**SMA0333 - Cálculo III** **Resolução da Prova 2**
**Prof.** **2 de julho de 2015**

NOME E NÚMERO USP: ____________________

1,5 1. Determine todos $x \in \mathbb{R}$ para que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+3}(x-3)^{2n}$$

seja convergente.

**Resolução:** *Pelo critério da raiz temos*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n(x-3)^{2n}}{n+3}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(x-3)^2}{(n+3)^{1/n}} = 2(x-3)^2,$$

*pois* $\lim_{n\to\infty}(n+3)^{1/n} = 1$, *já que*

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(x+3)/x} \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{1/(x+3)} = e^0 = 1.$$

*Assim, a série converge absolutamente se* $2(x-3)^2 < 1$ *e diverge se* $2(x-3)^2 > 1$, *ou seja, converge absolutamente se* $|x-3| < 1/\sqrt{2}$ *e diverge se* $|x-3| > 1/\sqrt{2}$. *Assim, o raio de convergência é* $1/\sqrt{2}$.

*Vejamos agora quando* $|x-3| = 1/\sqrt{2}$, *isto é, quando* $(x-3)^2 = 1/2$. *Temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^{2n}}{n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3},$$

*que é divergente. Logo, a série de potências diverge quando* $|x-3| = 1/\sqrt{2}$, *isto é, quando* $x = 3 - 1/\sqrt{2}$ *ou* $x = 3 + 1/\sqrt{2}$. *Portanto, o intervalo de convergência é* $(3 - 1/\sqrt{2}, 3 + 1/\sqrt{2})$.

2. Considere a função $f(x) = x^6\cos(2x)$.

0,5 (a) Encontre a série de Maclaurin de $f$.

**Resolução:** *Usando que*

$$\cos u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}u^{2n}$$

*vale para todo* $u \in \mathbb{R}$, *obtemos*

$$f(x) = x^6\cos(2x) = x^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}x^{2n+6}$$

*para todo* $x \in \mathbb{R}$.

1,0 (b) Utilizando o item anterior, calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x^6+2x^8}{x^{10}}.$$

**Resolução:** *Note que, pelo item anterior,*

$$f(x)=x^6-2x^8+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}x^{2n+6}.$$

*Logo,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x^6+2x^8}{x^{10}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}x^{2n+6}}{x^{10}}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}x^{2n-4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4^2}{4!}-\frac{4^3}{6!}x^2+\frac{4^4}{8!}x^4+\cdots\right)=\frac{4^2}{4!}=\frac{2}{3},$$

*pois toda série de potências é contínua.*

0,5 (c) Quais os valores de $f^{(21)}(0)$ e $f^{(22)}(0)$?

**Resolução:** *Lembre que se* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ *então* $a_n=f^{(n)}(x_0)/n!$.

*Note que o coeficiente de* $x^{22}=x^{2\cdot 8+6}$ *é* $\frac{(-1)^8 4^8}{16!}$ *e o de* $x^{21}$ *é zero pois não existe número natural* $n$ *tal que* $2n+6=21$.
*Assim,* $f^{(22)}(0)=22!4^8/16!$ *e* $f^{(21)}(0)=0$.

0,5 (d) Encontre uma série numérica cujo valor é $\int_0^{2\pi}x^6\cos(2x)dx$.

**Resolução:** *Como a série de potências de* $f$ *converge em* $\mathbb{R}$, *temos*

$$\int_0^{2\pi}x^6\cos(2x)dx=\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}x^{2n+6}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}\int_0^{2\pi}x^{2n+6}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n(2\pi)^{2n+7}}{(2n+7)(2n)!}.$$

3. Considere $f(x)=\frac{L}{2}-x$, $0<x<L$.

1,0 (a) Encontre a série de Fourier de senos de período 2L da função f.

**Resolução:** *Basta estendermos* f *a uma função* $\tilde{f}$ *que seja* 2L *periódica e ímpar. Note que* $\tilde{f}$ *e* $\tilde{f}'$ *são contínuas por partes e 2L-periódicas.*
*Para* $n \geq 1$, *integrando por partes,*

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L (\frac{L}{2}-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\left[-\frac{L(\frac{L}{2}-x)\cos(\frac{n\pi x}{L})}{n\pi}\Big|_0^L - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\,dx\right] = \frac{L}{n\pi}\{1+(-1)^n\}.$$

*Assim, a série de senos procurada é*

$$\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}\sin(\frac{n\pi x}{L}) = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{2n\pi x}{L}),$$

*1,0* *(b) Mostre que*

$$\frac{L}{2} - x = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \quad 0 < x < L.$$

**Resolução:** *Sendo* $\tilde{f}$ *e* $\tilde{f}'$ *funções ímpares, contínuas por partes e 2L-periódicas, segue que*

$$\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}\sin(\frac{n\pi x}{L}) = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{2n\pi x}{L}) = \frac{\tilde{f}(x+)+\tilde{f}(x-)}{2},$$

*para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Em particular, para* $x \in (0, L)$, *e usando que* f *é contínua em* $(0, L)$, *temos*

$$\frac{L}{2} - x = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right), \quad 0 < x < L.$$

