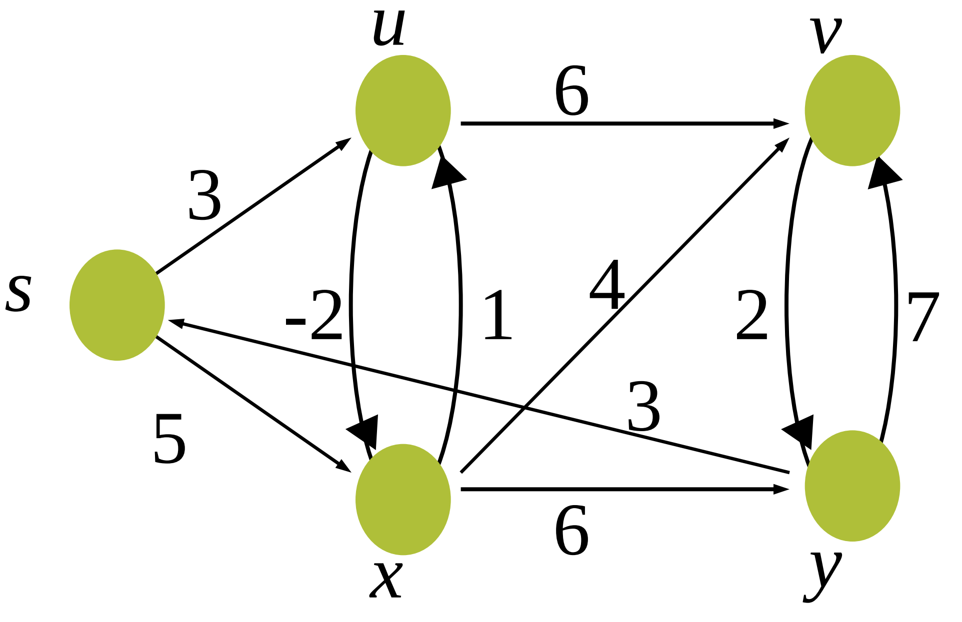
- Caminho mínimo entre os vértices *u* e *v* definido como qualquer rota p com um peso

$$w(p) = \delta(u,v)$$

- Atenção especial com ciclos e pesos negativos

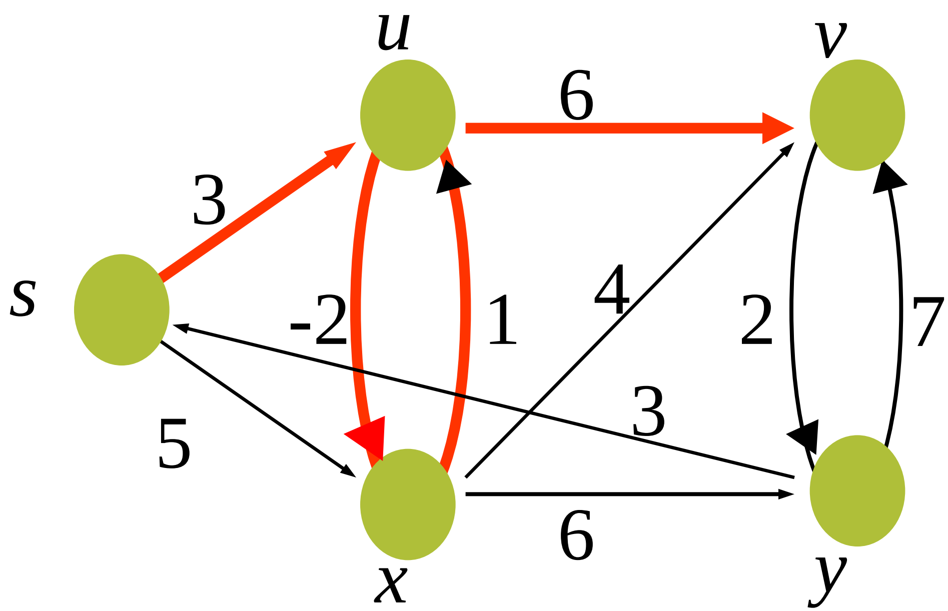
# Caminho mínimo

- Qual o caminho mínimo entre s e v?



# Caminho mínimo

- Qual o caminho mínimo entre s e v?



# Caminho mínimo

- Se há um ciclo positivo no caminho, ele não faz parte do caminho mínimo
  - Por quê?

