ICMC USP
SÃO CARLOS

2. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

2019

Conceitos básicos

Experimento aleatório ou fenômeno aleatório

Situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Um experimento ou fenômemo que, se for observado em condições idênticas, pode apresentar diferentes resultados é chamado de experimento ou fenômeno aleatório.

Conceitos básicos

Exemplos

- Observação da temperatura diária mínima em São Carlos.
- Registro da inflação mensal (medida pela FIPE).
- Observação da condição de um item produzido.
- Resultado do lançamento de um dado.
- Registro do tempo de duração (tempo de vida) de uma lâmpada.
- Observação do número de veículos que passam por um praça de pedágio durante um certo intervalo.
- Tábua de Galton:

  http://www.mathsisfun.com/probability/quincunx.html

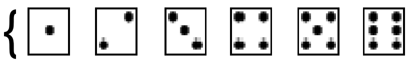
  http://www.jcu.edu/math/isep/Quincunx/Quincunx.html

Conceitos básicos

Espaço amostral (Ω)

Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos

1. Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ou Ω = {  }

2. Condição de um item produzido: Ω = {defeituoso, não defeituoso}

3. Número de veículos que passam por uma praça de pedágio durante um certo intervalo: $\Omega = \{0, 1, 2, ...\}$

4. Vazão diária máxima em uma estação de medição (em m^3/s):

$\Omega = (0, \infty)$

Exemplo

Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento

Subconjunto do espaço amostral Ω.

Notação: A, B, C,...

Exemplos. Eventos do exemplo acima:

A. Resultado é par: $A = \{2, 4, 6\}$ (evento composto)

B. Resultado é maior do que 3: $B = \{4, 5, 6\}$ (evento composto)

C. Resultado igual a 1: $C = \{1\}$ (evento simples)

D. Resultado maior do que 6: $D = \varnothing$ (evento impossível)

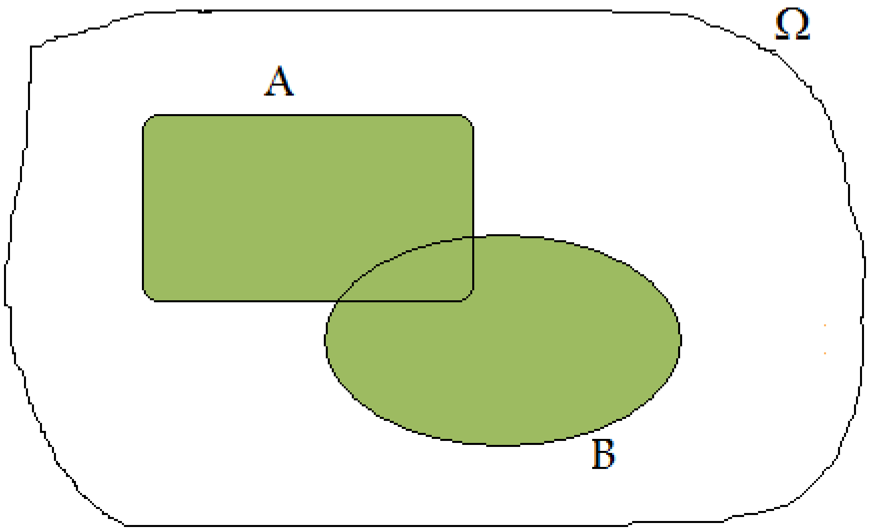
E. Resultado menor do que 7: $D = \Omega$ (evento certo)

Operações com eventos

A e B são eventos de Ω

- A ∪ B: união dos eventos A e B

Ocorrência de pelo menos um dos eventos A e B.



