Teste qui-quadrado e teste exato de Fisher

São apresentados exemplos com as funções `chisq.test` e `fisher.test` do pacote `stats` em R.

1. chisq.test

Pode ser utilizada para testar a bondade do ajuste a uma distribuição multinomial. Também pode ser utilizada para testar a independência de duas variáveis a partir das contagens em uma tabela de contingências bidimensional.

Exemplo 1.1. Testar se uma distribuição multinomial com probabilidades (1/3, 1/3, 1/3) ajusta bem as contagens (20, 15, 25).
Neste exemplo $N = 3$ e $n = 20 + 15 + 25 = 60$. Como as probabilidades sob a hipótese nula são iguais a $1/N$, não é necessário especificá-las ao chamar a função.

```
x <- c(20, 15, 25)
(ex11 <- chisq.test(x))
```

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  x
X-squared = 2.5, df = 2, p-value = 0.2865.
```

O valor da estatística de teste é $X^2 = 2{,}5$ e está armazenado em `ex11$statistic`. Com dois graus de liberdade ($N - 1 = 2$), obtemos valor-p = 0,2865, que pode ser calculado como

```
pchisq(ex11$statistic, df = length(x) - 1, lower.tail = FALSE)
```

ou

```
pchisq(ex11$statistic, df = ex11$parameter, lower.tail = FALSE)
```

```
0.2865048
```

Exemplo 1.2. Testar se uma distribuição multinomial com probabilidades (1/4, 1/8, 5/8) ajusta bem as contagens (14, 25, 81).
Neste exemplo $N = 3$ e $n = 120$. Como as probabilidades sob a hipótese nula são diferentes de $1/N$, devemos informar estas probabilidades com o argumento `p`.

```
x <- c(14, 25, 81)
prob0 <- c(1/4, 1/8, 5/8)
(ex12 <- chisq.test(x, p = prob0))
```

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  x
X-squared = 15.68, df = 2, p-value = 0.0003937
```

Exemplo 1.3. Testar se uma distribuição multinomial com probabilidades proporcionais a (2, 5, 3, 8) ajusta bem as contagens (19, 62, 31, 105).
Neste exemplo $N = 4$ e $n = 217$. As probabilidades em si não foram fornecidas, mas são iguais às constantes de proporcionalidade divididas pela sua soma. Podemos especificar diretamente as constantes de proporcionalidade, bastando informar o argumento `rescale.p` como `TRUE`.

```
x <- c(19, 62, 31, 105)
prop0 <- c(2, 5, 3, 8)
chisq.test(x, p = prop0, rescale.p = TRUE)
```

```
Chi-squared test for given probabilities

data:  x
X-squared = 2.6297, df = 3, p-value = 0.4523
```

Exemplo 1.4. A partir dos dados (obtidos sem que as margens fossem fixadas)

```
n <- as.table(rbind(c(762, 327, 468), c(484,239,477)))
dimnames(n) <- list(gender = c("M", "F"),
              party = c("Democrat", "Independent", "Republican"))
n
```

```
      party
gender Democrat Independent Republican
     M      762         327        468
     F      484         239        477
```

testar a hipótese de independência entre as variáveis *gender* e *party*

Os dados compõem uma tabela 2×3 e o tamanho da amostra é n = `sum(n)` = 2757. Adotando *gender* como variável explicativa, os gráficos de barras da Figura 1, obtidos com os comandos

```
tab14 <- prop.table(n, margin = 1) * 100
library(lattice)
barchart(tab14, xlab = "Percentage", ylab = "Gender", stack = FALSE,
scale = list(cex = 1.5), auto.key = list(space = "top", columns = 3))
```

sugerem que há dependência entre as variáveis (por quê?). Realizando o teste de independência com a estatística X^2,

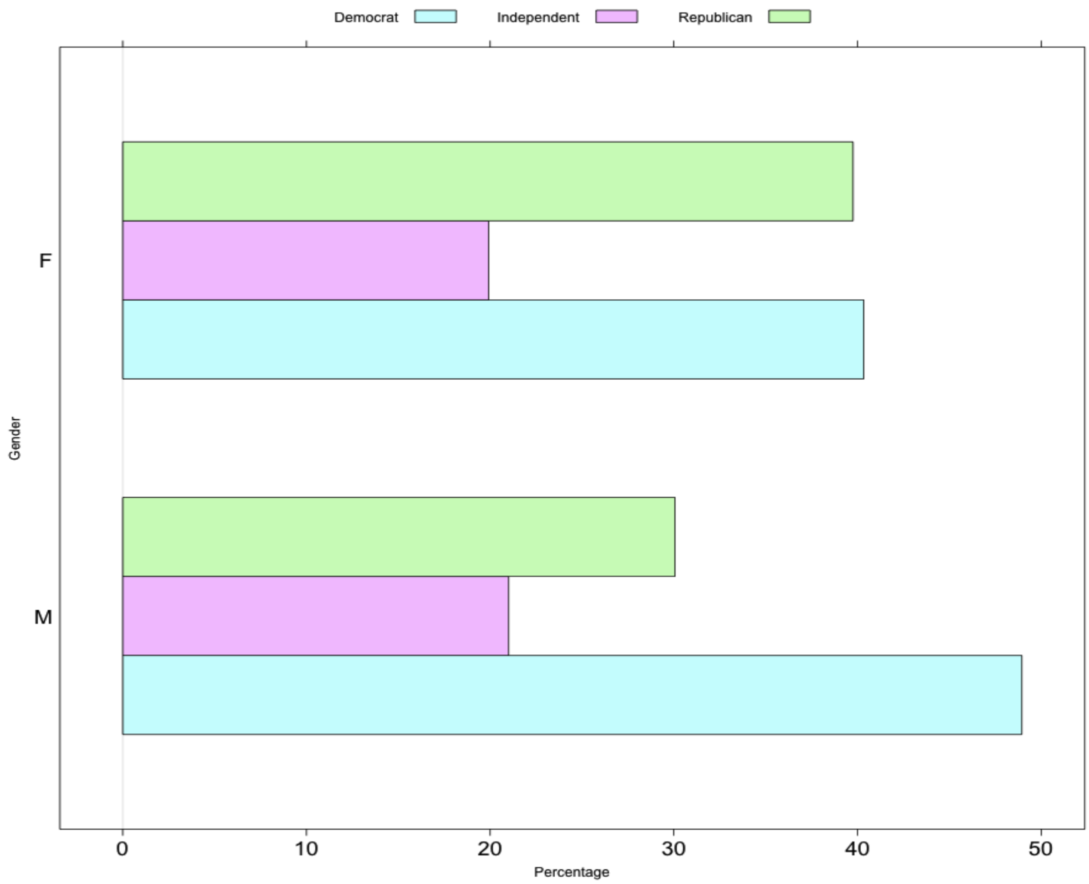
```
(ex14 <- chisq.test(n))
```

```
Pearson's Chi-squared test

data:  n
X-squared = 30.0701, df = 2, p-value = 2.954e-07
```

