

PIPGEs ICMC – USP/UFSCar
EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1
8ª lista de exercícios

1. X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de uma população $\text{Laplace}(\theta)$, com função densidade $f(x; \theta) = \exp(-|x|/\theta)/(2\theta) I_{\mathbb{R}}(x)$, $\theta > 0$.

(a) Prove que $\sum_{i=1}^n |X_i|$ é suficiente para θ e que $2 \sum_{i=1}^n |X_i|/\theta \sim \chi_{2n}^2$.

(b) Apresente um intervalo de confiança de $100(1 - \alpha)\%$ para θ , indicando como obter o intervalo de amplitude mínima.

2. X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de uma população com função densidade $f(x; \theta) = \exp\{-(x - \theta)\} I_{(\theta, \infty)}(x)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Com base na estatística $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ (é suficiente?), apresente o intervalo de confiança de $100(1 - \alpha)\%$ de amplitude mínima para θ .

3. Uma observação é coletada de uma população com função densidade

$$f(x; \theta) = 2 \frac{x - \theta}{(b_0 - \theta)^2} I_{(\theta, b_0)}(x),$$

sendo que $b_0 > \theta$ é conhecido.

(a) Prove que $(X - \theta)/(b_0 - \theta)$ é uma quantidade pivotal.

(b) Prove que

$$\left[\frac{X - b_0 a_2}{1 - a_2}, \frac{X - b_0 a_1}{1 - a_1} \right]$$

é um intervalo de confiança de $100(1 - \alpha)\%$ para θ , em que a_1 e a_2 são tais que $1 - \alpha = a_2^2 - a_1^2$.

(c) Calcule a amplitude do intervalo acima.

4. Considere $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{normal}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Supondo $\mu = \mu_0$ conhecido, apresente intervalos de confiança de $100(1 - \alpha)\%$ para σ^2 e σ .

(b) Supondo μ desconhecido, apresente intervalos de confiança de $100(1 - \alpha)\%$ para σ^2 e σ .

(c) Nos dois itens anteriores, indique como obter os intervalos de amplitude mínima.

5. Para cada uma das seguintes situações, apresente uma quantidade pivotal com base em uma amostra de tamanho $n = 1$.

(a) $f(x; \theta) = 2(\theta - x)/\theta^2 I_{(0, \theta)}(x)$.

(b) Exercício 2.

(c) $f(x; \theta) = \exp(-x/\theta)/\theta I_{(0, \infty)}(x)$, $\theta > 0$.

(d) $f(x; \theta) = x \exp(-x/\theta)/\theta^2 I_{(0, \infty)}(x)$, $\theta > 0$.

(e) $X \sim \text{normal}(0, \sigma^2)$.