Estrutura de Dados III

GRAFOS – Conceitos Básicos

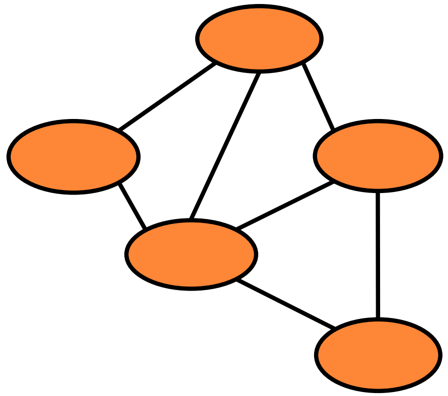
Profa. Elaine Parros Machado de Sousa
alterações: Cristina Dutra de Aguiar Ciferri

Material baseado em aulas dos professores:
Gustavo Batista, Robson Cordeiro, Moacir Ponti Jr. e
Maria Cristina Oliveira.

ICMC USP
SÃO CARLOS

Como modelar problemas que envolvam conjuntos de objetos e relacionamentos entre pares de objetos estabelecidos por conexões?

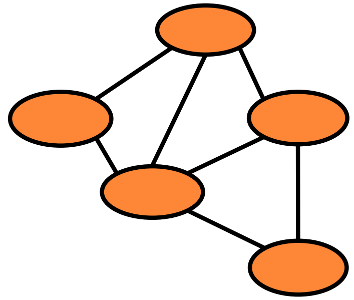
MOTIVAÇÃO...



- **Grafos**
  - estruturas abstratas que modelam objetos e a relação (conexão) entre eles

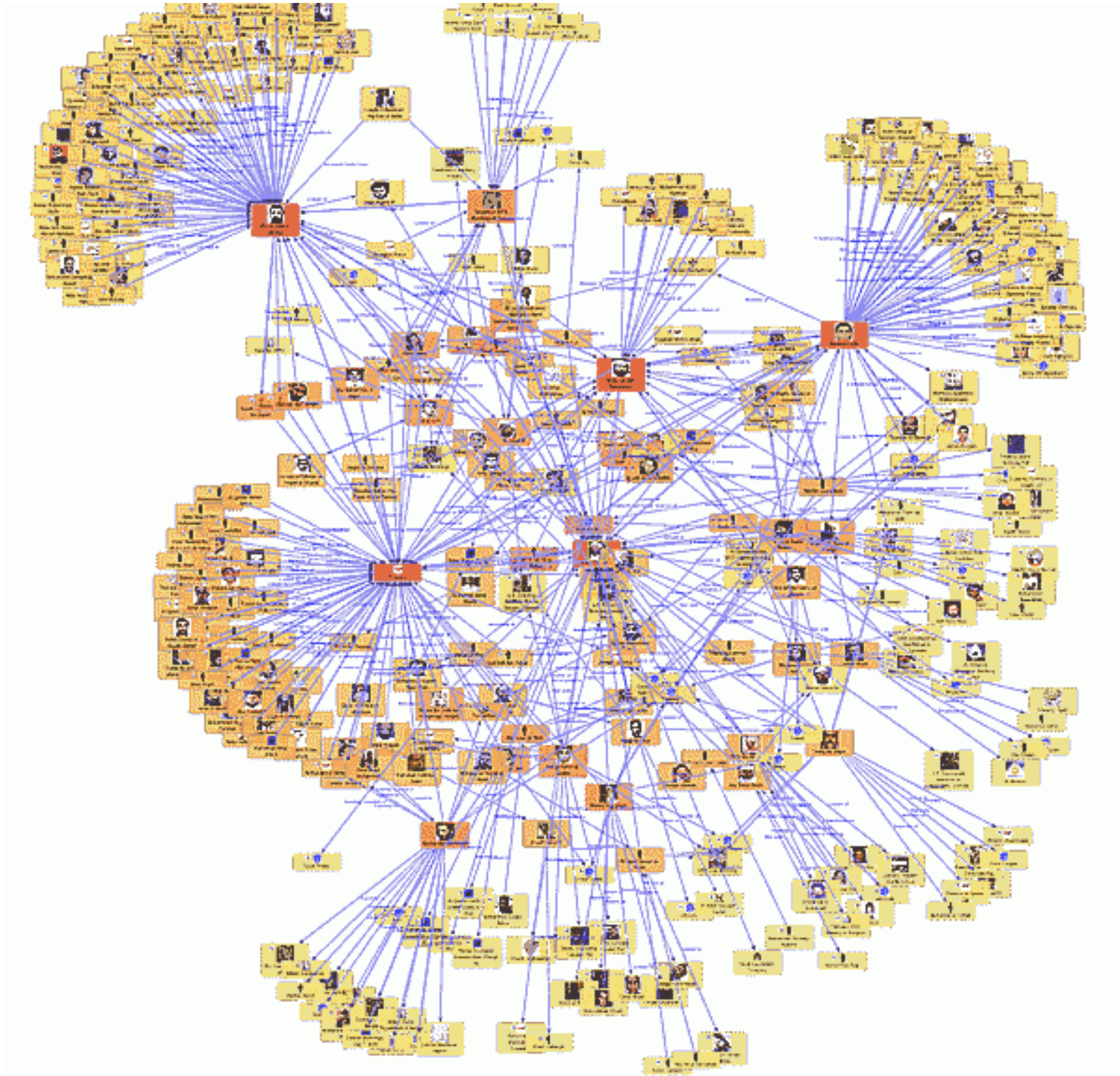
- **Teoria dos Grafos**
  - área de matemática combinatória voltada à resolução de problemas em computação

