ICMC-USP

Lista de Exercícios - Capítulo 1

SCC-0505

Gramáticas e Linguagens

1. (a) Defina o que é uma Gramática.
   (b) Exemplifique sua definição construindo uma gramática que gere a linguagem $L(G) = \{0^n1^{2n}0^m \mid n, m \geq 0\}$.
   (c) Classifique sua gramática na hierarquia de Chomsky, justificando sua resposta.

2. Que linguagem a gramática, constituída pelo seguinte conjunto de produções $P = \{S \rightarrow (),\ S \rightarrow)(,\ S \rightarrow SS,\ S \rightarrow (S),\ S \rightarrow)S(\}$, gera?

3. Que linguagem a gramática, constituída pelo seguinte conjunto de produções $P = \{S \rightarrow 0,\ S \rightarrow 1,\ S \rightarrow S0\}$, gera?

4. A gramática, constituída pelo seguinte conjunto de produções $P = \{S \rightarrow (),\ S \rightarrow (S),\ S \rightarrow SSS\}$, gera exatamente a linguagem dos parênteses casados?

5. Escreva uma gramática para a linguagem $\{a^nb^{2n} \mid n > 0\}$.

6. Que linguagem a gramática, constituída pelo seguinte conjunto de produções $P = \{S \rightarrow aSb \mid SS \mid ab \mid ba\}$ gera?

7. Escreva gramáticas para as seguintes linguagens:
   (a) expressões aritméticas envolvendo os dígitos 0 e 1 e as operações + e *. Exemplo: (1 + (0 * 1))
   (b) $\{w \mid w$ é da forma a^nb^m, com $n < m\}$
   (c) Fórmulas do cálculo proposicional com duas variáveis, p e q, e conectivos *and*, *or* e *not*. Exemplo: (p *or* (q *and* (*not* p)))
   (d) $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ onde w^R significa a forma reversa de w, isto é, se $w = abaa$, então $w^R = aaba$.

8. Considerando que:

   - toda linguagem livre de contexto também é sensível ao contexto;
   - nem toda gramática livre de contexto é sensível ao contexto;
   - há quatro tipos de gramáticas/linguagens segundo Chomsky,

   as gramáticas abaixo são livres de contexto? São sensíveis ao contexto? Por que?
   (a) $G = (\Sigma, V, S, P)$, onde $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{A, B\}$, $S = A$, $P = \{A \rightarrow Ba,\ B \rightarrow BB,\ Aa \rightarrow Bb,\ B \rightarrow b,\ B \rightarrow bA,\ A \rightarrow a,\ Ab \rightarrow \lambda\}$
   (b) $G = (\Sigma, V, S, P)$, onde $\Sigma = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$, $P = \{S \rightarrow 0S1,\ S \rightarrow \lambda\}$

   Que linguagem é gerada pela gramática do item b?

9. Liste as características que diferenciam as gramáticas da hierarquia de Chomsky.

 Continua na próxima página. . .

10. Considere uma gramática $G = (\Sigma, V, S, P)$, onde $\Sigma = \{0, 1\}$, $V = \{S\}$, $P = \{S \rightarrow 0S1,\ S \rightarrow 01\}$. Qual o tipo (menos complexo) desta gramática segundo a hierarquia de Chomsky? Dê a descrição formal da linguagem gerada por esta gramática. Se for possível, descreva o autômato finito, com o menor número de estados possível, que aceite esta linguagem.

Gramáticas Lineares à Direita ou Regulares

11. Encontre uma gramática regular equivalente à $G = (\Sigma, V, S, P)$, cujo $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{S, A, B\}$ e $P = \{S \rightarrow abbaA \mid bB, A \rightarrow aA \mid aB, B \rightarrow bA \mid aba \mid b\}$.

12. Se G for uma gramática regular e w uma sentença de $L(G)$ capaz de ser derivada em p passos, qual é então o comprimento de w? Prove sua resposta.

13. Ache uma GLD para a linguagem $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ não contenha a subcadeia $bab\}$.

14. Seja a seguinte definição: Uma gramática $G = (\Sigma, V, S, P)$ é **linear a direita** se toda produção for da forma $A \rightarrow bC$ ou $A \rightarrow b$, onde A e $C \in V$ e $b \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Agora seja a seguinte gramática G_1 composta das seguintes produções: $A \rightarrow wB \mid w$, onde A e $B \in V$ e $w \in \Sigma^*$. Mostre que $L(G_1)$ pode ser gerada por uma gramática linear a direita.

15. Considere gramáticas lineares à esquerda, que são gramáticas nas quais toda produção é da forma $A \rightarrow Ab$ ou $A \rightarrow b$, com $A \in V$ e $b \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Uma linguagem linear à esquerda é uma linguagem que pode ser gerada por uma gramática linear à esquerda. Mostre através de um exemplo, que as linguagens lineares à esquerda coincidem com as linguagens lineares à direita.

