2. INTRODUÇÃO À PROBABILIDADE

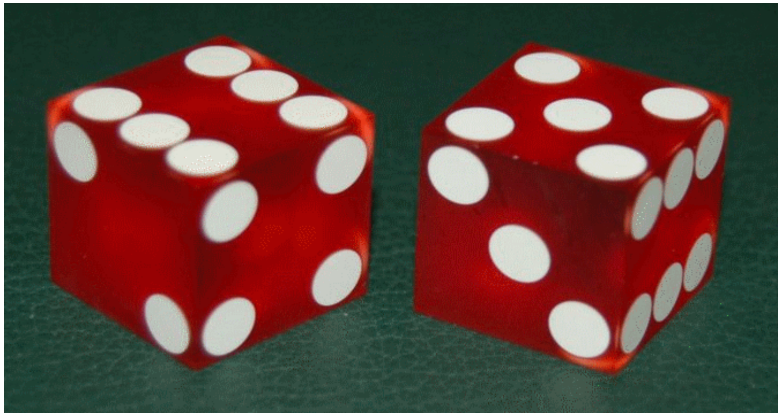
2010

Conceitos básicos

Experimento aleatório ou fenômeno aleatório

Situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Um experimento ou fenônemo que, se for observado em condições idênticas, pode apresentar diferentes resultados é chamado de experimento ou fenômeno aleatório.



Conceitos básicos

Exemplos

- Condições climáticas do próximo domingo.
- Taxa de inflação do próximo mês.
- Condição de um item produzido.
- Resultado do lançamento de um dado.
- Tempo de duração de uma lâmpada.
- Observação do número de veículos que passam por um praça de pedágio durante um certo intervalo.
- Tábua de Galton:

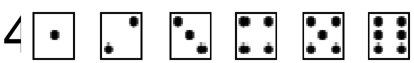
  http://www.mathsisfun.com/probability/quincunx.html

  http://www.jcu.edu/math/isep/Quincunx/Quincunx.html

Espaço amostral (Ω)

Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno aleatório.

Exemplos

- Lançamento de um dado: Ω = {1,2,3,4 = { }
- Observação do tipo sanguíneo de um indivíduo: Ω = {A, B, AB,0}
- Condição de um item produzido: Ω = {defeituoso, não defeituoso}
- Número de veículos que passam por uma praça de pedágio durante um certo intervalo: Ω = {0, 1, 2, ...}
- Tempo de duração de uma lâmpada (em h): $\Omega = (0, \infty)$

Exemplo

Lançamento de um dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento

Subconjunto do espaço amostral Ω.

Notação: A, B, C,...

Exemplos. Eventos do exemplo acima:

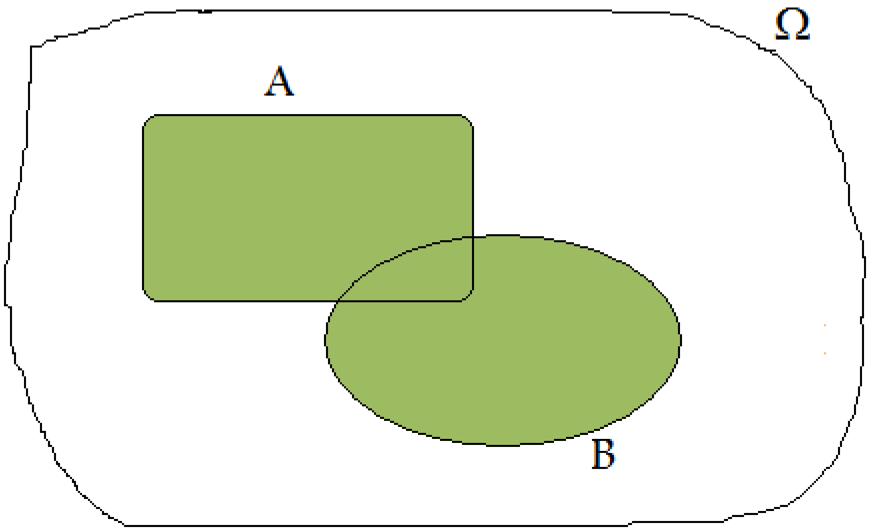
- Resultado é par: $A = \{2, 4, 6\}$ (evento composto)
- Resultado é maior do que 3: $B = \{4, 5, 6\}$ (evento composto)
- Resultado igual a 1: $C = \{1\}$ (evento simples)
- Resultado maior do que 6: $D = \varnothing$ (evento impossível)
- Resultado menor do que 7: $D = \Omega$ (evento certo)

Operações com eventos

A e B são eventos de Ω

- $A \cup B$: união dos eventos A e B

Ocorrência de pelo menos um dos eventos A e B.



