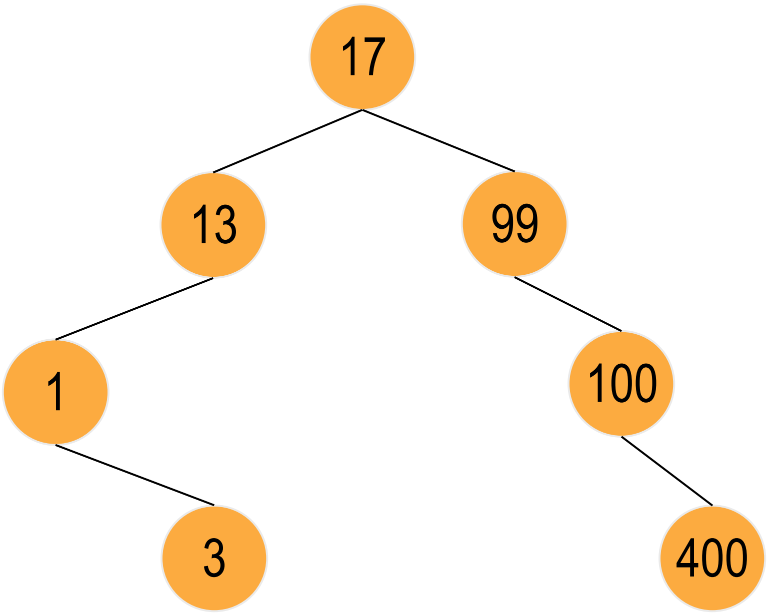
Árvores Binárias de Busca

Definição

- Uma Árvore Binária de Busca possui as mesmas propriedades de uma AB, acrescida da seguinte propriedade: Para <u>todo nó </u>da árvore, se seu valor é X, então:
  - Os nós pertencentes a sua sub-árvore esquerda possuem valores menores do que X;
  - Os nós pertencentes a sua sub-árvore direita possuem valores maiores do que X.
  - Um percurso em in-ordem nessa árvore resulta na seqüência de valores em ordem crescente

Exemplo



Características

- Se invertessemos as propriedades descritas na definição anterior, de maneira que a sub-árvore esquerda de um nó contivesse valores maiores e a sub-árvore direita valores menores, o percurso in-ordem resultaria nos valores em ordem decrescente
- Uma árvore de busca criada a partir de um conjunto de valores não é única: o resultado depende da ordem de inserção dos dados

Características

- A grande utilidade da árvore binária de busca é armazenar dados contra os quais outros dados são freqüentemente verificados (busca!)

- Uma árvore binária de busca é armazenada dinamicamente e em geral sofre alterações (inserções e remoções de nós) após ter sido criada

Listas versus ABB

- O tempo de busca é estimado pelo número de comparações entre chaves.
- Em listas de n elementos, temos:
  - Sequenciais (Array): O(n) se não ordenadas; ou $O(\log_2 n)$, se ordenadas
  - Encadeadas (Dinâmicas): O(n)
- As ABB constituem a alternativa que combina as vantagens de ambos: são dinâmicas e permitem a busca binária $O(\log_2 n)$

Operações em ABB

- Busca
- Inserção – *mantendo as propriedades de ABB*
- Remoção – *mantendo as propriedades de ABB*

Busca

- Passos do algoritmo de busca:
  - Se a árvore é vazia, fim e não achou. Se chave da raiz é igual à chave procurada, termina busca com sucesso.
  - Senão: Repita o processo para a sub-árvore esquerda, se chave da raiz é maior que a chave procurada; se for menor, repita o processo para a sub-árvore direita.
  - Caso o nó contendo o valor pesquisado seja encontrado, retorne um ponteiro para o nó; caso contrário, se se deparar com uma árvore vazia, retorne um ponteiro nulo.
- Faça a analogia com a busca binária feita em arrays.

Verifique em que condições a busca em ABB tem performance $O(\log_2 n)$

- Considere:
  - uma comparação por nível;
  - n nós no total
- Portanto:
  - Quanto menor a altura da árvore, menor o número de comparações;
  - Altura mínima de uma AB de n nós é $O(\log_2 n)$
  - AB perfeitamente balanceadas (PB) têm altura mínima.
- Logo: ABB ideais são PB (e deveriam ser mantidas como tal, porém são dinâmicas.......)

