12^a Lista de Exercícios de SMA332 - Cálculo II

Professor: Thais Jordão e Wagner Vieira Leite Nunes 17.02.2014

Exercício 1 *Calcule o valor da integral de superfície* $\iint_S f(x, y, z)\, dS$*, onde:*

a) $f(x, y, z) \doteq 1$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a parte do plano* $x + y + z - 1 = 0$ *que está contida no primeiro octante;*

b) $f(x, y, z) \doteq x^2$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a parte do plano* $z = x$ *que está no interior do cilindro* $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x, y, z) \doteq x^2$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é o hemisfério superior da esfera* $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$*;*

d) $f(x, y, z) \doteq x + y$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a parte do plano* $2x + 3y + z = 6$ *que está contida no primeiro octante.*

Exercício 2 *Calcule o valor da integral de superfície* $\iint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS$*, nos seguintes casos:*

a) $\vec{F}(x, y, z) \doteq (x + 1) \cdot \vec{e}_1 - (2y + 1) \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é o triângulo que tem como vértices os pontos* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$.

b) $\vec{F}(x, y, z) \doteq x^2 \cdot \vec{e}_1 + y^2 \cdot \vec{e}_2 + z^2 \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é o tronco do cone* $z^2 = x^2 + y^2$ *que está entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 2$.

c) $\vec{F} \doteq xy \cdot \vec{e}_1 + xz \cdot \vec{e}_2 + yz \cdot \vec{e}_3$, *para* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a parte do cilindro* $y^2 = 2 - x$ *que está entre os cilindros* $y^2 = z$ *e* $y = z^3$.

Exercício 3 *Verifique a validade o Teorema da Divergência para o caso* $\vec{F}(x, y, z) \doteq x \cdot \vec{e}_1 - 2y \cdot \vec{e}_2 + 3z \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a superfície do sólido* Q *limitado, delimitado pelos parabolóides* $y = x^2$ *e* $z^2 = 4 - x$.

Exercício 4 *Usando o Teorema da Divergência, calcule a integral de superfície* $\iint_S \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS$*, onde o vetor* $\vec{n}$ *é o vetor unitário normal exterior à superfície* S*, nos seguintes casos:*

a) $\vec{F}(x, y, z) \doteq y\ \mathrm{sen}(x) \cdot \vec{e}_1 + y^2 z \cdot \vec{e}_2 + (x + 3z) \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a superfície do sólido limitado, delimitado pelos planos* $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

b) $\vec{F}(x, y, z) \doteq y^3 e^z \cdot \vec{e}_1 - xy \cdot \vec{e}_2 + x\ \arctan(y) \cdot \vec{e}_3$ *e* S *é a superfície do sólido limitado e delimitado pelos planos coordenados e pelo plano* $x + y + z = 1$.

c) $\vec{F}(x, y, z) \doteq ye^z \cdot \vec{e}_1 + (y - ze^x) \cdot \vec{e}_2 + (xe^y - z) \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é o toro* $\left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2$*, onde* $0 < b < a$ *estão fixados.*

d) $\vec{F}(x, y, z) \doteq x^3 \cdot \vec{e}_1 + y^3 \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a superfície do sólido limitado, delimitado por* $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ *e* $z = x + 2$.

Exercício 5 *Verifique a validade do Teorema de Stokes nos seguitnes casos:*

a) $\vec{F}(x, y, z) \doteq z \cdot \vec{e}_1 + x \cdot \vec{e}_2 + y \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a parte do parabolóide* $z = 1 - x^2 - y^2$ *para* $z \in [0, \infty)$.

b) $\vec{F}(x, y, z) \doteq y^2 \cdot \vec{e}_1 + xy \cdot \vec{e}_2 - 2xz \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a calota superior da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$*, onde* $a > 0$ *está fixado.*

c) $\vec{F}(x, y, z) \doteq z \cdot \vec{e}_1 - x \cdot \vec{e}_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *e a superfície* S *é a parte do cilindro dado em coordenadas polares por* $r = 2 + \cos\theta$ *que está acima do plano* xOy *e abaixo do cone* $z^2 = x^2 + y^2$.

Exercício 6 *Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha* $\oint_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{R}$, *onde:*

a) $\vec{F}(x,y,z) \doteq [3z - \text{sen}(x)] \cdot \vec{e}_1 + (x^2 + e^y) \cdot \vec{e}_2 + [y^3 - \cos(z)] \cdot \vec{e}_3$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *e a curva* C *admite a seguinte parametrização:* $x = \cos(t)$, $y = \text{sen}(t)$, $z = 1$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{F}(x,y,z) \doteq yz \cdot \vec{e}_1 + xy \cdot \vec{e}_2 + xz \cdot \vec{e}_3$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *e a curva* C *é formada pelos lados do quadrado de vértices nos pontos* $(0,0,2)$, $(1,0,2)$, $(1,1,2)$ *e* $(0,1,2)$.