Operações com eventos

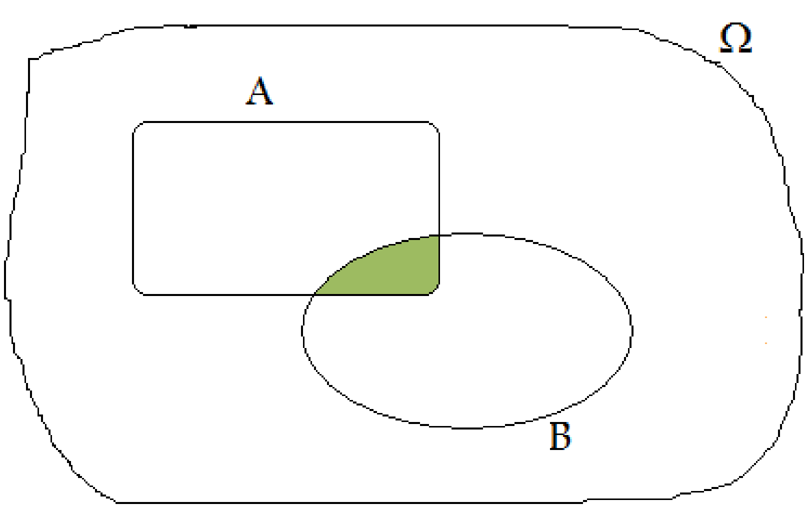
- $A \cap B$: intersecção dos eventos A e B

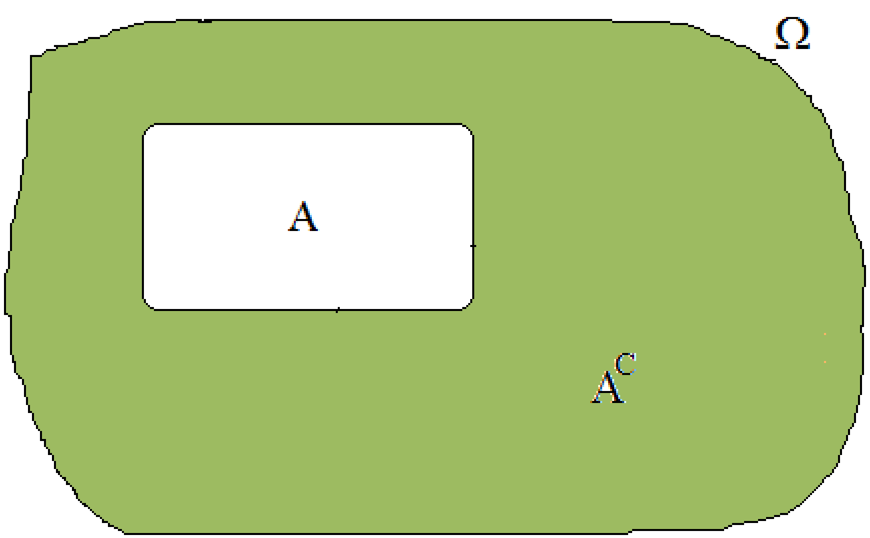
Ocorrência simultânea dos eventos A e B.

- A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

- A e B são complementares se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.