MOTIVAÇÃO...



- Exemplos de problemas práticos que podem ser modelados com grafos:
  - redes sociais
  - máquinas de busca na web
  - roteiros de viagens
  - modelagem de circuitos eletrônicos
  - redes de transporte
  - redes de energia
  - redes de computadores
  - árvores genealógicas
  - ...

EXEMPLO: REDE SOCIAL



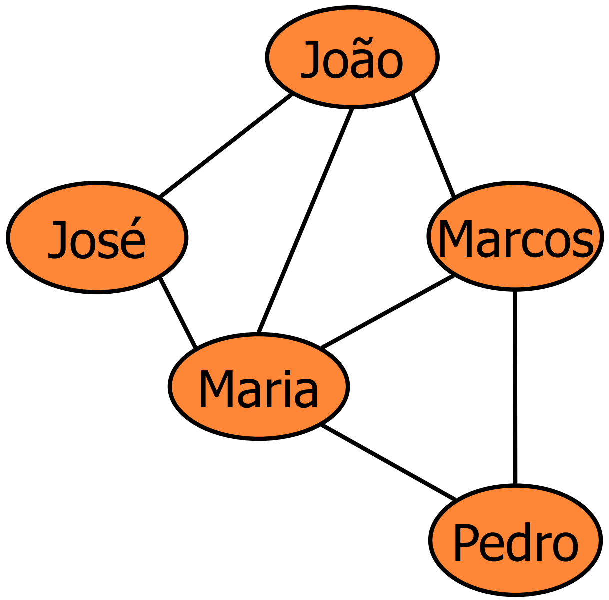
Exemplo: Roteiro de viagem aérea

EXEMPLO: CONEXÕES DA RNP

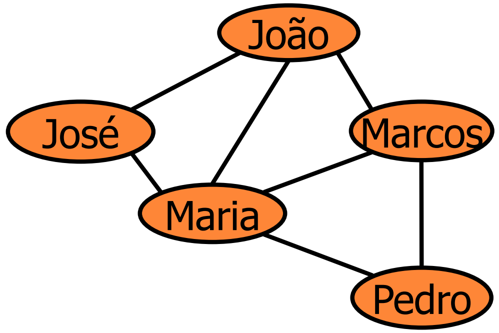
O QUE É UM GRAFO?

- **Grafo G** definido como um par (***V, A***) :
  - ***V*** : conjunto de nós chamados **vértices** (ou nós).
  - ***A*** : conjunto de pares de vértices chamados **arestas** (ou arcos).

- Exemplo:
  - Rede social de amizade
    - cada vértice é uma pessoa.
    - existe uma aresta entre duas pessoas se e somente se essas pessoas são amigas.



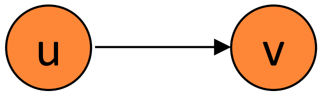
Grafo sobre Amizade



- Se eu sou seu amigo, isso significa que você é meu amigo?
  - Se aresta (*x*,*y*) sempre implica em (*y*,*x*) **=>** grafo **não-direcionado**
  - Caso contrário **=>** grafo **direcionado** (ou **dígrafo**).
- Eu sou amigo de mim mesmo?
  - Aresta (*x*,*x*) **=>** **laço** ou ***self-loop***.
- Eu posso ser seu amigo diversas vezes?
  - relação modelada com **arestas múltiplas** ou **paralelas**.

DEFINIÇÃO – GRAFO DIRECIONADO (Dígrafo)

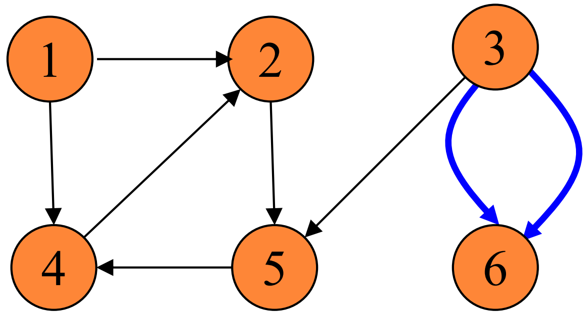
- Um **grafo direcionado (grafo orientado ou dígrafo)** *G* é um par *(V,A)*, em que:
  - *V* é um conjunto finito de vértices
  - *A* é um conjunto de arestas
    - relação binária ordenada em *V*
- Uma aresta *(u,v)* sai do vértice ***u*** (origem) e chega no vértice ***v*** (destino)



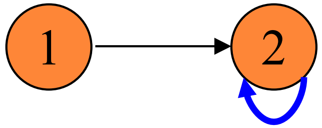
- Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo **=>** ***self-loops***.
- Podem existir arestas com mesma origem e mesmo destino **=>** ***arestas* múltiplas**.