Operações com eventos

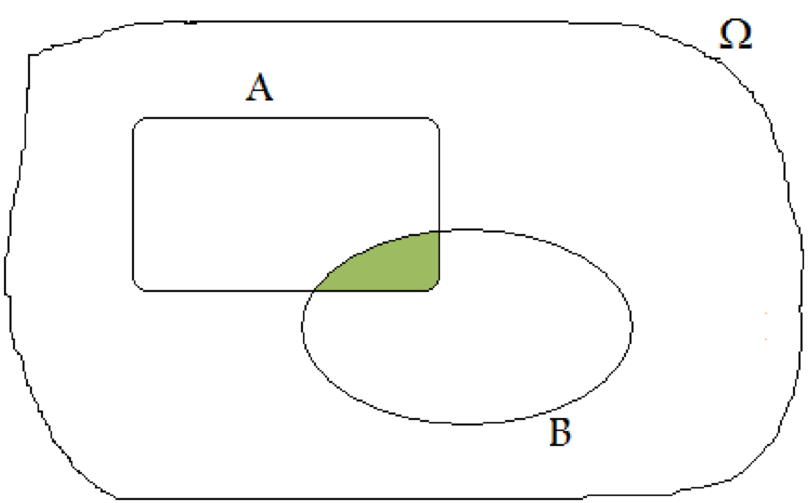
- $A \cap B$: intersecção dos eventos A e B

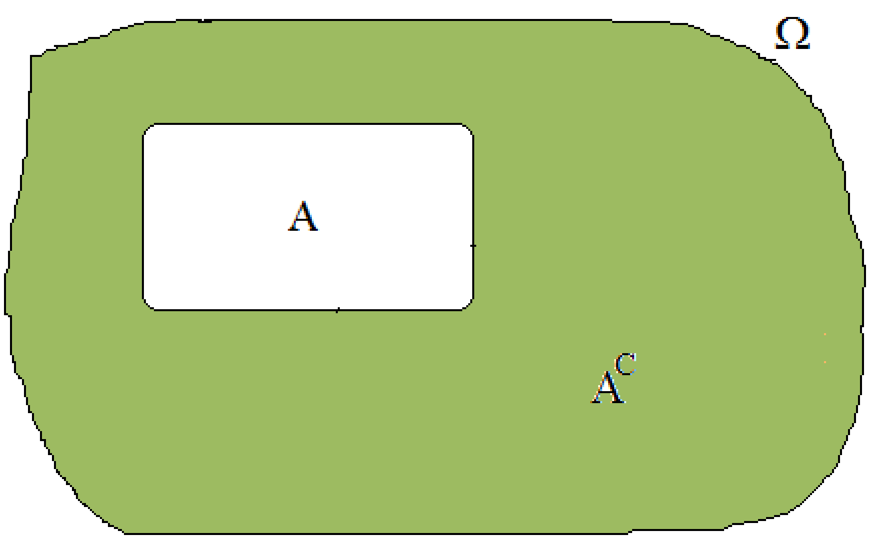
Ocorrência simultânea dos eventos A e B.

- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

- A e B são complementares se $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$.

- O complementar de um evento A é representado por A^C ou $\bar{A}$





Definições de probabilidade

Probabilidade clássica ou *a priori*

Se um experimento aleatório tiver n(Ω) resultados mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e, se um evento A tiver n(A) desses resultados, a probabilidade do evento A, representada por P(A), é dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo. Lançamento de dois dados balanceados. Calcular a probabilidade de

a) se obter soma das faces igual a 7,

b) se obter soma maior do que 5,

c) que o resultado do primeiro dado seja maior do que o resultado do segundo.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{Bmatrix}$$

a) A = {(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(6,1)}

$\Rightarrow$ P(A) = n(A) / n(Ω) = 6 /36=1/6

$$\Omega = \left\{\begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array}\right\} \rightarrow B$$

b) P(B) = 26/36.

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{matrix}\right\}$$

C

c) P(C) = 15/36.

Definições de probabilidade

Probabilidade frequentista ou *a posteriori*

Um experimento é realizado n vezes (n "grande"). O evento A ocorre exatamente n(A) vezes ($0 \leq n(A) \leq n$) . A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A, ou seja,

$$f_r(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Quando $n \to \infty$, $f_r(A)$ se aproxima de P(A).