- O complementar de um evento A é representado por A^C ou $\overline{A}$





Definições de probabilidade

Probabilidade clássica ou *a priori*

Se um experimento aleatório tiver n(Ω) resultados mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e, se um evento A tiver n(A) desses resultados, a probabilidade do evento A, representada por P(A), é dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo. Lançamento de dois dados balanceados. Calcular a probabilidade de

b) se obter soma das faces igual a 7,

c) se obter soma maior do que 5,

d) que o resultado do primeiro dado seja maior do que o resultado do segundo.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{matrix} \right\}$$

- A = {(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(6,1)}

$\Rightarrow$ P(A) = n(A) / n(Ω) = 6 /36=1/6

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{array} \right\}$$

B

b) P(B) = 26/36.

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 1,1 & 1,2 & 1,3 & 1,4 & 1,5 & 1,6 \\ 2,1 & 2,2 & 2,3 & 2,4 & 2,5 & 2,6 \\ 3,1 & 3,2 & 3,3 & 3,4 & 3,5 & 3,6 \\ 4,1 & 4,2 & 4,3 & 4,4 & 4,5 & 4,6 \\ 5,1 & 5,2 & 5,3 & 5,4 & 5,5 & 5,6 \\ 6,1 & 6,2 & 6,3 & 6,4 & 6,5 & 6,6 \end{matrix} \right\}$$

C

c) P(C) = 15/36.

Definições de probabilidade

Probabilidade frequentista ou *a posteriori*

Um experimento é realizado n vezes (n "grande"). O evento A ocorre exatamente n(A) vezes ($0 \leq n(A) \leq n$) . A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A, ou seja,

$$\mathbf{f}_r(A) = \frac{n(A)}{n}$$

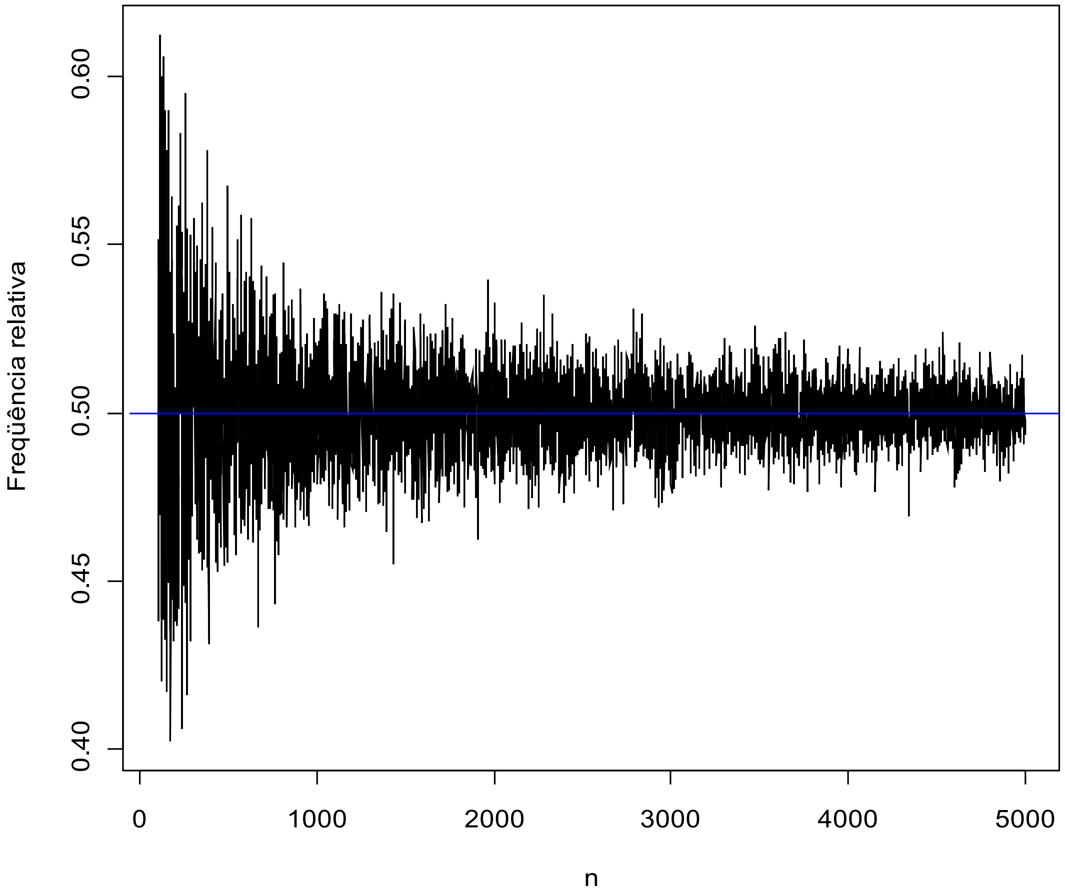
Quando $n \to \infty$, $f_r(A)$ se aproxima de P(A).