GRAFOS DIRECIONADOS (DÍGRAFOS)

- G =(V,A)
  - V = {1,2,3,4,5,6} e
  - A = {(1,2),(1,4),(2,5),(4,2),(5,4),
    (3,5),(3,6), (3,6)}



- G = (V,A)
  - V = (1,2) e
  - A = {(1,2),(2,2)}



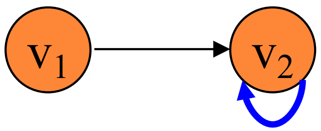
Grafos Direcionados
Vértices Adjacentes

- Em um grafo direcionado, se existe uma aresta *(u,v)*
  - o vértice *v* é **adjacente** ao vértice *u*
  - a aresta **sai** do vértice *u* (origem)
  - a aresta **chega** no vértice *v* (destino)
  - a existência de (*u*,*v*) **não implica** na existência de (*v*,*u*), ou seja o vértice *u* **não é adjacente** ao vértice *v*
  - os vértices *u* e *v* são **vizinhos**

v_1 é adjacente a v_2 ? NÃO

v_2 é adjacente a v_1 ? SIM

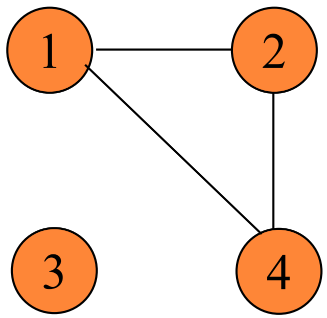
v_1 e v_2 são vizinhos ? SIM



DEFINIÇÃO – GRAFO NÃO DIRECIONADO

- Um **grafo não direcionado** *G* é um par *(V,A)*, em que o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados
  - *(u,v)* e *(v,u)* são considerados como uma única aresta
  - a relação de **adjacência** é **simétrica**
  - ***self-loops*** não são permitidos

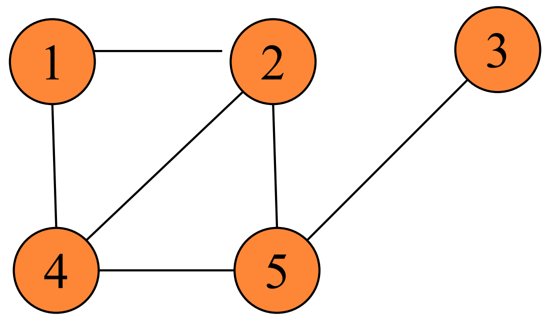
grafo simples: não possui laços ou arestas múltiplas



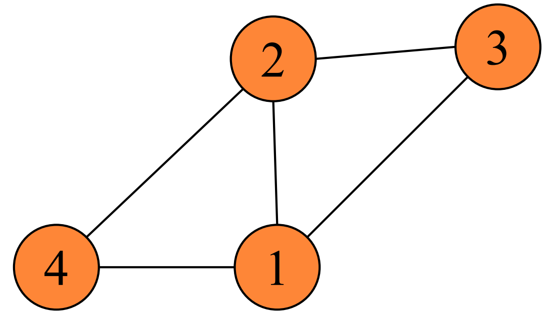
- G = (V,A)
  - V = {1, 2, 3, 4}
  - A = {(1,2),(1,4),(2,4)}

Grafos Não Direcionados

- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4,5} e
  - A = {(1,2),(1,4),(2,4),(2,5),(3,5),(4,5)}

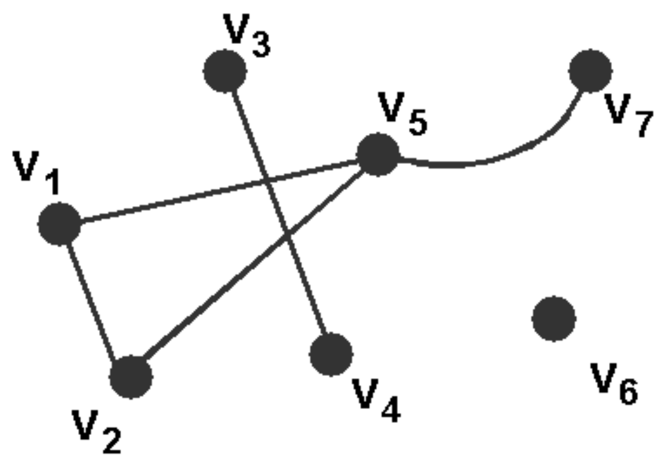


- G = (V,A)
  - V = {1,2,3,4} e
  - A = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)}