Exemplo. Lançamento de uma moeda balanceada. Calcular a probabilidade de A = {resultado obtido é cara}.

	fr_1	fr_2	fr_3	fr_4	...	P(A)
Cara	2/5	6/10	22/50	47/100	...	0,5
n	5	10	50	100	...	∞

Definições de probabilidade

Definição axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número P(A) satisfazendo aos seguintes axiomas:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \subset \Omega$,

(ii) $P(\Omega) = 1$ e

(iii) Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Propriedades

1. $P(\Phi) = 0.$
2. Se $A \subset \Omega$, então $P(A) = 1 - P(A^c)$.
3. Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$.
4. Se $A, B \subset \Omega$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Se $A, B, C \subset \Omega$, então

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Probabilidade condicional e independência

A e *B* *são* dois eventos em um mesmo espaço amostral Ω. A probabilidade condicional de *A* dado que ocorreu o evento *B*, denotada por *P(A|B)*, é definida como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Obs. Pela propriedade 3 na lâmina 13, temos $P(A|B) \leq P(A) / P(B)$.

Exemplo. Selecionamos dois itens, ao acaso, um a um e sem reposição, de um lote que contém 10 itens do tipo A e 5 do tipo B. Qual é a probabilidade de que

(a) o primeiro item seja do tipo A?

(b) o segundo seja do tipo B se o primeiro item foi do tipo A?

Definimos os eventos

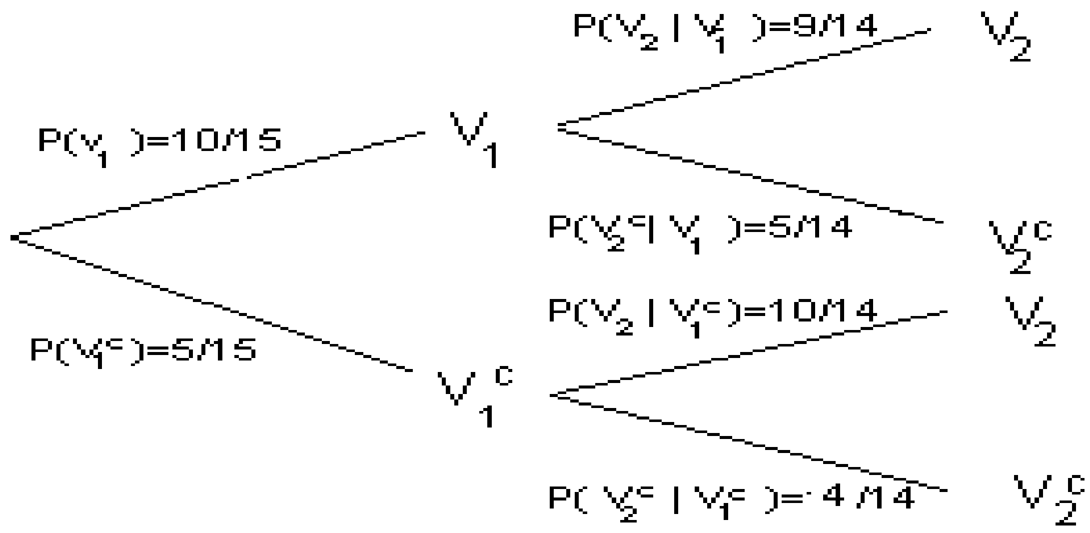
$$V_1 : \text{"o 1º item é do tipo A"};$$
$$V_2 : \text{"o 2º item é do tipo A"}$$

$$(a) \quad P(V_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

$$(b) \quad P(V_2^c | V_1) = \frac{5}{14}.$$

Essas probabilidades podem ser representados em uma árvore de probabilidades.

Árvore de probabilidades



Da expressão (1) na lâmina 14 obtém-se uma relação útil:

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B),$$

conhecida como regra do produto de probabilidades ou probabilidade da interseção.