Exemplo. Lançamento de uma moeda balanceada. Calcular a probabilidade de A = {resultado obtido é cara}.

	fr_1	fr_2	fr_3	fr_4	...	P(A)
Cara	2/5	6/10	22/50	47/100	...	0,5
n	5	10	50	100	...	∞

Um exemplo em R

```
> p0 = 1/2 # Moeda balanceada
> n = 100:5000
> fr = mapply(function(x) sum(rbinom(x,1,p0))/x, n)
> plot(n, fr, ylab="Freqüência relativa", type = "l")
> abline(h = p0, lty=2, col="blue")
```



Definições de probabilidade

Definição axiomática

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número P(A) satisfazendo aos seguintes axiomas:

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \ \forall A \subset \Omega$,

(ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Propriedades

1. $P(\phi) = 0$.

2. Se $A \subset \Omega$, então $P(A) = 1 - P(A^c)$.

3. Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$.

4. Se $A, B \subset \Omega$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

5. Se $A, B, C \subset \Omega$, então

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Probabilidade condicional e independência

A e *B são* dois eventos em um mesmo espaço amostral Ω. A probabilidade condicional de *A* dado que ocorreu o evento *B*, denotada por *P(A|B)*, é definida como

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{se } P(B) > 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Exemplo. Selecionamos dois itens, ao acaso, um a um e sem reposição, de um lote que contém 10 itens do tipo A e 5 do tipo B. Qual é a probabilidade de que

(a) o primeiro item seja do tipo A?

(b) o segundo seja do tipo B se o primeiro item foi do tipo A?

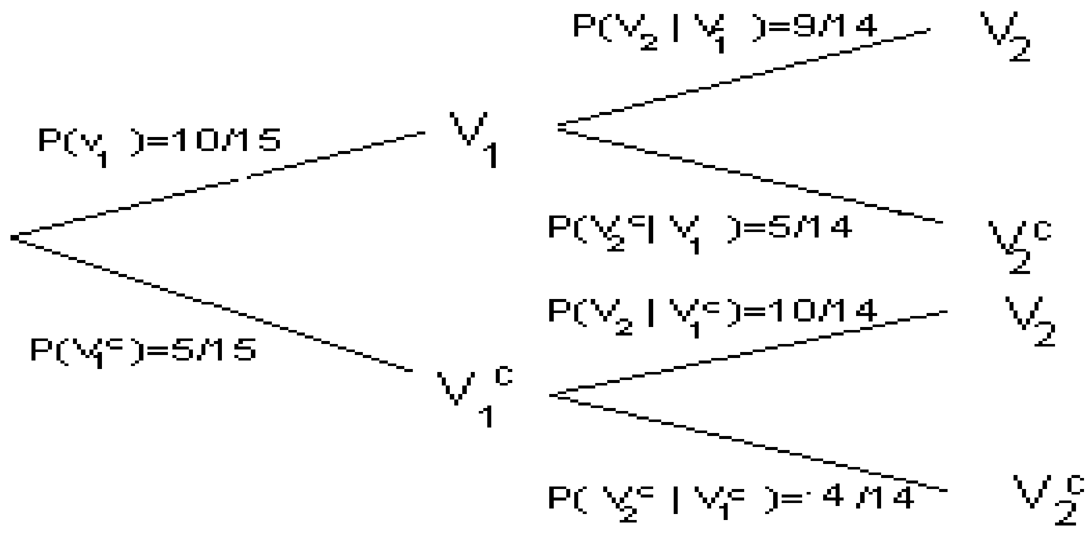
Definimos os eventos

$$V_1 : \text{"o 1º item é do tipo A"};$$
$$V_2 : \text{"o 2º item é do tipo A"}$$

(a) $$P(V_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

(b) $$P(V_2^c \mid V_1) = \frac{5}{14}$$

Essas probabilidades podem ser representados em uma árvore de probabilidades.