0,5 (c) Mostre que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

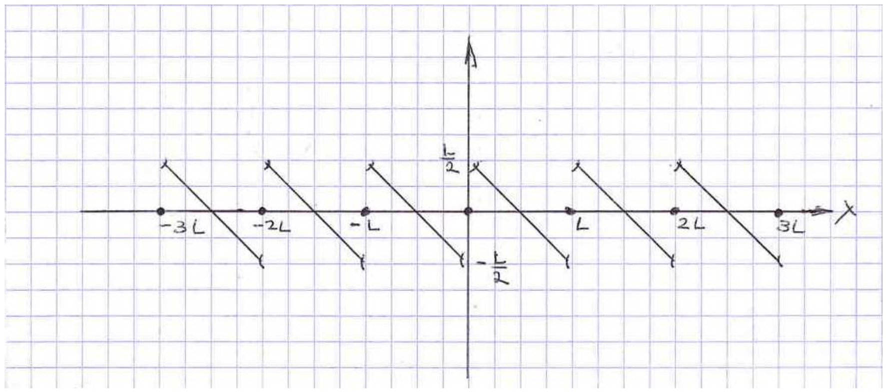
**Resolução:** *Colocando* $x = L/4$ *na última fórmula do item anterior obtemos*

$$\frac{L}{2} - \frac{L}{4} = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{sen}\left(\frac{2n\pi L/4}{L}\right) = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},$$

*pois* $\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ *para* n *par.*

0,5 (d) Esboce o gráfico, com três períodos, da função $G(x)$ para a qual a série encontrada no item (a) converge.

**Resolução:**




3,0 4. Use o método de separação de variáveis para resolver o problema da corda vibrante com extremidades livres e com velocidade inicial nula, ou seja, determine a solução $u(x,t)$ do problema

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \\ &u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Justifique todas as afirmações.

**Resolução:** *Usando o método da separação de variáveis, procuramos primeiramente soluções não triviais,* $u(x,t) = X(x)T(t)$, *que satisfaçam a equação da onda e as condições de contorno* $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \geq 0$. *As condições de contorno implicam em* $X'(0) = X'(L) = 0$.

*Temos*

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

*Dividindo por* $X(x)T(t)$,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \doteq -\lambda \in \mathbb{R}.$$

*Assim,* $X$ *e* $T$ *devem satisfazer*

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad e \quad T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0.$$

*A hipótese que a corda vibra com extremidades livres e com velocidade inicial nula implicam em* $X'(0) = X'(L) = 0$ *e* $T'(0) = 0$. *Assim* $X$ *deve satisfazer*

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

*enquanto que* $T$,

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

*Com relação a* $X$ *consideremos os três casos a seguir.*

Caso $\lambda < 0$: *aqui a solução geral é*

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

*cuja derivada vale*

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}x} - Be^{-\sqrt{\lambda}x}).$$

*Impondo as condições de contorno* $X'(0) = X'(L) = 0$ *obtemos o sistema*

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}(A - B) = 0 \\ \sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}L} - Be^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ Ae^{\sqrt{\lambda}L} - Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0.$$

*Logo,* $X \equiv 0$ *e, portanto,* $u \equiv 0$.

Caso $\lambda = 0$: *a solução geral é* $X(x) = Ax + B$. *Como* $X'(x) = A$, *impondo as condições de contorno obtemos* $X(x) = B$. *Assim,* $X(x) \doteq X_0(x) = 1$ *é uma solução não trivial de* (??).

Caso $\lambda > 0$: *aqui a solução geral é*

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\,\mathrm{sen}\sqrt{-\lambda}x$$

*cuja derivada é*

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}(-A\,\mathrm{sen}\sqrt{-\lambda}x + B\cos\sqrt{-\lambda}x).$$

*Impondo que* $X'(0) = 0$, *obtemos* $B = 0$. *Logo* $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x$ *e usando que* $X'(L) = 0$, *temos* $A\sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$, *que possui solução não trivial se* *e somente se* $L\sqrt{-\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *isto é, quando* $\lambda = \lambda_n \doteq \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Neste caso, podemos tomar* $X_n(x) \doteq \cos \frac{n\pi x}{L}$.

*Para os valores de* $\lambda = 0$ *e* $\lambda = \lambda_n \doteq -\frac{n^2\pi^2}{900}$, *resolvemos a equação* (2), *obtendo respectivamente as soluções não triviais*

$$T_0(t) = 1 \quad e \quad T_n(t) = \cos(\frac{n\pi a t}{L})$$

*Assim,* $u$ *corresponde à série*

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \cos(\frac{n\pi a t}{L}).$$

*Para que a posição inicial seja satisfeita precisamos que*

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\frac{n\pi x}{L}).$$

*Desta forma, os coeficientes* $c_0$ *e* $c_n$ *ficam determinados, quando estendemos* $f$ *a uma função* $\tilde{f}$ *que seja par e* $2L$*-periódica, através das fórmulas*

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) dx =$$

*e, para* $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

*Assim,*

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$