Busca (recursiva)

```
pno busca(tree raiz, tipo_elem valor){

    if (raiz == NULL)
        return NULL;

    if (valor == raiz->info)
        return raiz;

    if (valor < raiz->info)
        return busca(raiz->esq, valor);
    else
        return busca(raiz->dir, valor);
}
```

Busca (não recursiva)

```
pno busca(tree raiz, tipo_elem valor){
    pno p;

    p = raiz;

    while (p != NULL){
        if (p->info == valor) return p;
        else
            if (valor > p->info) p = p->dir;
            else p = p->esq;
    }

    return p;
}
```

Recursiva versus Não-Recursiva

• Em relação a tempo (número de comparações): equivalentes

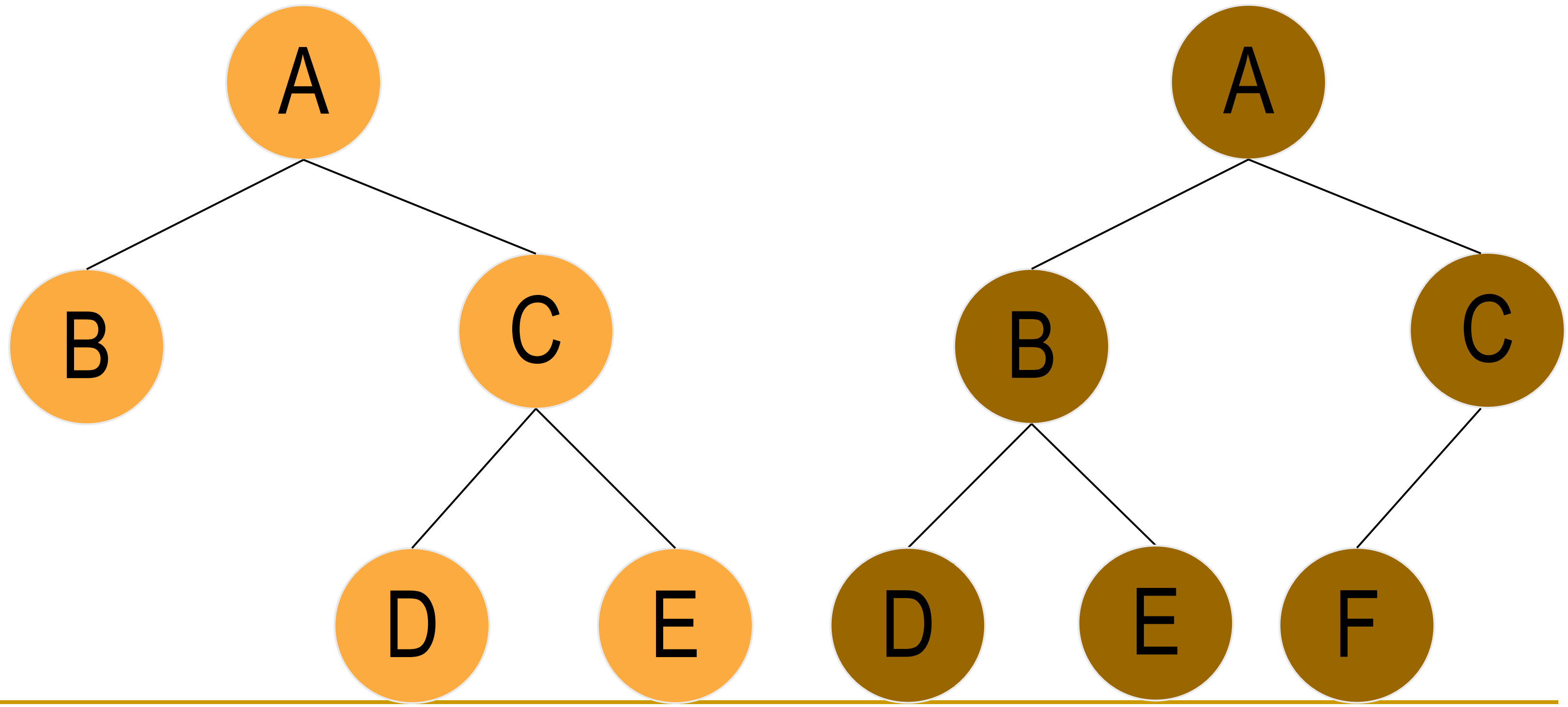
•Em relação a espaço (memória): a recursiva requer espaço extra para as chamadas recursivas. Esse espaço extra é diretamente proporcional (linear) à altura da árvore. (VERIFIQUE!)

Custo da busca em ABB

- Pior caso: como o número de passos é determinado pela altura da árvore, o pior caso é a árvore degenerada (altura = n).
- Altura da ABB depende da sequência de inserção das chaves...
  - Considere, p.ex., o que acontece se uma sequência ordenada de chaves é inserida...
  - Seria possível gerar uma árvore balanceada com essa mesma sequência, se ela fosse conhecida a priori. Como?
- Busca ótima: árvore de altura mínima (perfeitamente balanceada)
- Busca eficiente: árvore razoavelmente balanceada...(árvore balanceada)

Árvore Binária Balanceada

- Para cada nó, as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1



Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

- O número de nós de suas sub-árvores esquerda e direita difere em, no máximo, 1.
- É a árvore de altura mínima para o conjunto de chaves.
- Repare que todo nó de uma árvore PB é mediana de suas subárvores.
- Toda AB Perfeitamente Balanceada é Balanceada, sendo que o inverso não é necessariamente verdade.