Exemplo. No exemplo anterior suponha que temos interesse em determinar a probabilidade de que os dois itens selecionados sejam do tipo B.

$$\text{O evento é } V_1^c \cap V_2^c : \text{"o } 1^{\underline{o}} \text{ e o } 2^{\underline{o}} \text{ itens são do tipo B"}$$

$$\mathrm{P}(V_1^c \cap V_2^c) = P(V_1^c)P(V_2^c \mid V_1^c) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}.$$

Resultado. Se B é um evento em Ω tal que P(B) > 0, então

1. $P(\phi \mid B) = 0.$

2. $\text{Se } \mathrm{A} \subset \Omega, \text{então } \mathrm{P}(\mathrm{A}^c \mid B) = 1 - P(A \mid B) \text{ ou } P(A \mid B) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}^c \mid B).$

3. $\text{Se } A, C \subset \Omega, \text{então}$

$$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B).$$

Exemplo. Segundo dados coletados, a probabilidade de ocorrer congestionamento em uma via em um certo dia é 0,28 e a probabilidade de haver congestionamento em dois dias consecutivos é 0,17.

Se ocorrer congestionamento em um certo dia, qual a probabilidade de que no dia seguinte não ocorra congestionamento ?

Solução. Definimos os eventos A: “ocorre congestionamento em um certo dia” e B: “ocorre congestionamento no dia seguinte”.

Do enunciado do problema temos P(A) = 0,28 e P(A∩B) = 0,17. A probabilidade pedida é

$$P\left(B^c \middle| A\right) = 1 - P\left(B \middle| A\right) = 1 - \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)} = 1 - \frac{0,17}{0,28} = 0,39.$$

Independência de eventos

Dois eventos A e B em Ω são independentes se a informação da ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é,

$$P(A \mid B) = P(A), \quad \text{se } P(B) > 0.$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo. Em uma fábrica 20% dos lotes produzidos têm componentes do fornecedor A, 8% têm componentes do fornecedor V e 4% têm componentes de ambos. Selecionamos ao acaso um item produzido nesta fábrica.

(a) Os eventos relacionados aos dois fornecedores são independentes?

(b) Se o lote selecionado tem componentes do fornecedor V, qual a probabilidade de que tenha componentes do fornecedor A?

(c) Qual é a probabilidade de um lote não ter componentes destes dois fornecedores?

Solução. A: “o lote tem componentes do fornecedor A”, V: “o lote tem componentes do fornecedor V”.

Do enunciado temos P(A) = 0,20, P(V) = 0,08 e P(A ∩ V) = 0,04.

$$(a)\ P(V)P(A) = 0,08 \times 0,2 = 0,016 \text{ e}$$
$$P(V \cap A) = 0,04.$$
$$\text{Como } P(V \cap A) \neq P(V)P(A),\ A \text{ e } V \text{ não são independentes}.$$

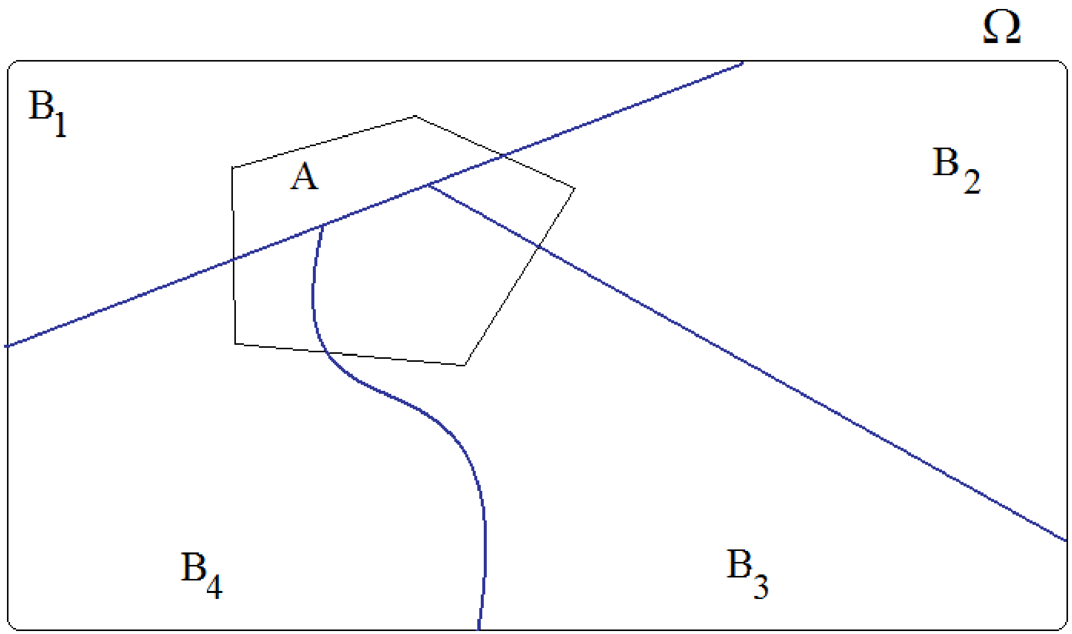
$$(b)\ P(A|V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0,04}{0,08} = 0,50.$$