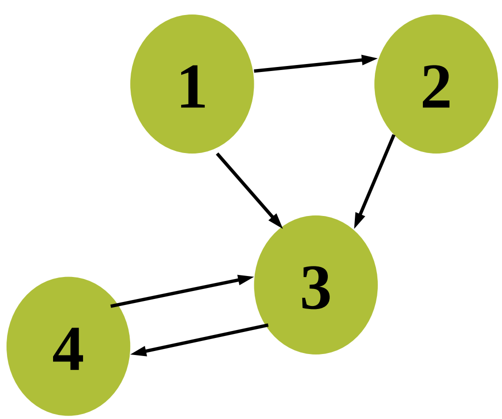
# Perguntas possíveis de se responder para um dígrafo com n vértices e m arestas:

- P1: Existe caminho de $v_i$ a $v_j$? (valorados ou não)
- P2: Qual o número de caminhos de comprimento k de $v_i$ a $v_j$? (não valorados)
- P3: Qual é o comprimento do caminho mínimo de $v_i$ a $v_j$? (valorados)
- P4: Qual é o custo do caminho mínimo de $v_i$ a $v_j$? (valorados)
- P5: Qual é o caminho mínimo (menor custo) de $v_i$ a $v_j$? (valorados)

# Algoritmos para Dígrafos representados em Matrizes de Adjacência

- Def.: A Matriz Caminho, P, de um dígrafo D(V,A) é definida como:
  - $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists$ um caminho de $v_i$ para $v_j$
  - $p_{ij} = 0$, c.c.

- Ex.




X: Matriz Adjacência

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

P: Matriz Caminho

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs.: $p_{ii} = 1 \Leftrightarrow \exists$ um ciclo a partir de $v_i$

# Matriz Caminho - P

- Precisamos então de um algoritmo para calcular P, a partir de X, para então responder à pergunta:

  - P1: Existe caminho de $v_i$ a $v_j$? (valorados ou não)

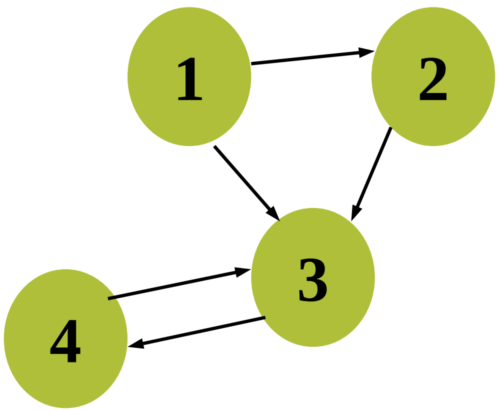
(adiante....)

# Teorema

- Seja X a matriz adjacência de D, e seja $Y=X^h$. Então $y_{ij}$ é o número total de sequências distintas $(v_i, ..),...(..,v_j)$ que
  - Possuem comprimento h
  - Correspondem a caminhos em D

- Exercício: provar por indução sobre h ($\geq 1$)

# No exemplo anterior




X: Matriz Adjacência

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$X^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X^3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$X^4 = X^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X^5 = X^3$

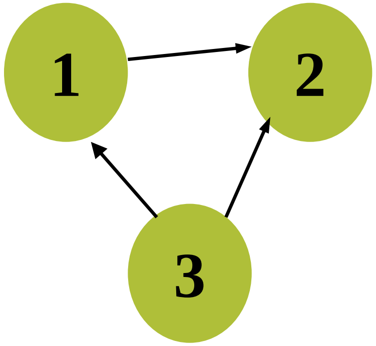
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se há caminho de $v_i$ a $v_j$, ele aparecerá até a potência n de X

# Corolário 1:

- Se $X^h$ = Matriz Nula, para algum $h \leq n$, então D é acíclico.

- Verifique para o exemplo (n = 3):



- Já temos, então, um algoritmo que calcula $X^h$, <u>de ordem $n^3$</u>, para responder à pergunta:

- P2: Qual o número de caminhos de comprimento k de $v_i$ a $v_j$? (não valorados)
- Resp.: Calculando $X^h$ ; $1 \leq h \leq k$

# Corolário 2:

- Se X é matriz adjacência de D e

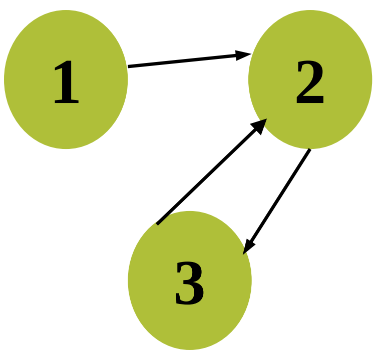
$Q = X + X^2 + X^3 + ... + X^n$, então a matriz caminho P é tal que

$$p_{ij} = 1 \Leftrightarrow q_{ij} \neq 0$$

Repare que:

- $q_{ij}$ é a quantidade de caminhos possíveis de $v_i$ a $v_j$, de comprimentos $\leq n$ (pode haver mais, sse D for cíclico)
- Pelo Corolário 1, se há caminho de $v_i$ a $v_j$, ele aparecerá até a potência n de X

# Exemplo




$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- O Corolário 2 nos dá um algoritmo para calcular a matriz caminho P a partir de X, mas ele é muito caro, visto que envolve muitos produtos de matrizes $O(n^3)$.
- Para torná-lo mais eficiente, usamos operações booleanas and $\wedge$ e or $\vee$ no lugar de multiplicação e soma, e redefinimos $X^k$ e Q, a partir de X, com valores booleanos 0 e 1.

$X^k$ : $\quad x^k_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (x^{k-1}_{ik} \wedge x_{kj})$ ; $1 \leq i,j \leq n$

Q : $\quad q_{ij} = x_{ij} \vee x^2_{ij} \vee \ldots \vee x^n_{ij}$

Mas então Q é a própria matriz P desejada!

Logo: $P = X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n$,

onde $X^k = X^{k-1} \wedge X$

# Algoritmo de Roy-Warshall (RW)

- Calcula P, a matriz caminho de D, a partir de sua matriz adjacência, X.

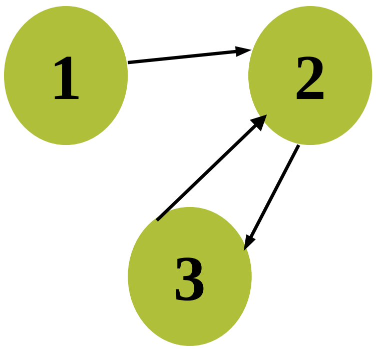
**Algoritmo:**

**Dada $X_{nxn}$, matriz adjacência de D(V,A)**

**Início**

```
        Faça P = X;
        para j = 1 até n faça
            para i = 1 até n faça
                se p_ij = 1 /*se já há caminho de i a j*/
                então para k = 1 até n faça
                            p_ik = p_ik ∨ p_jk /*então haverá de
i a k se houver de j a k */
Fim
```

# Exemplo




$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Então P1 (Existe caminho de $v_i$ a $v_j$? ) já pode ser respondida

# Para dígrafos valorados: calculando o caminho mínimo entre 2 vértices

- Neste caso, X, a matriz adjacência, tem os valores 1 substituídos pelos respectivos pesos.
- Seja MC, a Matriz dos custos dos caminhos mínimos, tal que:

$$MC_{ij} = \delta(i,j)$$

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\Rightarrow} v\} \; se \; \exists \; rota \; de \; u \;\; p/v \\ \infty \; cc \end{cases}$$

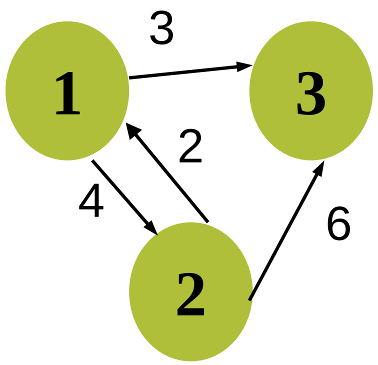
Ou seja, $MC_{ij}$ é o custo do caminho mínimo entre i e j.

- Estratégia: Trocar 0 por $\infty$ e 1 pelo peso, em X

# Algoritmo de Floyd-Warshall (FW)

```
Dada X de D, cria MC, a matriz dos custos dos caminhos
mínimos
Início
 faça MC = X
 para j = 1 até n faça
  para i = 1 até n faça
   se MCij ≠ ∞ então /*se há caminho de custo MCij de i a j*/
     para k = 1 até n faça
      MCik = min (MCik, MCij + MCjk)/*então o custo min. de i
a k é o mínimo entre o caminho direto de i a k e a soma de i a
j e de j a k*/
Fim
```

# Exemplo




$$X = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 \\ 2 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \sim MC$$

$$\begin{array}{c} \\ (2, \infty) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (\infty, 4+2) & (4, \infty) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ \infty & \overset{(\infty, 2+4)}{\infty} & \infty \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (3, 4+6) \\ (6, 2+3) \\ \\ \end{array}$$

E assim FW responde P4: Qual é o custo do caminho mínimo de $v_i$ a $v_j$? (valorados)

# Consequência

- O que acontece se, no algoritmo FW, todo peso for =1?