Expressões e Linguagens Regulares

16. Explique, com palavras, qual é o conjunto denotado pelas seguintes expressões regulares sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$:
    (a) aa
    (b) ba^*
    (c) $(a + b)^*$
    (d) $(a + b)^*aa(a + b)^*$
    (e) $a^*ba^*ba^*$
    (f) $(a + b)^*(aa + bb)$
    (g) $(a + \lambda)(b + ba)^*$
    (h) $(aa + b)^*(a + bb)$
    (i) $(b + ab)^*(\lambda + a)$

(j) $(aa + bb + (aa + bb)(ab + ba)(aa + bb))^*$

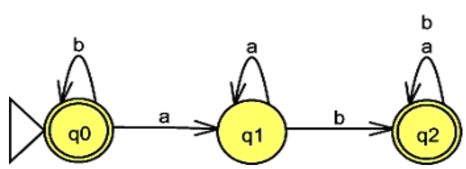
17. Descreva em palavras as linguagens especificadas pelas seguintes expressões regulares:
    (a) $(aa)^*(bb)^*$
    (b) $(a^*b^*c^*)^*$
    (c) $((a + b + c)(bb)^* + (a + b + c))^*$
    (d) $(aaa + aaaaa)^*$

18. Dê uma GLD para a linguagem $((a + bb)^* + c)^*$.

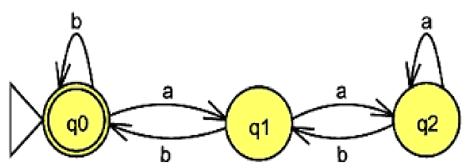
19. Dado um alfabeto Σ. Considere a seguinte linha de raciocínio:
    1. Para qualquer cadeia $x \in \Sigma^*$, a linguagem $\{x\}$ é regular.
    2. Para quaisquer linguagens regulares A e B, a linguagem $A \cup B$ é regular.
    3. Toda linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ pode ser escrita como uma união de linguagens da seguinte forma: $L = \cup_{x \in L}\{x\}$.
    4. Portanto, toda linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ é regular.

    Critique este argumento. As três hipóteses estão corretas? A lógica é válida? Se não, você pode identificar uma falha? A conclusão está correta?

20. Dê os conjuntos regulares correspondentes aos seguintes AFDs:



(a)



(b)

Autômatos Finitos

21. Converta os seguintes conjuntos regulares em AFNs.
    (a) $(((11)^*0)^* + 00)^*$
    (b) $(1 + 11 + 0)^*(00)^*$

22. Especifique e descreva um AFN que aceita o conjunto de todas as sentenças com dois 0's consecutivos ou dois 1's consecutivos, para $\Sigma = \{0, 1\}$.

23. Seja $M = (\{q_0, q_1\},\ \{0, 1\},\ \delta,\ \{q_0\},\ \{q_1\})$ um AFN (autômato finito não determinístico) onde $\delta(q_0, 0) = \{q_0,\ q_1\}$, $\delta(q_0, 1) = \{q_1\}$, $\delta(q_1, 0) = \emptyset$, $\delta(q_1, 1) = \{q_0,\ q_1\}$. Qual é o AFD (autômato finito determinístico) correspondente?

24. Considere a seguinte gramática regular, $G = (\{0, 1\},\ \{S, B\},\ S,\ P\}$, onde P consiste de: $S \to 0B,\ B \to 0B,\ B \to 1S,\ B \to 0$. Pode-se construir um autômato finito não determinístico $M = (\{S, B, A\}, \{0, 1\}, \delta, \{S\}, \{A\})$, onde δ é dado por:
    1. $\delta(S, 0) = \{B\}$, já que $S \to 0B$ é a única produção em P com S à esquerda e 0 à direita.
    2. $\delta(S, 1) = \emptyset$, já que nenhuma produção tem S à esquerda e 1 à direita.
    3. $\delta(B, 0) = \{B, A\}$, já que $B \to 0B$ e $B \to 0$ estão em P.
    4. $\delta(B, 1) = \{S\}$, já que $B \to 1S$ está em P.
    5. $\delta(A, 0) = \delta(A, 1) = \emptyset$.

    Ache um autômato finito determinístico M_1 equivalente a M.

25. Ache um autômato finito determinístico (AFD) que aceite todas as cadeias em $\{0, 1\}^*$ tal que todo 0 tem um 1 imediatamente à sua direita. Construa uma gramática do tipo 3 que gere esta linguagem.

26. Quais são as diferenças básicas entre um autômato finito determinístico e um não determinístico? Defina $T(M)$, o conjunto de cadeias aceitas pelo autômato M, para os dois tipos.

27. Dê a especificação e o diagrama de estados de um autômato finito não determinístico M que aceite a linguagem $(a + b)^*$ tal que nenhuma cadeia só de a's ou só de b's seja aceita. Obtenha o autômato determinístico M' equivalente a M. Construa uma gramática linear à direita que gere esta linguagem. Dê a expressão regular que representa esta linguagem.