$$(c)\ P((V \cup A)^c) = 1 - P(V \cup A)$$
$$1 - \{P(V) + P(A) - P(V \cap A)\}$$
$$1 - (0,08 + 0,2 - 0,04) = 0,76.$$

Resultado. Se A e B são eventos independentes em Ω, então (i) A e B^c são independentes, (ii) A^c e B são independentes e (iii) A^c e B^c são independentes.

Fórmula da probabilidade total

Partição do espaço amostral. Uma coleção de eventos $B_1,\ldots,B_k$ forma uma partição do espaço amostral se eles são mutuamente exclusivos e se sua união é igual ao espaço amostral.

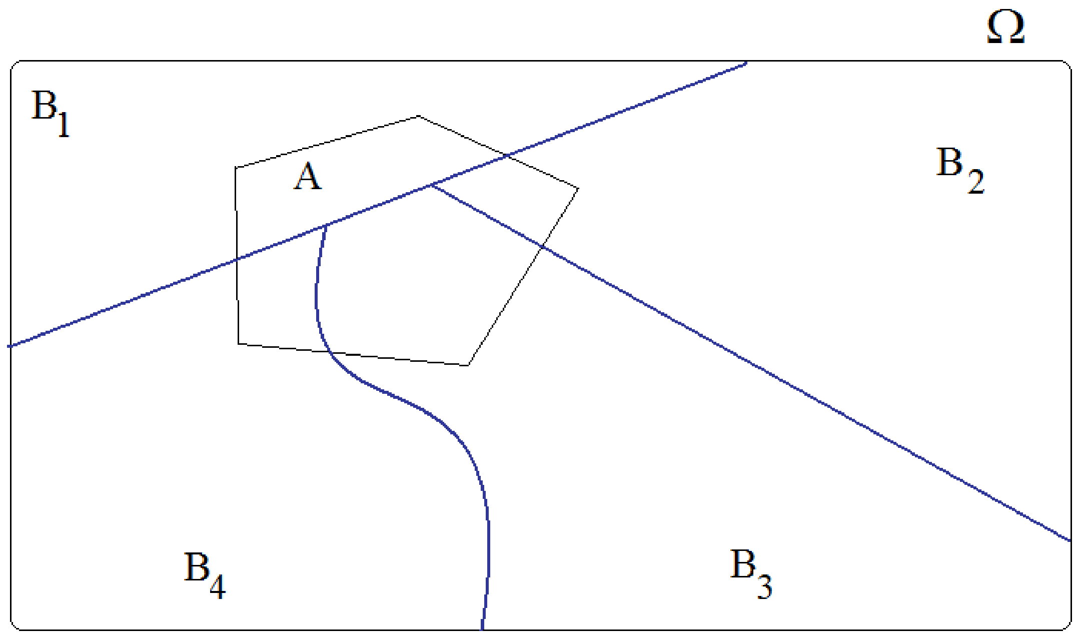


Na figura, $k = 4$ e $B_1,\ldots,B_4$ formam uma partição do espaço amostral Ω.

Problema. Calcular $P(A)$.

Fórmula da probabilidade total

São conhecidas $P(B_1),\ldots,P(B_k)$ e $P(A \mid B_1),\ldots,P(A \mid B_k)$.