$MC_{ij}$ é o <u>comprimento</u> do menor caminho entre $v_i$ e $v_j$

Assim, FW também responde:

P3: Qual é o comprimento do caminho mínimo de $v_i$ a $v_j$? (valorados)

# Queremos mais…

- Além do custo do caminho mínimo, e do seu comprimento, eventualmente queremos o próprio caminho, ou seja, a sequência de vértices que o compõe

- Basta uma pequena alteração no algoritmo FW:
- Calcula-se simultaneamente a MC, uma matriz M, de igual dimensão de X.

# Cálculo do caminho mínimo

- No início:

$$M_{ik} = k, \text{ se } X_{ik} \neq \infty$$

$$M_{ik} = 0, \text{ se } X_{ik} = \infty$$

- Ou seja, no início, $M_{ik}$ representa o vértice onde incide a aresta que parte de $v_i$ (0 indica inexistência de aresta)
- A ideia é alterar os valores de M sempre que um caminho alternativo é calculado (i.e. quando o custo mínimo é alterado), de forma que no final, $M_{ik}$ contém o rótulo do próximo vértice do caminho mínimo de $v_i$ a $v_k$

# Cálculo do caminho mínimo

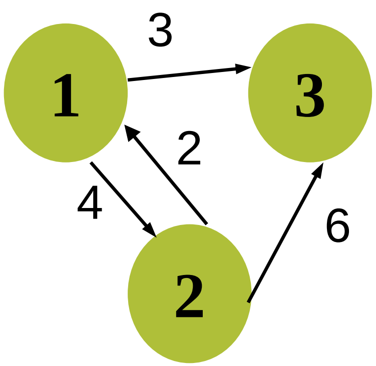
- P.ex.
- Se $(v_i, v_t, v_u, \ldots., v_k)$ é o cam. mínimo de $v_i$ a $v_k$, então $M_{ik} = t$
- Mas o restante do caminho é facilmente recuperado, uma vez que $M_{tk}$ tem o próximo vértice do caminho: $v_u$
- E assim por diante

# Algoritmo FW com especificação de caminho – FW$^+$

```
Dada X, cria MC e M
Início
 faça MC = X
 inicialize M conforme a definição*
 para j = 1 até n faça
  para i = 1 até n faça
   se MCij ≠ ∞ então
      para k = 1 até n faça
       se MCik > MCij + MCjk então
              {MCik = MCij + MCjk;
               Mik = Mij}
Fim
```

* Slide 31

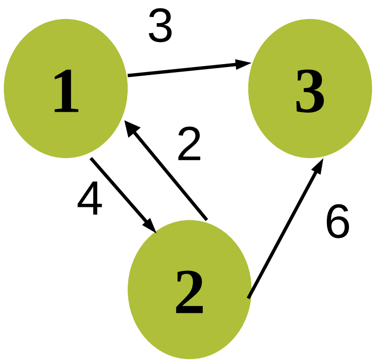
# Calculando M para o exemplo anterior




$$X = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 3 \\ 2 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad MC = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

# Calculando M para o exemplo anterior




$$MC = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Leitura das Matrizes M e MC:

- o c.m. de v1 a v1 é (v1,v2,v1) com custo 6
- o c.m. de v1 a v2 é (v1,v2) com custo 4
- o c.m. de v1 a v3 é (v1,v3) com custo 3
- o c.m. de v2 a v1 é (v2,v1) com custo 2
- o c.m. de v2 a v2 é (v2,v1,v2) com custo 6
- o c.m. de v2 a v3 é (v2,v1,v3) com custo 5
- Não existem caminhos a partir de v3

# Concluindo

- E finalmente $FW^+$ responde também

  P5: Qual é o caminho mínimo (menor custo) de $v_i$ a $v_j$? (valorados)

- Repare que, ao usar os algoritmos sobre a Matriz de Adjacência, temos as respostas simultaneamente para todo par de vértices (i,j), a um custo de $O(n^3)$
- A seguir, veremos um algoritmo, sobre Listas de Adjacências, que responde:
  - P4: Qual é o custo do caminho mínimo de $v_i$ a $v_j$?
  - P5: Qual é o caminho mínimo (menor custo) de $v_i$ a $v_j$?
  - Fixado i, para todo j

# Exercícios

- Programe os algoritmos vistos usando o TAD Matriz de Adjacência