Inserção (operações em ABB's)

- Passos do algoritmo de inserção:
  - Procure um “local” para inserir a nova chave, começando a procura a partir do nó-raiz:
  - Para cada nó-raiz, compare:
    - se a nova chave for menor do que o valor no nó-raiz, repita o processo para sub-árvore esquerda; ou
    - se a nova chave for maior que o valor no nó-raiz, repita o processo para sub-árvore direita.
  - Se um ponteiro (filho esquerdo/direito de um nó-raiz) nulo é atingido, coloque o novo nó como sendo raiz dessa sub-árvore vazia.
  - A inserção sempre se dá como nó folha: não exige deslocamentos!

Inserção

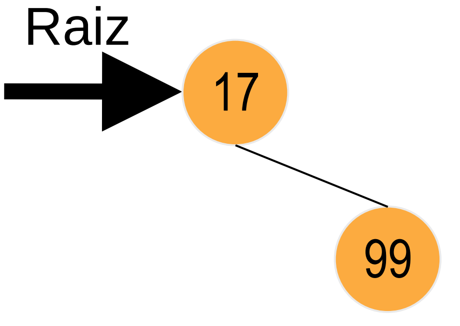
- Para entender o algoritmo, considere a inserção do conjunto de números, na seqüência

  {17, 99, 13, 1, 3, 100, 400}

- No início, a ABB está vazia!

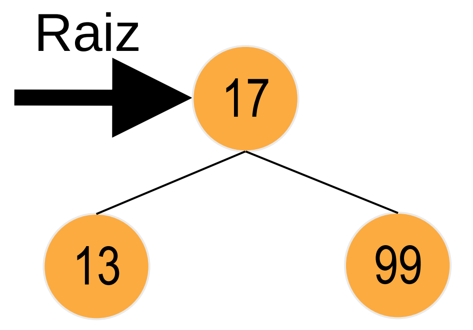
Inserção

- O número 17 será inserido tornando-se o nó raiz
- A inserção do 99 inicia-se na raiz. Compara-se 99 c/ 17.
- Como 99 > 17, 99 deve ser colocado na sub-árvore direita do nó contendo 17 (subárvore direita, inicialmente, nula)



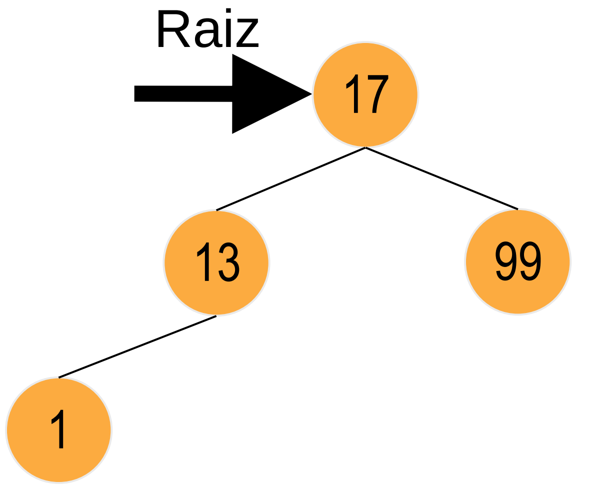
Inserção

- A inserção do 13 inicia-se na raiz
- Compara-se 13 c/ 17. Como 13 < 17, 13 deve ser colocado na sub-árvore esquerda do nó contendo 17
- Já que o nó 17 não possui descendente esquerdo, 13 é inserido como raiz dessa sub-árvore



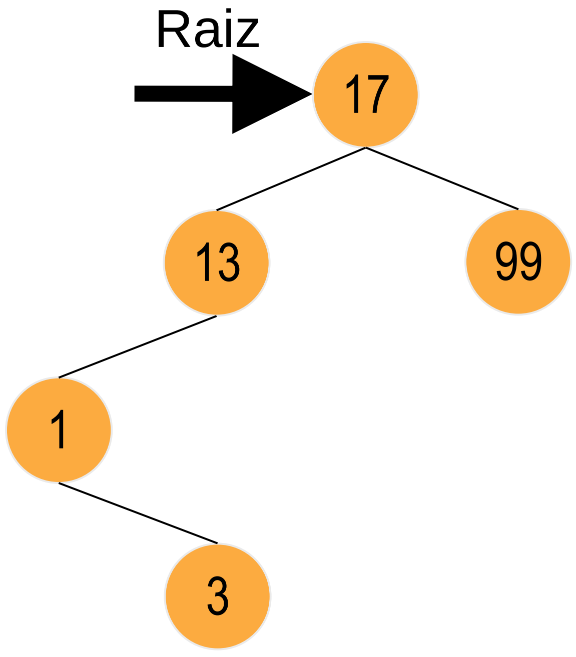
Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o valor 1
- 1<17, então será inserido na sub-árvore esquerda
- Chegando nela, encontra-se o nó 13, 1<13 então ele será inserido na sub-árvore esquerda de 13