Para qualquer evento A em Ω, vale

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \cdots + P(B_k)P(A|B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i).$$

Problema. Calcular $P(B_i \mid A)$, para i = 1,…,k, chamada de probabilidade inversa.

Fórmula de Bayes. Se $B_1, \ldots, B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, e A é evento em Ω com $P(A) > 0$, então

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}.$$

Na fórmula de Bayes, o denominador é a fórmula da probabilidade total.

Exemplo. Uma fábrica trabalha com dois fornecedores (A e B) de um determinado componente. Sabe-se que 10% e 5% das peças provenientes dos fornecedores A e B, respectivamente, estão fora das especificações. A fábrica recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% de B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhida ao acaso,

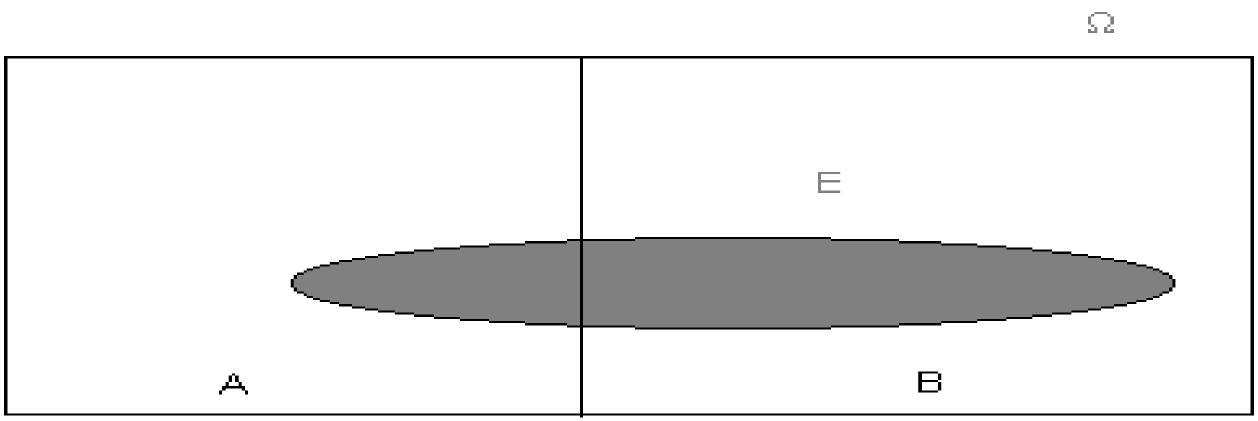
(a) calcule a probabilidade de que ela esteja fora das especificações.
(b) se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade de que tenha sido fornecida por A ?

Solução. Eventos:

A: “peça selecionada foi fornecida por A”,

B: “peça selecionada foi fornecida por B” ($B = A^c$) e

E: “peça selecionada não atende às especificações”.



Do enunciado do problema temos P(A) = 0,30, P(B) = 0,70, P(E|A) = 0,10 e P(E|B) = 0,05.

(a) Fórmula da probabilidade total:

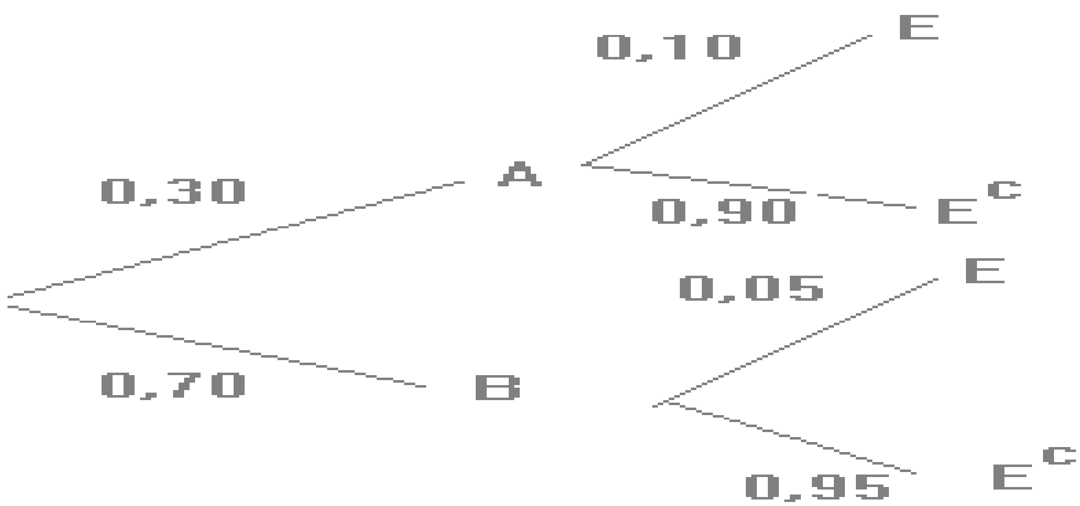
P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) = 0,30 × 0,10 + 0,70 × 0,05 = 0,065.

