

7ª Lista de Exercícios - 05/05/2014

Aplicações de séries de potências

1. Deterine os valores de x para os quais a série dada converge:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{2n})}{(1-x)^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + 1}$

2. Encontre a série de Taylor das seguintes funções em torno dos centros indicados. Para cada caso, determine o raio de convergência e verifique se a soma da série é a função dada.

(a) \sqrt{x} em $x = 1$. Aproveite este exercício para calcular $\sqrt{84}$ com três casas de precisão.

(b) $1/x$ em $x = 2$

(c) $1/(x+2)$ em $x = 0$

(d) $\ln x$ em $x = 1$

(e) e^x em $x = a$. Aproveite para verificar que $e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$.

3. Use expansões conhecidas para obter a série de Maclaurin da função dada:

(a) $f(x) = \frac{x^3}{(4-x)^2}$. *Dica:* $\frac{1}{(4-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4-x} \right)$

(b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+4x}{1-4x}}$.

(c) $f(x) = \sin^2 5x$. *Dica:* $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

4. Use série de potências para calcular a integral

(a) $f(y) = \int_0^y \frac{s}{1-s^4} ds$.

(b) $I = \int_0^3 4e^{-x^2} dx$.

(c) $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$. Calcule com precisão de três casas decimais.

5. Use uma série de Taylor apropriada para calcular os limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \arctan 3x}{2x^3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3x + 4x^3}{x^3}$

6. Encontre a soma da série:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$

7. Use séries para estimar o valor da integral com um erro menor que 10^{-3} .

(a) $\int_0^{0,2} \sin x^2 dx$

(b) $\int_0^{0,2} \frac{e^{-x} - 1}{x} dx$

(c) $\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$

8. (a) Seja α um número real dado, com α não-natural. Mostre que $y = (1+x)^\alpha$, $-1 < x < 1$, é uma solução do problema

$$(P) \quad \begin{cases} y' - \frac{\alpha}{1+x}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Suponha que $y = g(x)$, $-1 < x < 1$, seja uma solução de (P). Prove que $g(x) = (1+x)^\alpha$ para todo $-1 < x < 1$.

(c) Mostre que a função

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n, \quad (\text{série binomial})$$

$-1 < x < 1$, é uma solução do problema (P).

(d) Conclua que, para todo $-1 < x < 1$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

(e) Use a série binomial para encontrar a série de Maclaurin de $(1+x^2)^{-1/2}$.

(f) Use o item (a) para obter a série de Maclaurin de $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

9. O período de um pêndulo com comprimento L que faz uma ângulo máximo θ_0 com a vertical é

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} dx$$

onde $k = \sin(\theta_0/2)$ e g é a aceleração da gravidade.

(a) Expanda o integrando como uma série binomial para mostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \dots \right]$$

Para isso, você precisará da seguinte identidade que decorre da integração por partes:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

Se θ_0 for muito pequeno, a aproximação $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtida usando-se apenas o primeiro termo na série, é frequentemente usada. Uma aproximação melhor é obtida usando dois termos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 \right)$$

(b) Mostre que todos os termos na série, a partir do primeiro termo, têm coeficientes que são menores ou iguais a $1/4$. Use esse fato para comparar essa série com uma série geométrica e mostre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 \right) \leq T \leq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \frac{4-3k^2}{4-4k^2}$$

(c) Use as desigualdades na parte (b) para estimar o período em um pêndulo com $L = 1$ metro e $\theta_0 = 10^\circ$. Como isso se compara com a estimativa $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? O que acontece se $\theta_0 = 42^\circ$?