28. Dê a especificação $(Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ e o diagrama de estados de um autômato finito não determinístico (AFN) que aceite o conjunto de todas as cadeias que contenham dois 0's consecutivos ou dois 1's consecutivos. Teste para 011010.

 Continua na próxima página. . .

29. Dê a especificação $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ e o diagrama de estados de um autômato finito determinístico (AFD) que aceite cadeias de um alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, com número par de 0's e um número par de 1's. Escreva a gramática linear a direita (GLD) equivalente a esse autômato e a expressão regular que representa a linguagem de estados finitos correspondente.

30. Construa um autômato finito que aceite a linguagem regular $\{(ab)^*b + c^*\}$ sem usar arcos-λ.

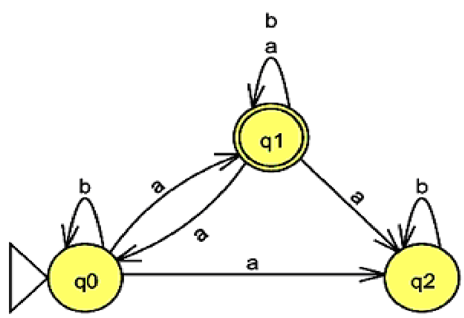
31. Dê o autômato finito determinístico que aceite a linguagem regular $L = (b^*c + ab)$. Qual é a gramática linear a direita G que gera L?

32. Seja $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \ \{a, b\}, \ \delta, \{q_0\}, \ \{q_2\})$ um autômato finito não determinístico (AFN) com δ dado por:

	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$

Ache um autômato finito determinístico (AFD) que aceite $T(M)$.

33. Converta o seguinte AFN em um AFD.



34. Seja $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \ \{a, b\}, \ \delta, \ \{q_0\}, \ \{q_2\})$ um autômato finito não determinístico (AFN) com mapeamento de transmissão de estado δ definida como: $\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_2, a) = \{q_0, q_2\}$, $\delta(q_0, b) = \{q_0\}$, $\delta(q_1, b) = \emptyset$, $\delta(q_2, b) = \{q_1\}$.
   (a) Ache um autômato finito determinístico (AFD) que aceite o conjunto de cadeias aceitas por M;
   (b) Ache a gramática linear a direita (GLD) que gera a Linguagem de Estados Finitos (LEF) aceita por M;
   (c) Ache a expressão regular que represente esta linguagem.

35. Quais são as diferenças básicas entre um autômato finito determinístico (AFD) e um não determinístico (AFN)? Defina $T(M)$, o conjunto de cadeias aceitas pelo autômato M, para os dois tipos.

36. Seja a linguagem $L \subseteq \{0,1\}^*$ constituída de cadeias que contêm a subcadeia 10 a sua extrema direita. Exemplo: 100**10** $\in L$, enquanto que 0101**00** $\notin L$.
    (a) Escreva um autômato finito não-determinístico (AFN) que aceita a linguagem L;
    (b) Escreva o autômato finito determínistico (AFD) que aceita L;
    (c) Escreva a expressão regular equivalente a L;
    (d) Escreva a gramática linear a direita, sem produções-λ, que gera L.

37. Considere a seguinte linguagem: $L = \{w \mid w \in (a+b)^*$ tal que haja número par de duplas de ba's$\}$. Exemplo: a cadeia *abaabbaba* não pertence a L, enquanto que a cadeia *baabba* pertence. Se possível, escreva o autômato finito determinístico (AFD) que processa L e dê a gramática linear a direita equivalente. Se não for possível explique o porquê.

38. Dê o diagrama de estados de um autômato finito determinístico (AFD) que aceite a linguagem dada pela expressão regular $(b^* + (ab)^*)$. Escreva a gramática equivalente.

39. Construa um autômato finito para o reconhecimento de números reais.

40. Seja um autômato finito não-determinístico (AFN), $M = (\{q,p,r\},\{a,b\},\delta,q,\{r\})$, onde: $\delta(q,a) = \{p,r\}$
    $\delta(p,a) = \{r\}$
    $\delta(r,a) = \{q,r\}$
    $\delta(q,b) = \{p\}$
    $\delta(p,b) = \{q,p\}$
    $\delta(r,b) = \{p\}$
    (a) Desenhe o Diagrama de Estados correspondente a M.
    (b) Construa um autômato determinístico (AFD), M', equivalente a M, e apresente-o como um Diagrama de Estados.
    (c) Construa uma Gramática Regular, G, que gere a linguagem reconhecida por M'. Especifique todos os elementos de G.

41. Seja $G = (\{l,d\},\{S,R\},S,P)$ com as seguintes produções $P = \{S \to lR \mid l,\ R \to d \mid R \mid dR \mid l \mid lR\}$.
    (a) Escreva a linguagem gerada por G na forma de uma expressão regular.
    (b) Construa o Autômato Finito que reconheça a linguagem gerada por G.
    (c) Caso o autômato do item (b) seja não determinístico, construa um autômato determinístico correspondente.