GRAFOS NÃO DIRECIONADOS
VÉRTICES ADJACENTES

- Dois vértices *u* e *v* de um grafo não direcionado são **adjacentes** (ou vizinhos) quando eles forem os extremos de uma mesma aresta (*u*,*v*).



v_3 é adjacente a v_4 ? SIM

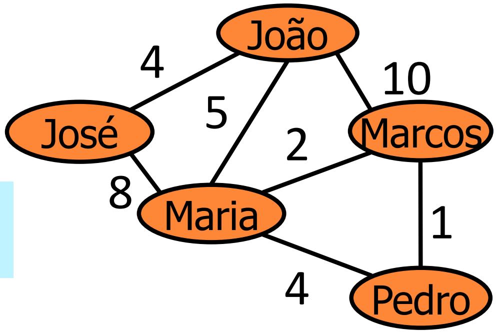
v_4 é adjacente a v_3 ? SIM

v_5 é adjacente a v_4 ? NÃO

A aresta (v_3,v_4) é dita incidente a v_3 e a v_4

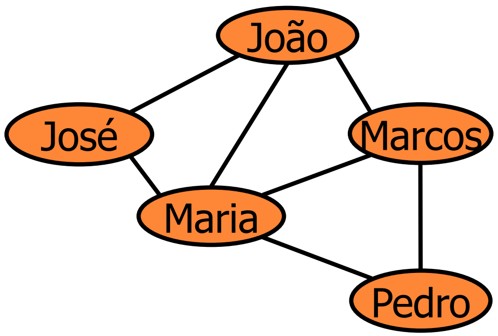
GRAFO SOBRE AMIZADE

- O quanto você é meu amigo?
  - **Grafo ponderado =>** as arestas possuem um peso (valor numérico) associado.



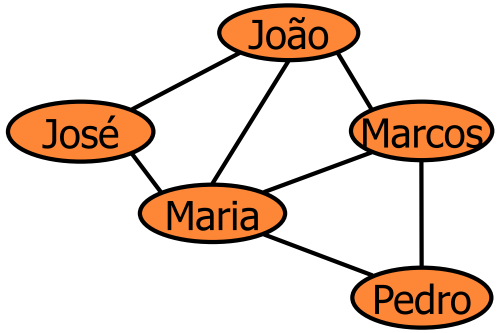
arestas: *triplas (u, v, valor)*

  - **Grafo não ponderado =>** todas as arestas possuem um mesmo peso.



arestas: *duplas (u, v)*

GRAFO SOBRE AMIZADE



- Quem possui mais (ou menos) amigos?
  - Quantidade de relacionamentos (conexões)
  - **Grau** do vértice **=>** número de vértices adjacentes a ele.
    - Pessoa mais popular tem o vértice de maior grau
    - “Ermitões” são vértices de grau zero.

vértice isolado: vértice de grau 0
vértice final: vértice de grau 1
vértice par: vértice com grau par
vértice ímpar: vértice com grau ímpar

DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

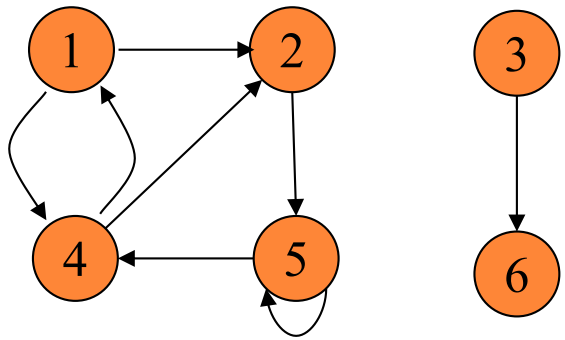
- O **grau** de um vértice em **grafos direcionados** é dado por:

  número de arestas que saem dele (***grau de saída ou out-degree***)

  +

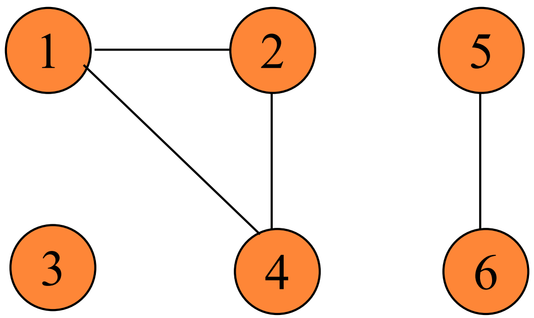
  número de arestas que chegam nele (***grau de entrada ou in-degree***).