encontramos evidências contra a hipótese nula de independência. Vale ressaltar que a função `chisq.test` neste exemplo serve para testar uma hipótese diferente daquelas dos exemplos anteriores.

Figura 1.



Gráficos de barras do exemplo 1.4.

As frequências esperadas estimadas sob H_0 são

```
ex14$expected
```

```
      party
gender Democrat Independent Republican
     M 703.6714    319.6453   533.6834
     F 542.3286    246.3547   411.3166
```

A estatística de teste G^2 (baseada na razão de verossimilhanças) tem valor

```
(G2 <- 2 * sum(n * (log(n) - log(ex14$expected))))
```

```
[1] 30.01669
```

bastante próximo ao valor de X^2.

2. fisher.test

Pode ser mostrado que se condicionarmos nos totais marginais de uma tabela de contingências obtemos uma distribuição que não depende de parâmetros desconhecidos. Ressalte-se que (i) no modelo de Poisson até mesmo o tamanho da amostra é aleatório, (ii) no modelo multinomial apenas o tamanho da amostra é fixo e (iii) no modelo produto de multinomiais independentes os totais de uma das margens são fixados. Em uma tabela 2×2, sob a hipótese nula de independência entre as variáveis em (i) e (ii) e sob a hipótese nula de homogeneidade das distribuições binomiais (que equivalem a $RC = 1$ em uma tabela 2×2), a distribuição condicional das contagens nos totais marginais é hipergeométrica como função de n_{11}. Se a hipótese alternativa for H_1: $RC > 1$ (H_1: $RC < 1$), quanto maior (menor) n_{11}, mais evidência contra H_0. Portanto, este resultado permite propor um teste exato para estas hipóteses, conhecido como teste exato de Fisher, implementado na função `fisher.test`.

Exemplo 2.1. Fisher's tea drinker (H_1: $RC > 1$).

```
TeaTasting <-
matrix(c(3, 1, 1, 3),
   nrow = 2, dimnames = list(Guess = c("Milk", "Tea"),
   Truth = c("Milk", "Tea")))
TeaTasting

       Truth
Guess  Milk Tea
 Milk    3   1
 Tea     1   3

fisher.test(TeaTasting, alternative = "greater")$p.value

[1] 0.2428571
```

Deve ser enfatizado que em diversas situações, diferentemente do exemplo 2.1, os totais marginais não são fixados. Assim, o teste é interpretado como sendo exato *condicional*.

Se a tabela não é 2×2, são utilizadas extensões do teste. O valor-p é calculado como a soma das probabilidades das tabelas (com totais marginais fixados) que não são mais prováveis de ocorrer do que a tabela observada.

Exemplo 2.2. Job satisfaction.

```
Job <- matrix(c(1,2,1,0, 3,3,6,1, 10,10,14,9, 6,7,12,11), 4, 4,
dimnames = list(income=c("< 15k", "15-25k", "25-40k", "> 40k"),
    satisfaction=c("VeryD", "LittleD", "ModerateS", "VeryS")))
Job
```

```
       satisfaction
income VeryD LittleD ModerateS VeryS
 < 15k     1       3        10     6
15-25k     2       3        10     7
25-40k     1       6        14    12
 > 40k     0       1         9    11
```

```
fisher.test(Job)
```

```
Fisher's Exact Test for Count Data

data:  Job

p-value = 0.7827 alternative hypothesis: two.sided
```

O valor-*p* pode ser aproximado por simulação de um certo número (argumento `B`) de tabelas com os totais marginais fixados.

```
fisher.test(Job, simulate.p.value = TRUE, B = 1e5)
```

```
Fisher's Exact Test for Count Data with simulated p-value (based on
1e+05 replicates)

data:  Job

p-value = 0.7843

alternative hypothesis: two.sided
```

<u>Nota 1.</u> No exemplo 2.1, n_{11} pode assumir os valores 0, 1, 2, 3 e 4. Apresente o valor-*p* do teste exato de Fisher para cada um dos possíveis valores de n_{11}.

<u>Nota 2.</u> No exemplo 2.2, apresente o resultado do teste qui-quadrado de independência.