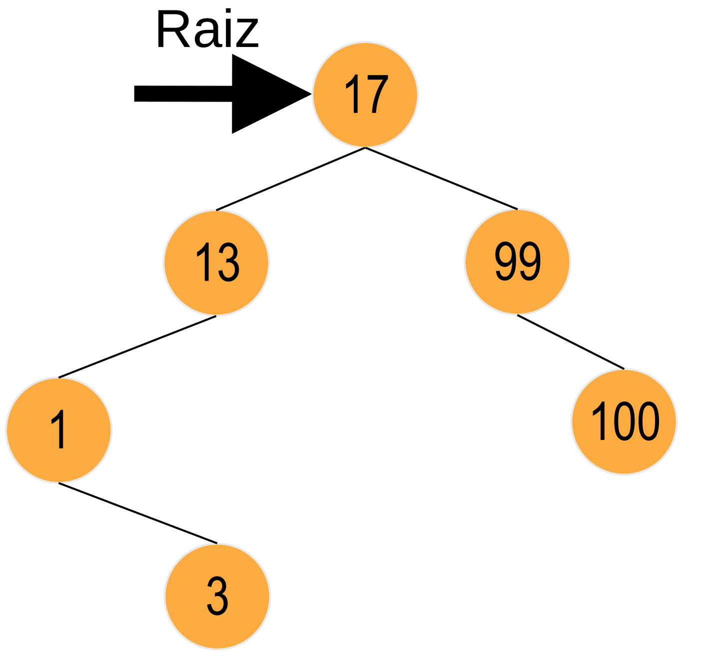
Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 3:
  - 3 < 17;
  - 3 < 13
  - 3 > 1



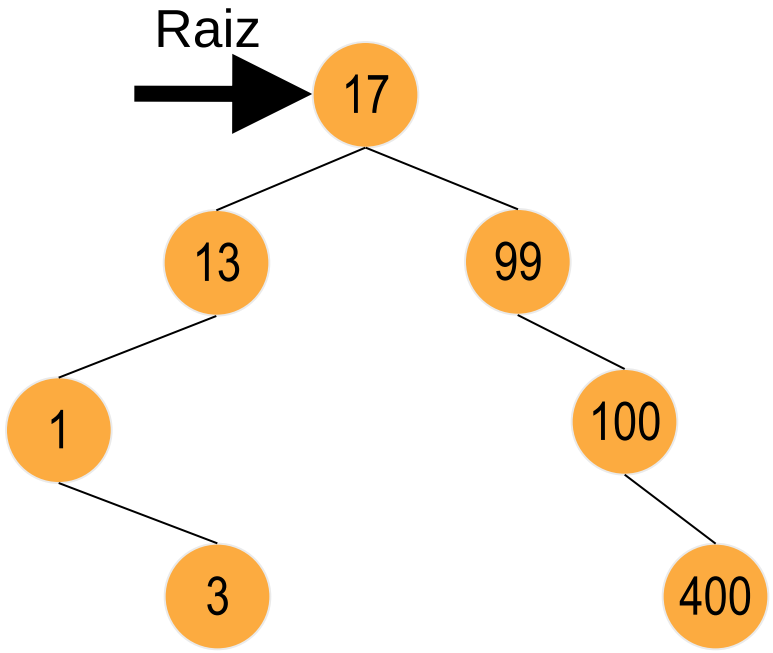
Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 100:
  - 100 > 17
  - 100 > 99



Inserção

- Repete-se o procedimento para inserir o elemento 400:
  - 400 > 17
  - 400 > 99
  - 400 > 100



Inserção

- O algoritmo de inserção não garante que a árvore resultante seja perfeitamente balanceada ou mesmo apenas balanceada.
- A árvore do exemplo anterior não é PB nem balanceada.

Função Recursiva de Inserção

- Seja uma função recursiva que insere uma chave x numa ABB, se ela já não estiver lá. Retorna o ponteiro para o nó que contém x.