  - Ex: vértice 5 tem:
    - grau de entrada = 2
    - grau de saída = 2
    - grau = 4

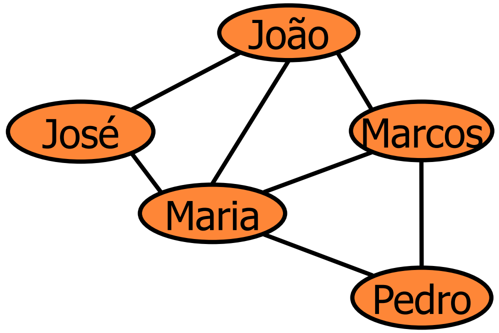


DEFINIÇÃO – GRAU DO VÉRTICE

- O **grau** de um vértice em **grafos não direcionados** é dado pelo número de arestas que incidem nele.
  - um vértice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.
  - Ex.
    - grau do vértice 1: 2
    - grau do vértice 3: 0 (isolado)



GRAFO SOBRE AMIZADE



- Eu estou ligado a uma celebridade por uma cadeia de amigos?
  - existe um caminho entre mim e uma celebridade?
  - **caminho** **=>** sequência de arestas que conectam dois vértices.

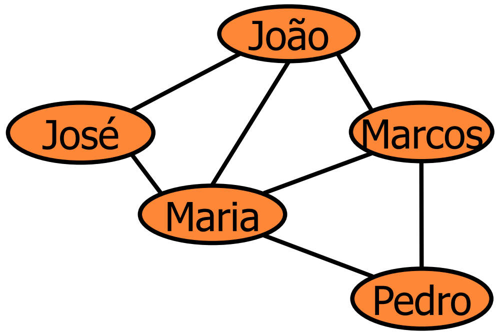
DEFINIÇÕES - CAMINHO

- Um **caminho de comprimento *k*** de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V,A)$ é uma sequência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que:
  - $x = v_0$
  - $y = v_k$
  - e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1,2,\ldots,k$.

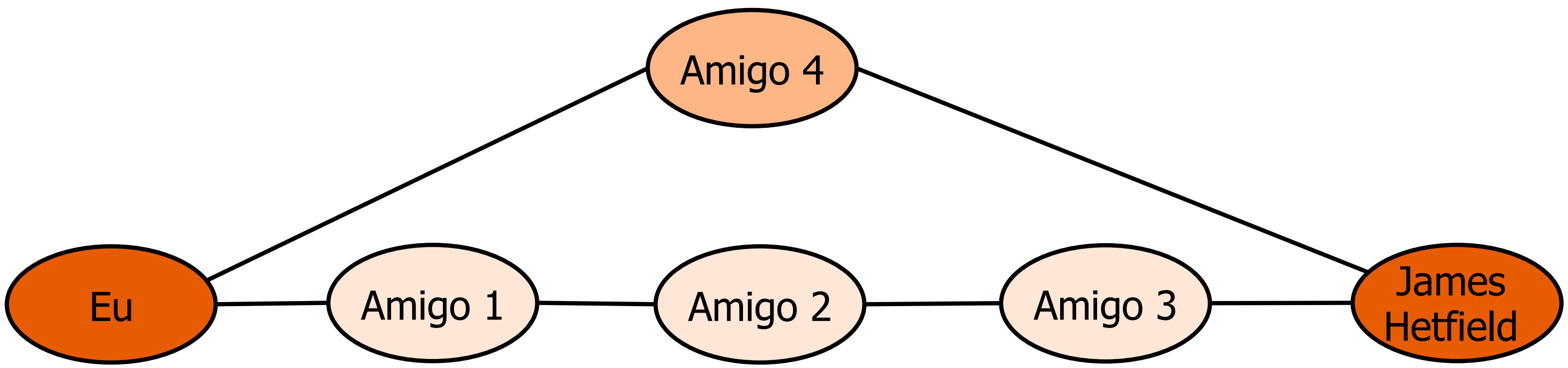
caminho de k vértices: formado por k-1 arestas

- O **comprimento** de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém:
  - os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$
  - as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.

GRAFO SOBRE AMIZADE

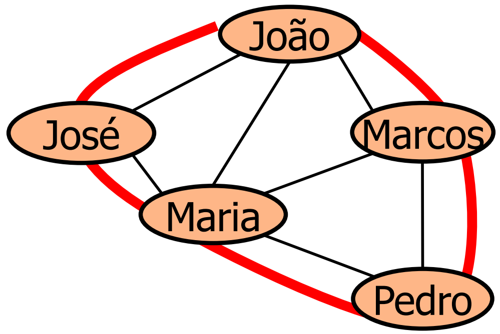


- Quão próxima é a minha ligação com essa celebridade?
  - Diversos caminhos que ligam dois vértices.
  - **Caminho mais curto (menor caminho)**
    - aquele com menor soma de pesos das arestas (ponderado)
    - ou com menor número de arestas (não ponderado).
  - **Caminho mais longo**
    - aquele com maior soma de pesos das arestas (ponderado)
    - ou com maior número de arestas (não ponderado).