(b) P(A|E) = ?

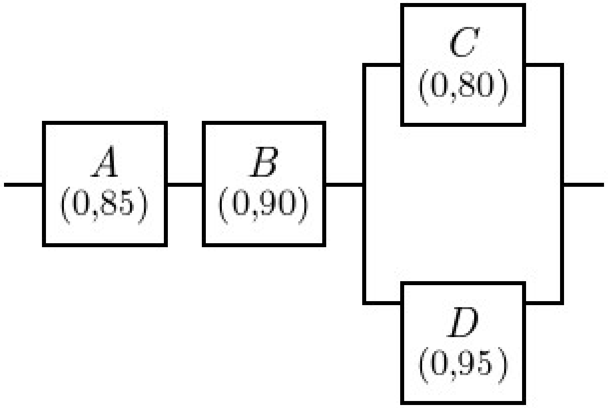
Pela fórmula de Bayes,

$$P(A|E)=\frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)}=\frac{0,30\times 0,10}{0,30\times 0,10+0,70\times 0,05}=\frac{0,03}{0,065}=0,46.$$

A solução do exemplo anterior é facilitada pela árvore de probabilidades:



Na figura abaixo são apresentados um sistema e as probabilidades de funcionamento de seus componentes. (a) Calcule a probabilidade de funcionamento do sistema. (b) Sabendo que o sistema funciona, qual a probabilidade de que o componente C tenha falhado?



Solução. Definimos o evento E como sendo "o sistema funciona". Supomos independência entre os eventos A, B, C e D.

Pela figura, $E = (A \cap B) \cap (C \cup D)$.

(a) Calculamos $P(E) = P((A \cap B) \cap (C \cup D)) = P(A \cap B) \times P(C \cup D)$

$= P(A \cap B) \times \{P(C) + P(D) - P(C \cap D)\}$

$= P(A) \times P(B) \times \{P(C) + P(D) - P(C) \times P(D)\}$

$= 0{,}85 \times 0{,}90 \times (0{,}80 + 0{,}95 - 0{,}80 \times 0{,}95) = 0{,}76.$

Exemplo

(b) Devemos calcular $P(C^c|E)$, dada por $P(C^c|E) = 1 - P(C|E)$

$= 1 - P(C \cap E) / P(E)$.

Utilizando regras de operações com conjuntos obtemos

$C \cap E = A \cap B \cap C$, de modo que

$$P(C^c|E) = 1 - P(A \cap B \cap C) / P(E) = 1 - P(A) \times P(B) \times P(C) / P(E)$$

$$= 1 - 0{,}85 \times 0{,}90 \times 0{,}80 / 0{,}76 = 0{,}19.$$

(b) Outra solução

Dado que o sistema funciona (ocorreu E), certamente A e B ocorreram.

Além disso, pelo menos um dos componentes C e D funciona, ou seja, C ou D funciona (ocorreu $C \cup D$).

Desta forma, $P(C|E) = P(C|C \cup D)$, que é igual a $P(C) / P(C \cup D) = 0{,}81$.

Finalmente, $P(C^c|E) = 1 - P(C|E) = 0{,}19$.