Da expressão (1) obtém-se uma relação útil:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B),$$

conhecida como regra do produto de probabilidades ou probabilidade da interseção.

Exemplo. No exemplo anterior suponha que temos interesse em determinar a probabilidade de que os dois itens selecionados sejam do tipo B.

$$\text{O evento é } V_1^c \cap V_2^c : \text{"o 1º e o 2º itens são do tipo B"}$$

$$\mathrm{P}(V_1^c \cap V_2^c) = P(V_1^c)P(V_2^c \mid V_1^c) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

Resultado. Se B é um evento em Ω tal que P(B) >0, então

$1. P(\phi \mid B) = 0$

$2. \text{Se A} \subset \Omega, \text{então } \mathrm{P}(\mathrm{A}^c \mid B) = 1 - P(A \mid B) \text{ ou } P(A \mid B) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}^c \mid B)$

$3. Se\, A, C \subset \Omega, \text{então}$

$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B).$

Exemplo. Um representante avalia que sua probabilidade de realizar um bom negócio em um certo dia é 0,35 e a probabilidade de realizar bons negócios em dois dias consecutivos é 0,25.

Se um bom negócio foi realizado no primeiro dia, qual a probabilidade de que no dia seguinte não seja realizado um bom negócio ?

Solução. Definimos os eventos A: "um bom negócio é realizado no 1º dia" e B: " um bom negócio é realizado no 2º dia".

Do enunciado do problema temos $P(A) = 0,35$ e $P(A \cap B) = 0,25$. A probabilidade pedida é

$$P(B^c \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{0,25}{0,35} = 0,286.$$

Independência de eventos

Dois eventos A e B em Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é,

$$P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo. Em uma fábrica 20% dos lotes produzidos têm componentes do fornecedor A, 8% têm componentes do fornecedor V e 4% têm componentes de ambos. Selecionamos ao acaso um item produzido nesta fábrica.

(a) Os eventos relacionados aos dois fornecedores são independentes?

(b) Se o lote selecionado tem componentes do fornecedor V, qual a probabilidade de que tenha componentes do fornecedor A?

(c) Qual é a probabilidade de um lote não ter componentes destes dois fornecedores?

Solução. A: “o lote tem componentes do fornecedor A”, V: “o lote tem componentes do fornecedor V”.

Do enunciado temos P(A) = 0,20, P(V) = 0,08 e P(A $\cap$ V) = 0,04.

$(a)\ P(V)P(A) = 0{,}08 \times 0{,}2 = 0{,}016$ e

$P(V \cap A) = 0{,}04.$

Como $P(V \cap A) \neq P(V)P(A)$, A e V não são independentes.

$$(b)\ P(A \mid V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}04}{0{,}08} = 0{,}50.$$

$$(c)\ P((V \cup A)^c) = 1 - P(V \cup A)$$

$$= 1 - \{P(V) + P(A) - P(V \cap A)\}$$

$$= 1 - (0{,}08 + 0{,}2 - 0{,}04) = 0{,}76.$$

Resultado. Se A e B são eventos independentes em Ω, então

$(i)\ A\ \ e\ \ B^c$ são independentes.

$(ii)\ A^c\ \ e\ \ B$ são independentes

(iii) $A^c\ \ e\ \ B^c$ são independentes

Exemplo. Um atirador acerta 80% de seus disparos e outro (nas mesmas condições de tiro), 70%. Qual a probabilidade de o alvo ser acertado se ambos os atiradores dispararem simultaneamente?

$$\text{Eventos}: \mathrm{B}_i : \text{"o atirador } i \text{ acerta o alvo"}, \mathrm{i} = 1{,}2.$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_1) = 0{,}8 \text{ e } \mathrm{P}(B_2) = 0{,}7. \text{ Logo,}$$