GRAFO SOBRE AMIZADE

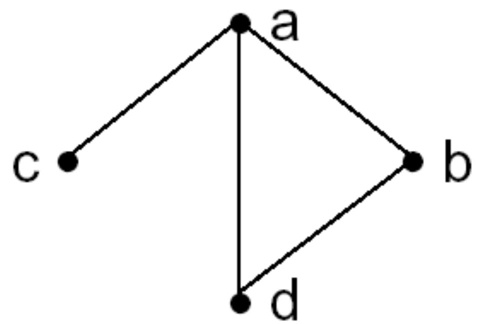
- Quanto tempo demora para que eu ouça uma fofoca que contei?



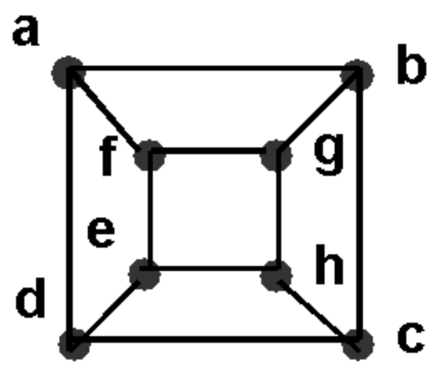
  - **Ciclo =>** caminho no qual o primeiro e o último vértices são iguais.
  - **Ciclo simples =>** ciclo em que nenhum vértice se repete (exceto primeiro e último).
  - **Grafo cíclico =>** possui pelo menos um ciclo.
  - **Grafo acíclico =>** grafo sem ciclos.

EXEMPLOS

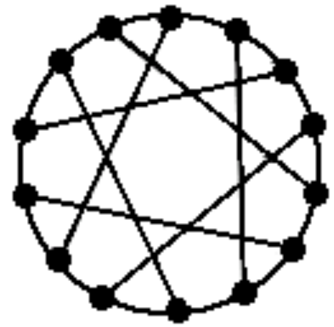
(a)



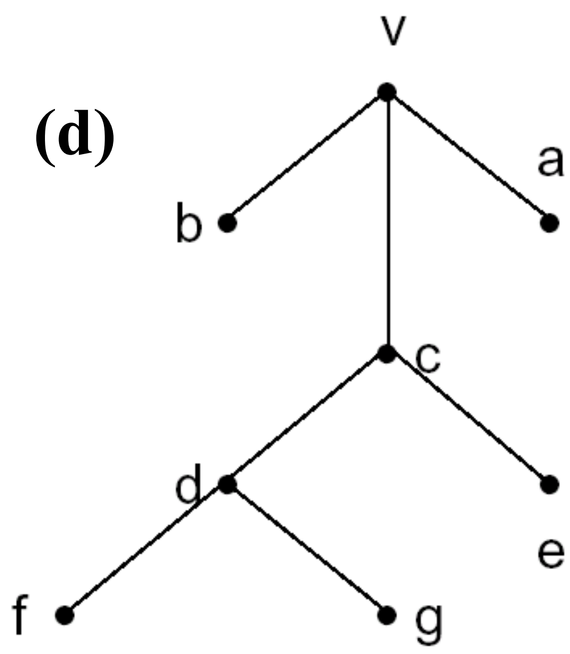
(b)



(c)



(d)



(a) é cíclico ? SIM

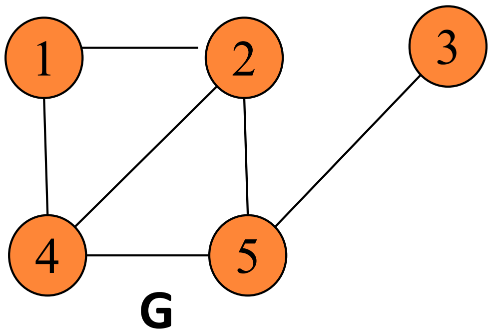
(b) é cíclico ? SIM

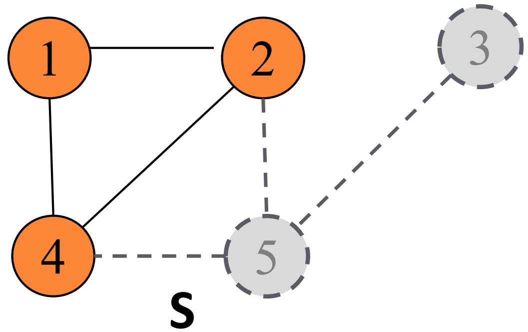
(c) é cíclico ? SIM

(d) é cíclico ? NÃO

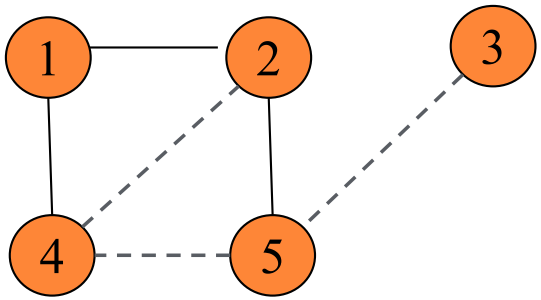
DEFINIÇÃO - SUBGRAFOS

- Um **subgrafo S** de um grafo *G* é um grafo tal que:
  - os vértices de **S** são um subconjunto dos vértices de ***G***
  - as arestas de **S** são um subconjunto das arestas de ***G***