Exercício 7 *Use o Teorema de Stokes para calcular o valor da integral de superfície* $\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \bullet \vec{n}\, dS$, *onde* $\vec{F}(x,y) \doteq y \cdot \vec{e}_1 + e^z \cdot \vec{e}_2 - \arctan(x) \cdot \vec{e}_3$, *para* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e a superfície* S *é a parte do parabolóide* $z = 4 - x^2 - y^2$ *que situa-se acima do plano* $z = 0$ *e o vetor* $\vec{n}$ *é o vetor normal superior à superfície* S.

Exercício 8 *Verifique se o campo vetorial dado por* $\vec{F}(x,y,z) \doteq \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3)$, *para* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, *é um campo gradiente de alguma função escalar definida no paralelepípedo* $[1,2] \times [1,3] \times [2,4]$.

Exercício 9 *Verifique que as transformações abaixo são localmente inversíveis em torno do ponto* P_o *dado.*

a) $T(x,y) \doteq (\text{sen}(x+y), \text{sen}x - \text{sen}y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e* $P_o = (0,0)$.

b) $T(x,y) \doteq (x, f(x,y))$, $(x,y) \in A$ *para* $P_o = (x_o, y_o) \in A$ *onde* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* P_o *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_o) \neq 0$.

c) $T(x,y,z) \doteq (x, y, f(x,y,z))$, $(x,y,z) \in A$ *para* $P_o = (x_o, y_o, z_o) \in A$ *onde* $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* P_o *e* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_o) \neq 0$.

Exercício 10 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \setminus D \doteq \{(u,0)\ ;\ u \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(u,v) = \left(u - v, \dfrac{u}{v}\right)$, $(u,v) \in D$.

a) *Calcule* $T(u,u)$, *para* $u \in \mathbb{R}$.

b) *Mostre que a transformação* T *admite uma transformação inversa localmente em torno do ponto* $P_o = (u_o, v_o)$, *onde* $u_o \neq v_o$ *e* $v_o \neq o$.

Exercício 11 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x,y) \doteq (x^2 - y^2, 2xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) *Mostre que a trasnformação* T *é localmente inversível em torno do ponto* $P_o = (x_o, y_o) \neq (0,0)$.

b) *a transformação* T *admite inversa se restringirmos seu domínio a todos os pontos de* $\mathbb{R}^2$ *exceto o* $(0,0)$*? Justifique.*

c) *Mostre que o arco de circunferência dado, em coordendas polares, por* $(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)$ *onde* $\theta \in [0, \pi]$ *é levado pela transformação* T *na circunferência centrada na origem e raio* r^2.

Exercício 12 *Mostre que a equação* $f(x,y) = 0$ *define uma função implícita* $y = g(x)$ *em torno do ponto* (x_o, y_o) *e calcule* $g'(x)$ *nos seguintes casos:*

a) $f(x,y) \doteq x^2 - xy + y^2 - 3$, $(x_o, y_o) = (1,2)$

b) $f(x,y) \doteq 2e^{x+y} - x + y$, $(x_o, y_o) = (1,-1)$

c) $f(x,y) \doteq xy - 1$, $(x_o, y_o) = (1,1)$. *Calcule também g"(1).*

Exercício 13 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função com derivada contínua em* $\mathbb{R}$. *Apresente uma condição sobre a função* $\underline{f}$ *que possibilitará que a equação*

$$2f(xy) = f(x) + f(y)$$

defina, implicitamente, $\underline{y}$ *como uma função de* $\underline{x}$ *em torno do ponto* $(1,1)$.

Exercício 14 *Sejam* $x_o \neq 0$ *e* $x_o \neq 1$. *Mostre que se o ponto* (x, y) *está suficientemente próximo do ponto* $(x_0, 0)$, *a equação* $\operatorname{sen}(x^2 y) - xy = 0$ *é equivalente à equação* $y = 0$.

Exercício 15 *Qual é o lugar geométrico dos pontos* (x, y) *que satisfazem a equação:*

a) $y^2 + x^2 e^y = 0$?

b) $\left[e^{\operatorname{sen}(x)} - 1\right]^2 + [\operatorname{sen}(y) - 1]^2 = 0$?

c) *Estude as equações anteriores de acordo com o Teorema das Funções Implícitas.*

Exercício 16 *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x, y) \doteq x^2 + y^2 - x^3$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Encontre, se possível, uma solução do tipo* $y = f(x)$ *da equação* $F(x, y) = 0$, *nos seguintes casos:*

a) *em uma vizinhança do ponto* $(5, 10)$.

b) *em uma vizinhança do ponto* $(10, -30)$.

c) *Observe que, no caso, da equação* $F(x, y) = 0$ *teremos* $y^2 = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$. *Logo, existe uma região do plano onde a equação* $F(x, y) = 0$, *não terá solução. Qual é?*

d) *Em que pontos* (x_o, y_o) *do lugar geométrico* $F(x, y) = 0$ *nós* **<u>não</u>** *temos um intervalo* I, *contendo* x_o, *tal que* $F(x, y(x)) = 0$ *para* $x \in I$?