- Essa função é usada para a construção de uma ABB.

```
pno busca_insere(tipo_elem x, tree raiz);
```

x: chave para inserir; raiz: raiz da árvore onde deve inserir;
busca_insere: retorna endereço onde está x

```
pno busca_insere(tipo_elem x, tree *raiz){

    if (*raiz == NULL) { /*inserir x como raiz da árvore*/
          *raiz = (pno)malloc(sizeof(struct no));
          (*raiz)->info = x;
          (*raiz)->esq = NULL;
          (*raiz)->dir = NULL;
          return raiz;
    }

    if (x < (*raiz)->info)
       return busca_insere(x, &(*raiz)->esq);

    if (x > (*raiz)->info)
       return busca_insere(x, &(*raiz)->dir);

    return raiz;

}
```

Acrescente um parâmetro booleano para indicar se houve a inserção ou não.

Custo da Operação de Inserção

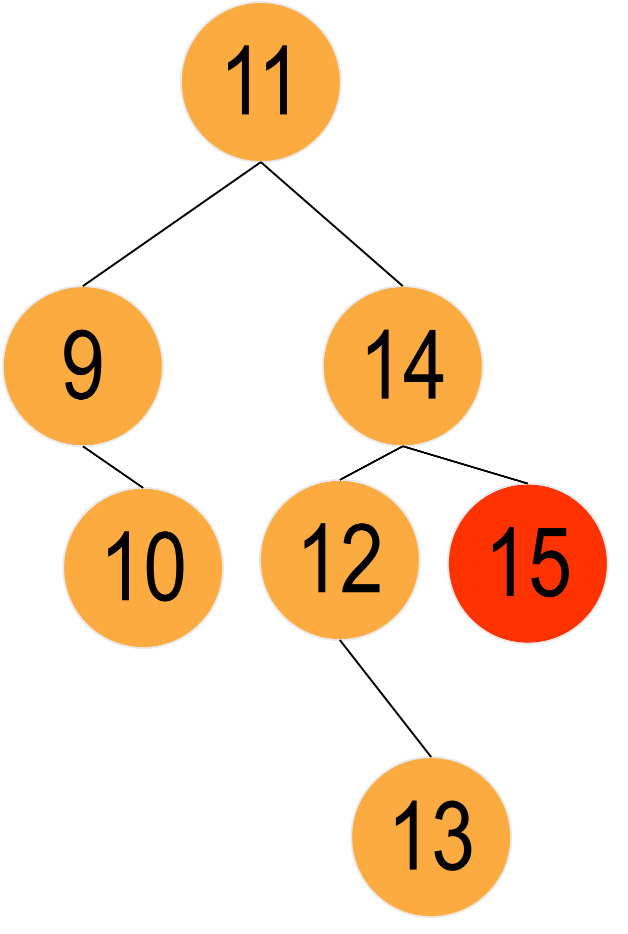
- A inserção requer uma busca pelo lugar da chave, portanto, com custo de uma busca qualquer (tempo proporcional à altura da árvore).
- O custo da inserção, após a localização do lugar, é constante; não depende do número de nós.
- Logo, tem complexidade análoga à da busca.

Remoção (operações em ABB's)

- Casos a serem considerados no algoritmo de remoção de nós de uma ABB:
  - Caso 1: o nó é folha
    - O nó pode ser retirado sem problema;
  - Caso 2: o nó possui uma sub-árvore (esq./dir.)
    - O nó-raiz da sub-árvore (esq./dir.) pode substituir o nó eliminado;
  - Caso 3: o nó possui duas sub-árvores
    - O nó cuja chave seja a menor da sub-árvore direita pode substituir o nó eliminado; ou, alternativamente, o de maior valor da sub-árvore esquerda pode substituí-lo.

