ICMC – USP
SME 5779 – Inferência Estatística – 2013/1
6ª lista de exercícios

1. Sejam $X \sim \mathsf{normal}(\theta, 1)$ e $T_{a,b}(X) = aX + b$ um estimador de θ, com θ, a e $b \in \mathbb{R}$.
(a) Calcule o EQM de $T_{a,b}(X)$. (b) Represente graficamente os EQM's de $T_{1/2,0}(X)$ e $T_{1,0}(X)$ em função de θ. Pode ser afirmado que um estimador é uniformemente melhor do que o outro (em termos de EQM)?

2. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{uniforme}([\theta_1, \theta_2])$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)' \in \mathbb{R}^2$, com $\theta_1 < \theta_2$,.
(a) Prove que $T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})'$ é uma estatística suficiente para $\boldsymbol{\theta}$, em que $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ e $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$. (b) Pode ser provado que $T(\boldsymbol{X})$ é completa. Apresente um ENVVUM de $q(\boldsymbol{\theta}) = (\theta_1 + \theta_2)/2$.

3. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$. Apresente o ENVVUM de $q(\theta) = P_\theta(X = 1)$.

4. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Bernoulli}(\theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 1$. Para $n \geqq 4$, tome $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4$ pertencentes ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prove que $X_{j_1} X_{j_2} X_{j_3} X_{j_4}$ é um estimador não-viesado de θ^4. Este estimador é um ENVVUM de θ^4? Se não for, obtenha um ENVVUM de θ^4. Sua solução é única?

5. A variável aleatória X tem distribuição binomial truncada (em 0) com função massa de probabilidade
$$f(x; \theta) = \frac{\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}}{1 - (1-\theta)^n} \, I_{\{1,2,\ldots,n\}}(x).$$
(a) Prove que X é uma estatística suficiente e completa para θ. (b) Apresente a função $q(\theta)$ para a qual X/n é o ENVVUM.

6. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{normal}(\mu, \sigma^2)$, $n \geqq 2$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $0 < \sigma^2 < \infty$. Prove que $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$, embora seja uma estatística suficiente para $(\mu, \sigma^2)'$, não é completa.

7. Para cada uma das distribuições abaixo, seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória. Existe uma função $q(\theta)$ para a qual existe um estimador não viesado cuja variância é igual à cota inferior de Cramér-Rao? Se existir, apresente $q(\theta)$; se não existir, justifique.
(a) $f(x; \theta) = \theta \, x^{\theta - 1} \, I_{(0,1)}(x), \theta > 0.$ (b) $f(x; \theta) = \dfrac{\log \theta}{\theta - 1} \theta^x \, I_{(0,1)}(x),\ \theta > 1.$

8. Seja $X \sim \mathsf{binomial}(n, \theta)$, $0 \leqq \theta \leqq 1$, $n > 1$.
(a) Prove que $X(n - X)/\{n(n-1)\}$ é o ENVVUM de $q(\theta) = \theta(1 - \theta)$. (b) O que representa $q(\theta)$?

9. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{gama}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, α e β desconhecidos. Apresente o ENVVUM de α/β.

10. Prove que em uma família exponencial uniparamétrica na forma canônica, $f_0(x; \eta) = [\exp\{\eta \, T(x) + d_0(\eta) + S(x)\}] \, I_A(x)$, a informação de Fisher de η é dada por $\mathcal{I}(\eta) = -\, d_0''(\eta)$.