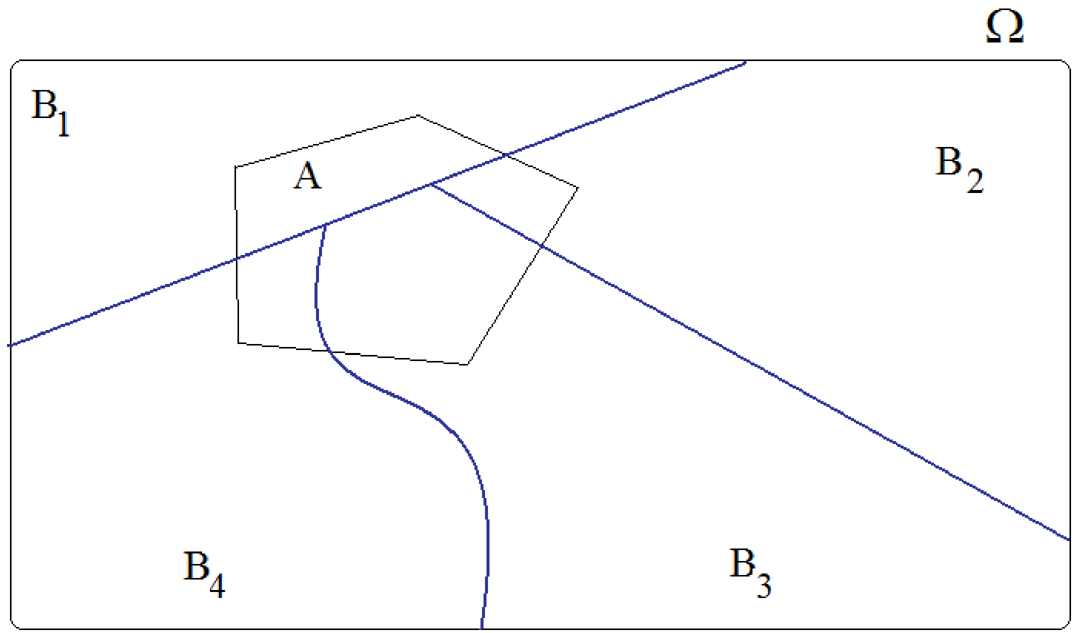
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_1 \cup B_2) &= \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_2) - \mathrm{P}(B_1 \cap B_2) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{B}_2) - \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)P(\mathrm{B}_2) \text{ (supondo independência)} \\ &= 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}94.\end{aligned}$$

Outra solução:

$$\begin{aligned}P(B_1 \cup B_2) &= 1 - P((B_1 \cup B_2)^c) = 1 - P(B_1^c \cap B_2^c) = 1 - P(B_1^c)P(B_2^c) \\ &= 1 - \left[1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\right]\left[1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}_2)\right] = 1 - [1 - 0{,}8][1 - 0{,}7] = 0{,}94.\end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Partição do espaço amostral. Uma coleção de eventos $B_1,\ldots,B_k$ forma uma partição do espaço amostral se eles são mutuamente exclusivos e se sua união é igual ao espaço amostral.



Fórmula da probabilidade total. Se $B_1,\ldots,B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω, então para qualquer evento A em Ω, vale

$$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + \cdots + P(B_k)P(A \mid B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i).$$

Exemplo. Em um programa de televisão são mostradas três portas (1, 2 e 3) fechadas e apenas uma delas guarda um valioso prêmio. O apresentador do programa sabe qual é a porta que leva ao prêmio. Um participante deve escolher uma das portas.

Em seguida, o apresentador informa o número de uma porta, diferente da escolha do participante, e que não guarda o prêmio.

O participante escolhe a porta 1. O apresentador informa que a porta 3 **não** guarda o prêmio e pergunta ao participante se ele gostaria de mudar sua escolha.

Se você fosse o participante, qual seria sua decisão? Vale a pena mudar a escolha?

Solução. Eventos:

X_i: "a porta número i guarda o prêmio" e Y_j: "apresentador informa que a porta número j **não** guarda o prêmio".

Observe que $P(X_1) = P(X_2) = P(X_3) = 1/3$. A pergunta pode ser respondida comparando $P(X_1|Y_3)$ e $P(X_2|Y_3)$, pois $P(X_3|Y_3) = 0$.