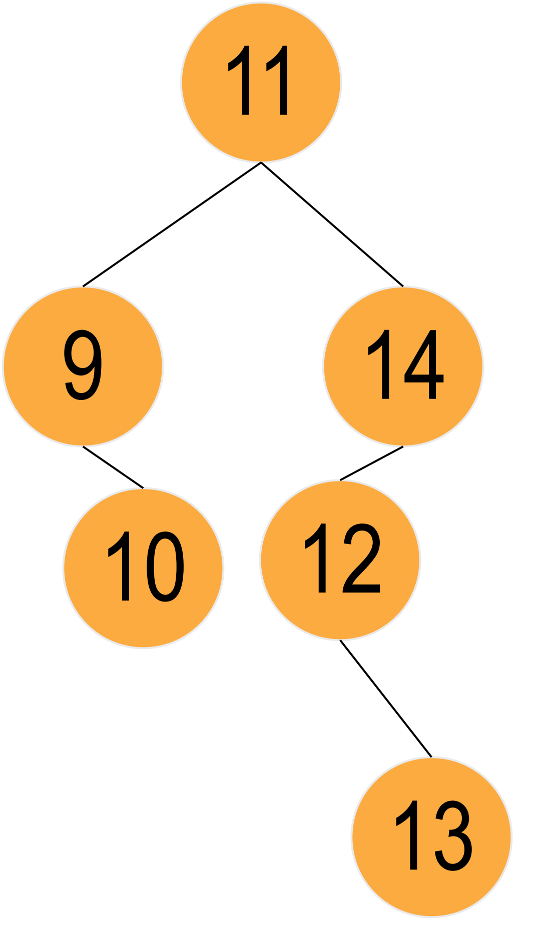
Remoção – Caso 1

- Caso o valor a ser removido seja o 15
- pode ser removido sem problema, não requer ajustes posteriores



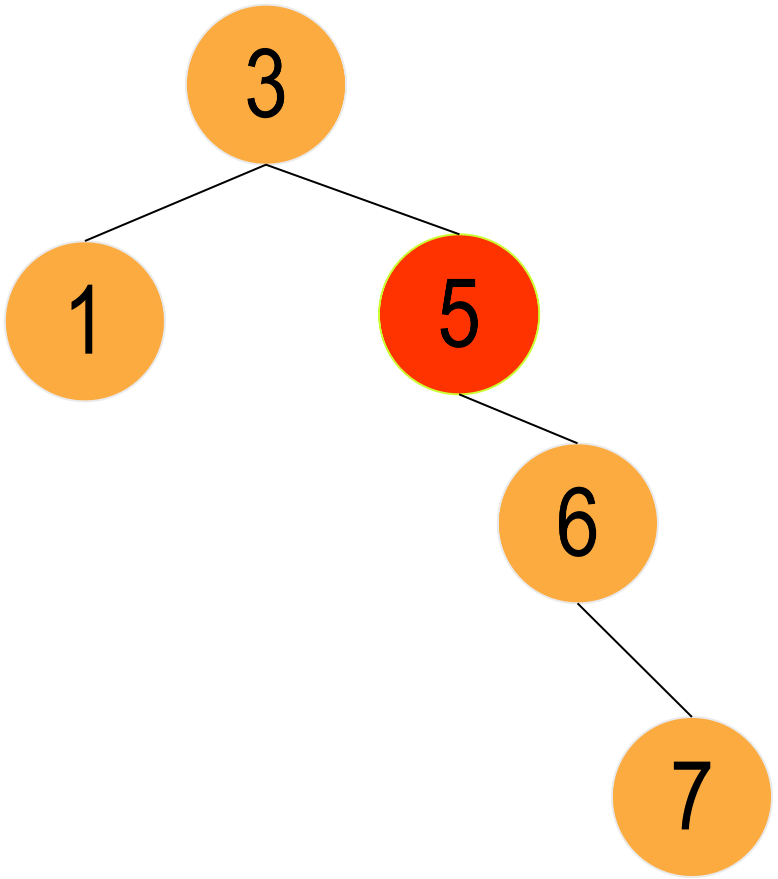
Remoção – Caso 1

- Os nós com os valores 10 e 13 também podem ser removidos!



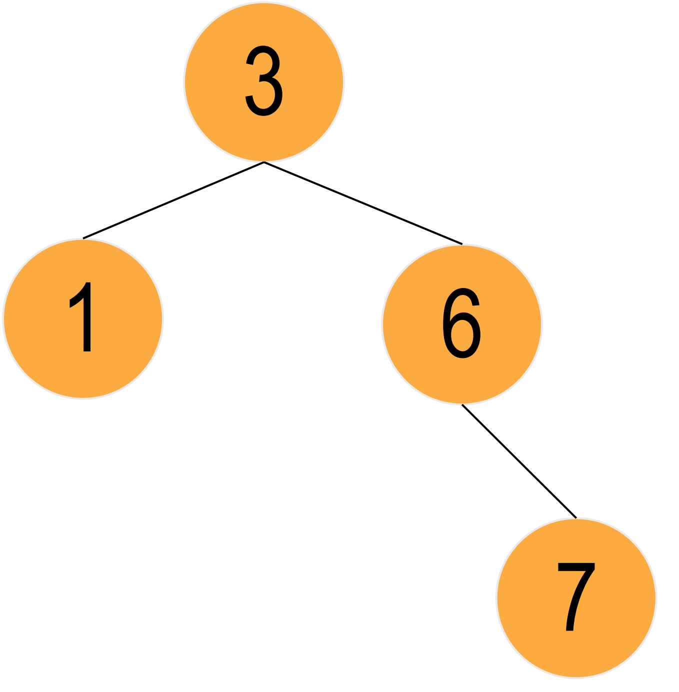
Remoção – Caso 2

- Removendo-se o nó com o valor 5
- Como ele possui apenas uma sub-árvore direita, seu nó filho, contendo o valor 6, pode "ocupar" o lugar do nó removido



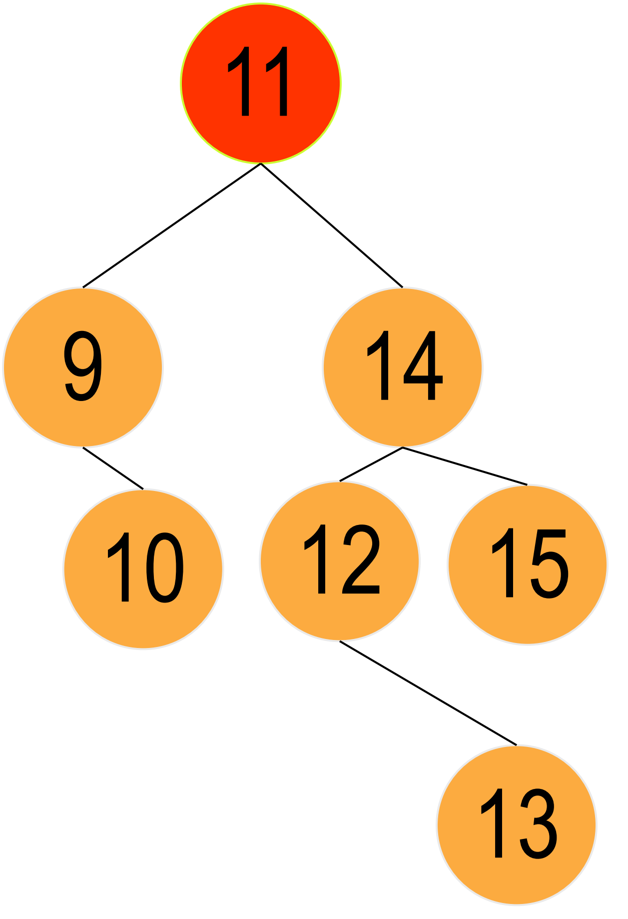
Remoção – Caso 2

- Caso existisse um nó com somente uma sub-árvore esquerda, seria análogo.



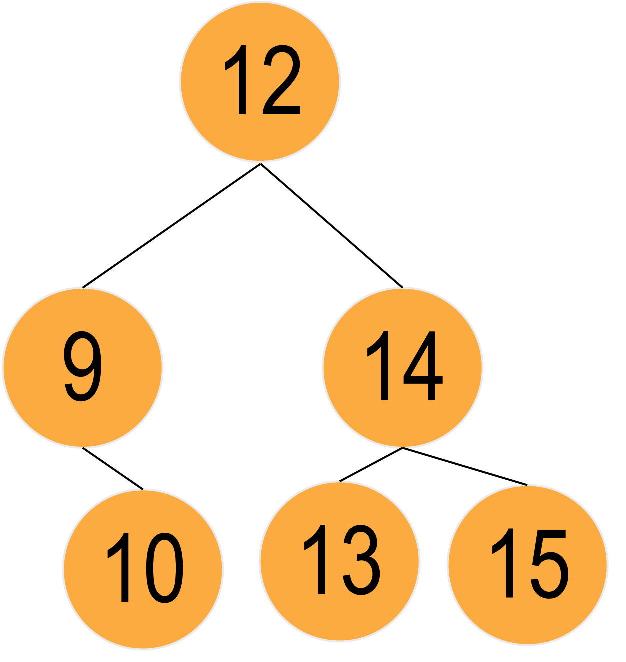
Remoção – Caso 3

- Eliminando-se o nó de chave 11
- Neste caso, existem 2 opções:
  - A chave 10 pode “ocupar” o lugar do nó-raiz, ou
  - A chave 12 pode “ocupar” o lugar do nó-raiz
  - O nó cuja chave substituiu a raiz é removido



Remoção – Caso 3

- Esse terceiro caso, também se aplica ao nó com chave 14, caso seja retirado.
  - Nessa configuração, os nós com chave 13 ou 15 poderiam ocupar seu lugar.



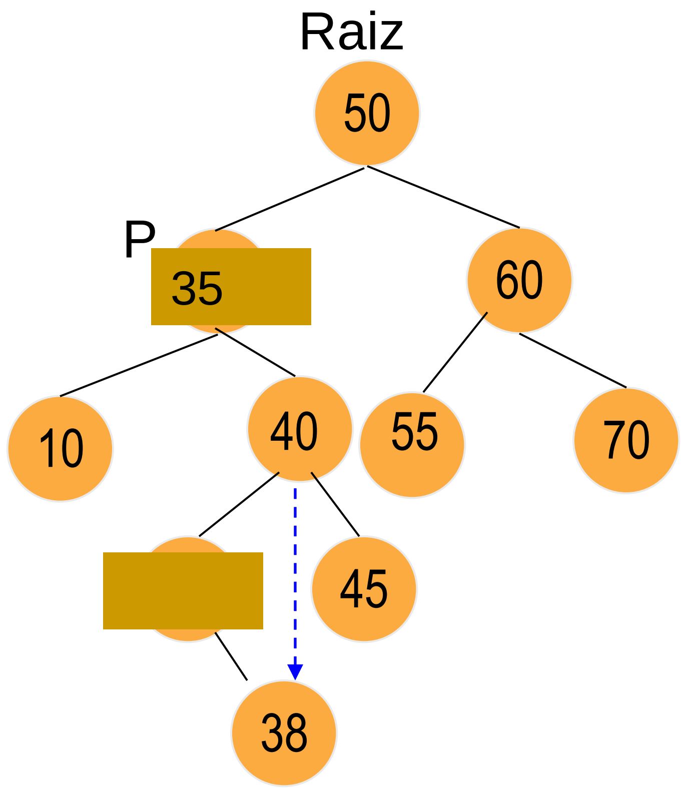
```
boolean remover(tree*p, tipo_elem x) {
    tree aux;
    if (*p==NULL)
      return FALSE; //não achou e não removeu
    else if (x<(*p)->info)
        return(remover(&(*p)->esq,x));
    else if (x>(*p)->info)
        return(remover(&(*p)->dir,x));
    else { //remover
        //caso 1: o nó não tem filhos
        if (((*p)->esq==NULL) && ((*p)->dir==NULL)) {
           free(*p);
           *p=NULL; //anula subárvore de onde veio
           return TRUE;
        }
```

```c
//caso 2a: só há o filho direito
    else if ((*p)->esq==NULL) {
        aux=*p;
        *p=(*p)->dir; //faz ligação com filho a direita
        free(aux);
        return TRUE;
    }
//caso 2b: só há o filho esquerdo
    else if ((*p)->dir==NULL) {
        aux=*p;
        *p=(*p)->esq; //faz ligação com filho a esquerda
        free(aux);
        return TRUE;
    }
```

```
//caso 3: há os dois filhos
        else { //substitui pelo maior da subárvore esquerda
            (*p)->info=busca_maior((*p)->esq);
            return(remover(&(*p)->esq,(*p)->info));
        }
    }
}

tipo_elem busca_maior(tree p) {
    while (p->dir!=NULL)
        p=p->dir;
    return (p->info);
}
```

Exemplo



Custo da Operação de Remoção

- A remoção requer uma busca pela chave do nó a ser removido, portanto, com custo de uma busca qualquer (tempo proporcional à altura da árvore).
- O custo da remoção, após a localização do nó dependerá de 2 fatores:
  - do caso em que se enquadra a remoção: se o nó tem 0, 1 ou 2 sub-árvores; se 0 ou 1 filho, custo é constante.
  - de sua posição na árvore, caso tenha 2 sub-árvores (quanto mais próximo do último nível, menor esse custo)
- Repare que um maior custo na busca implica num menor custo na remoção pp. dita; e vice-versa.
- Logo, tem complexidade dependente da altura da árvore.

Consequências das operações de inserção e eliminação

- Uma ABB balanceada ou perfeitamente balanceada tem a organização ideal para buscas.
- Inserções e eliminações podem desbalancear uma ABB, tornando futuras buscas ineficientes.

- Possível solução:
  - Construir uma ABB inicialmente perfeitamente balanceada (algoritmo a seguir)
  - após várias inserções/eliminações, aplicamos um processo de rebalanceamento (algoritmo a seguir)

Algoritmo para criar uma ABB Perfeitamente Balanceada

1. Ordenar num array os registros em ordem crescente das chaves;
2. O registro do meio é inserido na ABB vazia (como raiz);
3. Tome a metade esquerda do array e repita o passo 2 para a sub-árvore esquerda;
4. Idem para a metade direita e sub-árvore direita;
5. Repita o processo até não poder dividir mais.

Algoritmo de Rebalanceamento

1. Percorra em In-ordem a árvore para obter uma sequência ordenada em array.
2. Repita os passos 2 a 5 do algoritmo de criação de ABB PB.

ABB: Resumo

- Boa opção como ED para aplicações de pesquisa (busca) de chaves, SE árvore balanceada ➔ $O(\log_2 n)$
- Inserções (como folhas) e Eliminações (mais complexas) causam desbalanceamento.
- Inserções: melhor se em ordem aleatória de chaves, para evitar linearização (se ordenadas)
- Para manter o balanceamento, 2 opções:
  - como descrito anteriormente
  - Árvores AVL