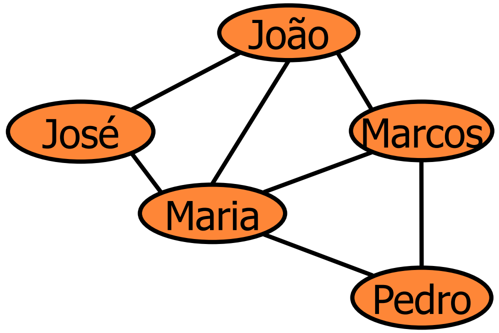




- Um **subgrafo gerador** (*spanning subgraph*) de ***G é um*** subgrafo que contém todos os vértices de ***G.***



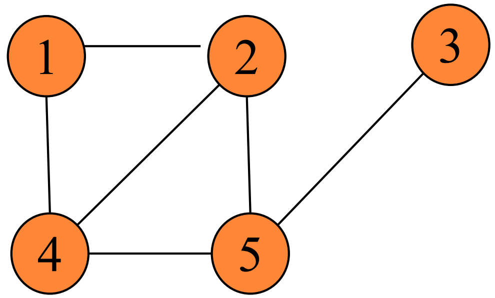
GRAFO SOBRE AMIZADE



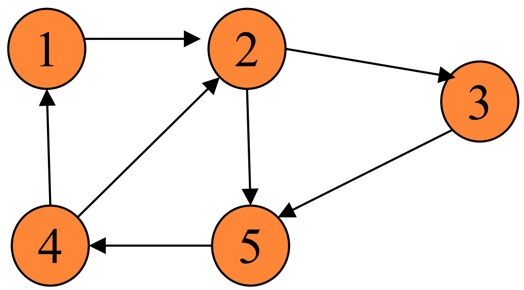
- Existe um caminho de amigos entre quaisquer duas pessoas no mundo?
  - Teoria da separação por até "seis graus".
  - **Grafo conexo** ou **conectado** **=>** existe um caminho entre quaisquer dois vértices.
  - **Componente conexo** **=>** parte conectada de um grafo não conexo.
  - **Grafo completo** **=>** grafo simples em que cada vértice está conectado a todos os outros

DEFINIÇÃO – GRAFO CONEXO

- Um grafo **G** é **conexo** se para quaisquer dois vértices distintos **u** e **v** existe um caminho de **u** a **v**.

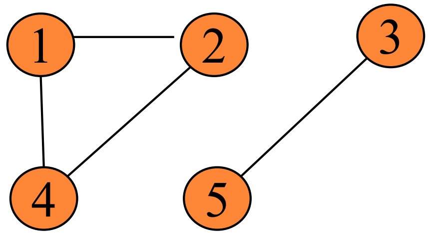


- Um **dígrafo** G é **fortemente conexo** se para quaisquer dois vértices distintos **u** e **v**, **v** é **alcançável** a partir de **u** e vice-versa.



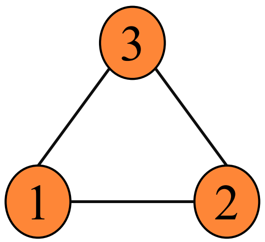
DEFINIÇÕES

- Um **componente conexo** de um grafo **G** é um **subgrafo conexo** de **G**

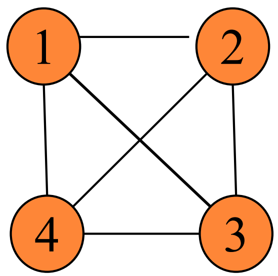


grafo não conexo
com 2 componentes conexos

- Um **grafo completo G** é um grafo simples em que quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes.
  - Existe um único grafo completo com **n** vértices, denotado $\mathbf{K_n}$.