Levando em conta que o participante escolheu a porta 1, temos
$P(Y_2|X_1) = P(Y_3|X_1) = ½$, $P(Y_2|X_2) = P(Y_3|X_3) = 0$ e
$P(Y_2|X_3) = P(Y_3|X_2) = 1$, de modo que

$P(Y_3) = P(Y_3|X_1)\ P(X_1) + P(Y_3|X_2)\ P(X_2) + P(Y_3|X_3)\ P(X_3)$
$= ½ \times 1/3 + 1 \times 1/3 + 0 \times 1/3 = ½$,
$P(X_1|Y_3) = P(X_1 \cap Y_3)/P(Y_3) = P(Y_3|X_1)\ P(X_1)/P(Y_3) = (1/2x1/3)/1/2$
$= 1/3$ e

$P(X_2|Y_3) = P(X_2 \cap Y_3)/P(Y_3) = P(Y_3|X_2)\ P(X_2)/P(Y_3) = (1x1/3)/1/2$
$= 1/3\ /\ 1/2 = 2/3$.

Vale a pena mudar a escolha!

Fórmula de Bayes. Se $B_1,\ldots,B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω , e A é evento em Ω com $P(A) > 0$, então

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}.$$

Exemplo. Uma montadora trabalha com dois fornecedores (A e B) de uma determinada peça. Sabe-se que 10% e 5% das peças proveniente dos fornecedores A e B, respectivamente, estão fora das especificações. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% de B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhida ao acaso,

(a) calcule a probabilidade de que ela esteja fora das especificações.

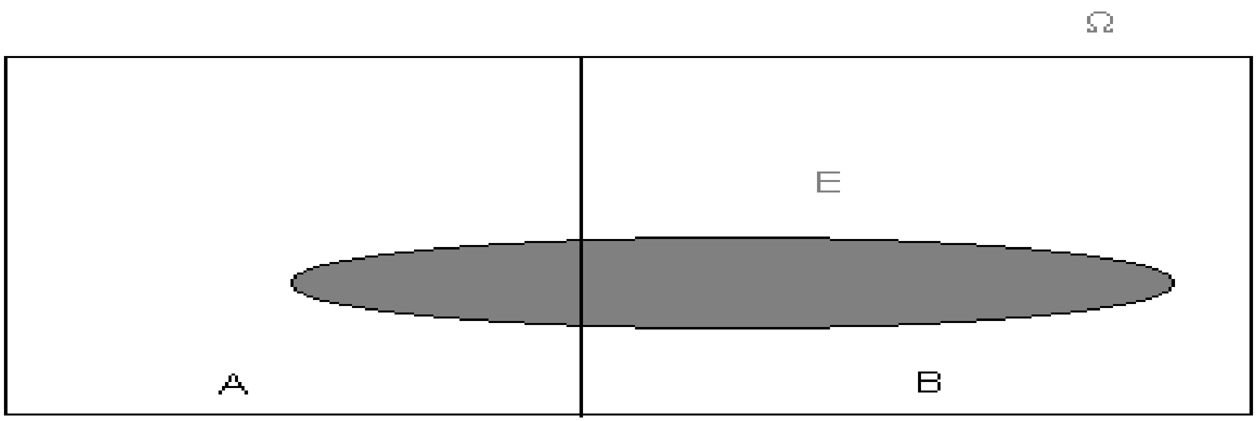
(b) se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade de que tenha sido fornecida por A ?

Solução. Eventos:

A: “ peça selecionada foi fornecida por A”,

B:” peça selecionada foi fornecida por B” e

E:”peça selecionada não atende às especificações”.



Do enunciado do problema temos P(A) = 0,30, P(B) = 0,70, P(E|A) = 0,10 e P(E|B) = 0,05.

(a) Fórmula da probabilidade total:

P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) = 0,30 $\times$ 0,10 + 0,70 $\times$ 0,05 = 0,065.

(b) P(A|E) = ?

Pela fórmula de Bayes,

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B)} = \frac{0,30 \times 0,10}{0,30 \times 0,10 + 0,70 \times 0,05} = \frac{0,03}{0,065} = 0,46.$$

A solução do exemplo anterior é facilitada pela árvore de probabilidades: