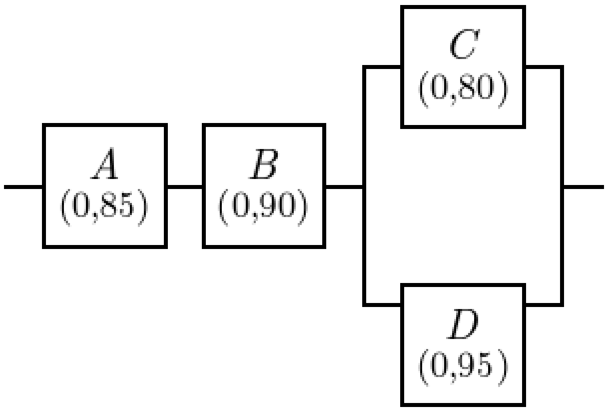
1. Na figura abaixo são apresentados um sistema e as probabilidades de funcionamento de seus componentes.
(a) Calcule a probabilidade de funcionamento do sistema.
(b) Sabendo que o sistema funciona, qual a probabilidade de que o componente C tenha falhado?



Solução. Os eventos A, B, C e D indicam que os respectivos componentes funcionam. Supomos independência entre estes eventos.

Os componentes A e B estão dispostos em série, enquanto que C e D formam um bloco em paralelo.

(a) Definimos o evento E “o sistema funciona”, que pode ser escrito como

$$E = (A \cap B) \cap (C \cup D).$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E) &= \mathrm{P}((A \cap B) \cap (C \cup D)) \\ &= \mathrm{P}(A \cap B)\mathrm{P}(C \cup D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C \cup D) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\{\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(C \cap D)\} \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\{\mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(D) - \mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D)\} = 0{,}85 \times 0{,}90 \times (0{,}80 + 0{,}95 - 0{,}80 \times 0{,}95) \\ &= 0{,}757. \end{aligned}$$

(b) Pede-se $P(C^c \mid E)$.

Calculamos

$$P(C^c \mid E) = \frac{P(C^c \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E \mid C^c)P(C^c)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(A \cap B \cap D)P(C^c)}{P(E)} = \frac{P(A)P(B)P(D)\{1 - P(C)\}}{P(E)}$$

$$= \frac{0,80 \times 0,90 \times 0,95 \times (1 - 0,80)}{0,757} = 0,181.$$

Obs. Sabendo que o sistema funciona (E ocorreu), podemos afirmar que os componentes A e B funcionam. Além disso, C ou D funciona. Portanto, $P(C^c \mid E) = P(C^c \mid C \cup D)$.

2. Uma peça utilizada na montagem de um equipamento é vendida em lotes de 10 unidades. Segundo a experiência do fabricante, um lote é considerado aceitável se contiver até uma peça defeituosa. Alguns lotes passam por inspeção. O plano de inspeção proposto consiste em testar três peças do lote inspecionado sem reposição e aceitar o lote se nenhuma delas for defeituosa. Este plano de inspeção apresenta boas propriedades?

Solução. Uma amostra de n = 3 peças é retirada sem reposição de um lote com N = 10 peças. Definimos X como sendo o número de peças defeituosas na amostra (sucesso: "uma peça é defeituosa"). Assim, se X = 0, o lote é aceito.

Considere um lote inaceitável contendo M = 2 peças defeituosas. Neste caso, X ~ H(N = 10, M = 2, n = 3). Calculamos

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = 0{,}467.$$

Em Excel: =DIST.HIPERGEOM(0;3;2;10).

Um lote inaceitável é aceito com probabilidade $\cong$ 47% (alta).

Considere um lote aceitável contendo M = 1 peça defeituosa. Neste caso, X ~ H(N = 10, M = 1, n = 3). Calculamos

$$P(X = 0) = \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} = 0{,}700.$$

Em Excel: =DIST.HIPERGEOM(0;3;1;10).

Um lote aceitável é aceito com probabilidade = 70% (baixa).

3. Em momentos de pico solicitações de serviço chegam a um posto de atendimento a uma taxa de 1,0 a cada cinco minutos.

(a) Se o posto pode atender a no máximo duas solicitações neste intervalo, qual a probabilidade de que solicitações fiquem sem atendimento?

(b) Previsões indicam que o movimento neste posto poderá duplicar nos próximos anos, ao passo que a capacidade de atendimento poderá ser ampliada em no máximo 50%. Nestas condições, qual a probabilidade de que solicitações fiquem sem atendimento?

Solução. (a) Supomos que o número de solicitações (X) que chegam a cada 5 min é uma v. a. com distribuição de Poisson. Pelo enunciado, a média é $\mu = 1{,}0$, pois a taxa ($\lambda = 1{,}0$ / 5 min) corresponde ao intervalo de tempo da pergunta. A capacidade de atendimento é 2 de solicitações.

Logo, devemos calcular $P(X > 2)$, dada por

$$\mathrm{P}(X > 2) = 1 - \mathrm{P}(0 \leq X \leq 2) = 1 - \{\mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2)\}$$
$$= 1 - \left(e^{-\mu} + e^{-\mu}\mu + \frac{e^{-\mu}\mu^2}{2!}\right) = 0,0803.$$

Em Excel: = 1 – POISSON(2; 1; VERDADEIRO).

Solução. (b) Segundo o enunciado, a média da distribuição passará a ser é $\mu^* = 2\mu = 2,0$.

Por outro lado, a capacidade de atendimento a cada 5 min poderá aumentar em 50%, passando a $1,5 \times 2 = 3$.

Portanto, a probabilidade de que a capacidade de atendimento seja ultrapassada será

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > 3) &= 1 - \mathrm{P}(0 \leq X \leq 3) = 1 - \{\mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3)\} \\ &= 1 - \left(e^{-\mu^*} + e^{-\mu^*}\mu^* + \frac{e^{-\mu^*}\mu^{*2}}{2!} + \frac{e^{-\mu^*}\mu^{*3}}{3!} \right) = 0,1429.\end{aligned}$$

Em Excel: = 1 – POISSON(3; 2; VERDADEIRO).