## $3^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS DE PROBABILIDADE II - SME0801

*Professora Juliana Cobre*

### Entregar Exercícios 1 e 2

**Exercício 1.** Se $X$ tem distribuição *Weibull*$(\alpha, \beta)$, então dizemos que $Y = \log(X)$ tem distribuição Gumbel. Encontre a função densidade de probabilidade de $Y$. Calcule $\mathrm{E}(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

**Exercício 2.** Se $X$ tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, então dizemos que $Y = \mathrm{e}^X$ tem distribuição log-normal. Prove que a função densidade de probabilidade de $Y$ é dada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(y)-\mu]^2}, \; y > 0 \\ 0, \; y \leq 0 \end{cases}.$$

Prove também que $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}$ e $\mathrm{Var}(Y) = (\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2})(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1)$.

**Exercício 3.** Mostre que, sendo $a$ e $b$ constantes quaisquer, $\mathrm{E}(aX + b|Y) = a\mathrm{E}(X|Y) + b$.

**Exercício 4.** Se $Y \sim$ *Bernoulli*$(p)$, $\mathrm{E}(X|Y = 0) = 1$ e $E(X|Y = 1) = 2$, obtenha $\mathrm{E}(X)$.

**Exercício 5.** A densidade conjunta de $X$ e $Y$ é dada por $f_{X,Y}(x, y) = (x + y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$. Determine $\mathrm{E}(X|Y)$ e $\mathrm{E}(Y|X)$.

**Exercício 6.** Mostre que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X|Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X|Y)],$$

supondo que as esperanças e as varianças envolvidas sejam finitas.

**Exercício 7.** Demonstre para o caso discreto que $\mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)] = E(X)$.

**Exercício 8.** Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y)I_{(0,2)}(x)I_{(2,4)}(y).$$

**(a)** Obtenha $\mathrm{E}(Y|X = x)$ e $\mathrm{Var}(Y|X = x)$.
**(b)** Verifique que $E(Y) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|X)]$.
**(c)** Calcule $\mathrm{E}(XY|X = x)$.

**Exercício 9 (Opcional).** Suponha que dois times participam de um campeonato de jogos independentes, o time A vence com probabilidade $p$ e então o time B com probabilidade $1 - p$. O vencedor do campeonato é o primeiro time que ganhar quatro jogos. Encontre o valor esperado do número de jogos até que haja um ganhador, e calcule este valor quanto $p = 1/2$.

**Exercício 10.** Um estudante dirige até a escola e encontra um semáforo. Esse semáforo fica verde por 35 segundos, amarelo por cinco segundos e vermelho por 60 segundos. Assuma que o estudante vá para a escola todos os dias da semana entre 8h e 8h30. Sejam $X_1$ o número de vezes que ele encontra o farol verde, $X_2$ o número de vezes que ele encontra o farol amarelo e $X_3$ o número de vezes que ele encontra o farol vermelho. Determine a distribuição conjunta de $X_1$, $X_2$ e $X_3$.

**Exercício 11.** De acordo com a publicação *USA Today* (18 de março de 1997), de quatro milhões de trabalhadores, 5,8% têm teste positivo para o uso de drogas. Destes 22,5% são usuários de cocaína e 54,4% são usuários de maconha.

**(a)** Qual é a probabilidade de que, de dez trabalhadores com teste positivo para drogas, dois sejam usuários de cocaína, cinco de maconha e três de outras drogas?
**(b)** Qual é a probabilidade de que, de dez testados, todos sejam usuários de maconha?
**(c)** Qual é a probabilidade de que, de dez testados, nenhum seja usuário de cocaína?

**Exercício 12.** A vida útil, em horas, de uma broca de perfuração em uma operação mecânica tem distribuição Weibull com $\alpha = 2$ e $\beta = 50$. Determine a probabilidade de que a broca falhará antes de dez horas de uso. Seria adequado o uso da distribuição exponencial neste cenário?

**Exercício 13.** O tempo, em segundos, que um usuário de computador leva para ler seus emails é distribuído como uma variável aleatória log-normal, com $\mu = 1,8$ e $\sigma^2 = 4,0$.

**(a)** Qual é a probabilidade de que o usuário leia seus emails por mais de 20 segundos? E por mais de 1 minuto?
**(b)** Qual é a probabilidade de que o usuário leia seus emails por um período que é igual à média da distribuição log-normal?

**Exercício 14.** Sejam $X_1$ e $X_2$ variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Faça-se $Z(t) = X_1 \cos(\omega t) + X_2 \mathrm{sen}(\omega t)$. Esta variável interessa ao estudo de sinais aleatórios. Seja $V(t) = dZ(t)/dt$. (Supõe-se que $\omega$ seja constante.)

**(a)** Qual é a distribuição de probabilidade de $Z(t)$ e $V(t)$, para qualquer $t$ fixado?
**(b)** Mostre que $Z(t)$ e $V(t)$ são não-correlacionados. [Comentário: podemos mostrar que são independente, mas isso é mais difícil.]

**Exercício 15.** Suponha que $X$ tenha distribuição $N(0, 25)$. Calcule $P(1 < X^2 < 4)$

**Exercício 16.** Mostre que a variância de $S^2$, para amostras aleatórias de tamanho $n$ de uma população norma, decresce conforme $n$ se torna maior. [Sugestão: Primeiro determine a variância de $(n - 1)S^2/\sigma^2$.]

**Exercício 17.** Se $S_1^2$ e $S_2^2$ representam as variâncias de amostras aleatórias independentes de tamanho $n_1 = 8$ e $n_1 2$, retiradas de populações normais com variâncias iguais, determine $P(S_1^2/S_2^2 < 4,89)$.

**Exercício 18.** Um dos motivos da importância da distribuição $F$ é o seguinte: Suponha que $X$ e $Y$ sejam variáveis aleatórias independentes com distribuições $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente. Sejam $X_1, \ldots, X_{n_1}$ e $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ amostras aleatórias de $X$ e $Y$, respectivamente. Então a estatística $C \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$ tem uma distribuição $F$, para uma escolha apropriada de $C$. Verifique isso e determine $C$. Quais são os graus de liberdade associados a esta distribuição?

**Exercício 19.** Suponha que a variável aleatória $t$ tenha distribuição $t$ de Student com 1 grau de liberdade. Qual será a distribuição de $t^2$?