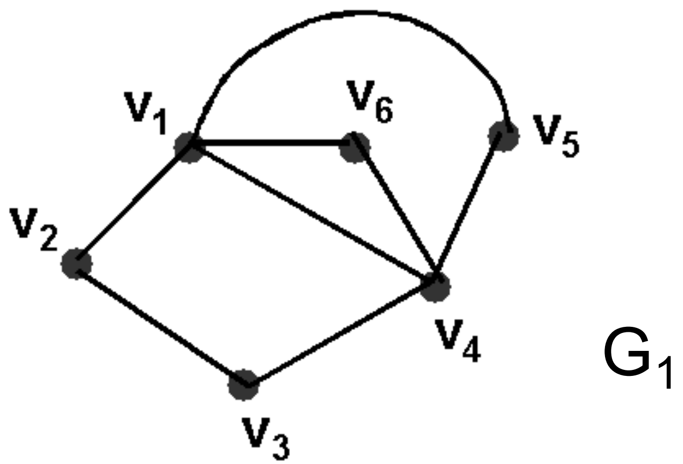
$\mathbf{K_3}$



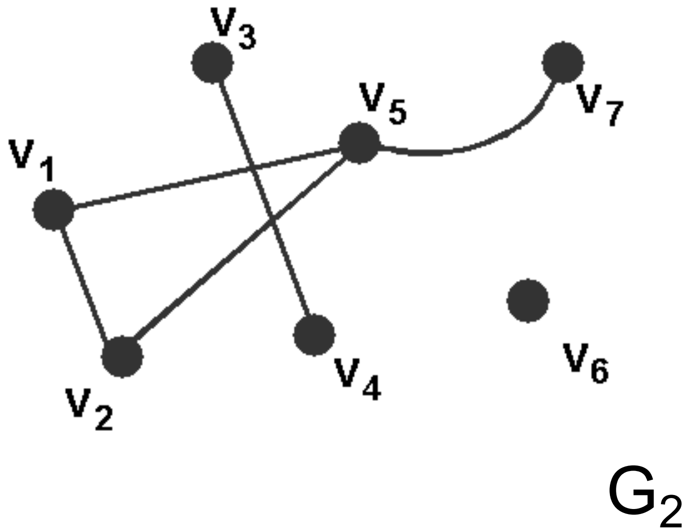
$\mathbf{K_4}$

EXERCÍCIO

G_1 é um grafo conexo ? SIM

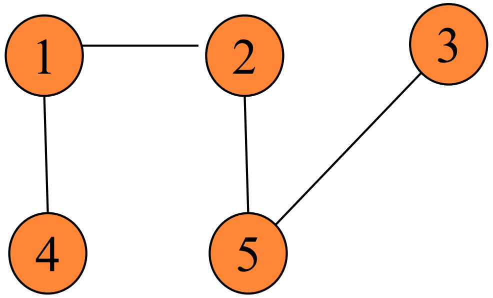


G_2 é um grafo conexo ? NÃO
desconexo



DEFINIÇÕES – ÁRVORE E FLORESTA

- Uma **árvore** é um **grafo conexo acíclico**.



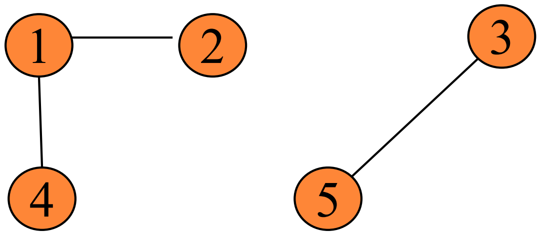
árvore

- Uma **floresta** é um **grafo acíclico**.

  => toda árvore é uma floresta

  => a recíproca é verdadeira?

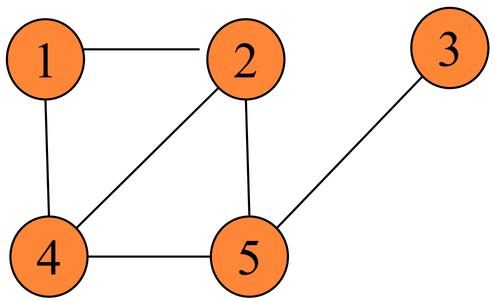
  => os componentes conexos de uma floresta são árvores.



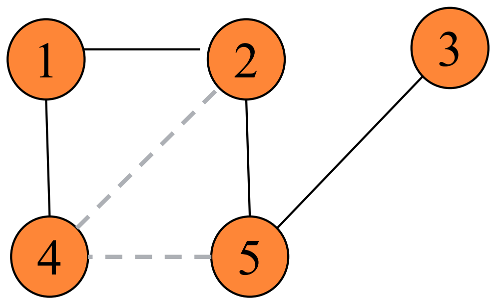
floresta com 2 árvores

DEFINIÇÕES – ÁRVORE E FLORESTA

- Uma **árvore geradora** *(spanning tree)* de um grafo conexo é um **subgrafo gerador** que é uma **árvore**.
  - pode haver mais de uma árvore geradora (a menos que o grafo seja uma árvore)
  - a **árvore geradora mínima** (*minimum spanning tree*) é a árvore geradora com **menor soma de pesos** de arestas



grafo



árvore geradora

- Uma **floresta geradora** de um grafo é um **subgrafo gerador** que é uma **floresta**

BIBLIOGRAFIA

- N. Ziviani. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- Y. Langsam, M. J. Augenstein and A. M. Tenenbaum. Data Structures Using C and C++, Prentice Hall, 2a Edição, 1996.
- T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest. Introduction to Algorithms, MIT Press, 2nd Edition, 2001.