USP – ICMC – SME0810 - Métodos Não Paramétricos 1ª prova – 2º/2018

SOLUÇÃO

1. Dados de tensão de ruptura de blocos de concreto, em N/mm^2, foram coletados em uma amostra com 10 blocos fornecendo os resultados na primeira coluna da Tabela 1, sendo que F_n denota a função distribuição empírica e F_0 denota a função distribuição $\mathsf{Weibull}(a, b)$, com $a = 9$ e $b = 15$.
(a) Complete as colunas em branco na Tabela 1.
Solução. O tamanho da amostra é $n = 10$. Como não há valores repetidos, a função distribuição empírica F_n tem incremento igual a $1/n = 0,1$ em cada valor observado. As duas últimas colunas da Tabela 1 são obtidas utilizando a segunda e a terceira colunas.
(b) Com base no valor-p de um teste apropriado, verifique se essa distribuição faz um bom ajuste a estes dados.
Solução. A hipótese nula é simples. Aplicamos o teste de Kolmogorov-Smirnov. A estatística de teste tem valor igual ao máximo das duas últimas colunas da Tabela 1, de modo que $D_{10,\text{obs}} = 0,357$. Consultando a tabela da Nota 1, observamos que $0,323 < D_{10,\text{obs}} < 0,369$, de modo que $0{,}10 <$ valor-p $< 0{,}20$. A um nível de significância de 5%, conclui-se que a distribuição testada faz um bom ajuste aos dados.

Tabela 1: Questão 1.

Tensão (x)	$F_n(x)$	$F_0(x)$	$\lvert F_n(x) - F_0(x)\rvert$	$\lvert F_n(x - 0,01) - F_0(x)\rvert$
13,7	0,1	0,357	0,257	0,357
13,8	0,2	0,376	0,176	0,276
13,9	0,3	0,396	0,096	0,196
14,1	0,4	0,436	0,036	0,136
14,3	0,5	0,478	0,022	0,078
14,6	0,6	0,543	0,057	0,043
14,8	0,7	0,588	0,112	0,012
15,1	0,8	0,654	0,146	0,046
15,7	0,9	0,779	0,121	0,021
16,1	1,0	0,849	0,151	0,051

2. Nove laboratórios participaram de um estudo com o objetivo de verificar se a dose efetiva mediana de uma certa droga ultrapassa 0,5 mg/l. Os dados coletados foram
0,41, 0,52, 0,91, 0,45, 1,06, 0,82, 0,78, 0,68 e 0,75.
(a) Formule as hipóteses a testar e indique dois testes que poderiam ser aplicados.
Solução. Pelo enunciado, deve ser tetada $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ contra $\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$, em que θ denota a dose efetiva mediana e $\theta_0 = 0,5$ mg/l.
Supondo válidas as suposições pertinentes, os testes de Wilcoxon e do sinal poderiam ser aplicados.
(b) Apresente uma solução com base no valor-p de um teste apropriado.
Solução. A solução está baseada no teste do sinal. Supomos que a distribuição da dose efetiva é contínua com mediana única. Se B indica o número de diferenças positivas, quando a hipótese nula é verdadeira, $B \sim \mathsf{binomial}(n, 1/2)$, em que $n = 9$. Não há empates e nenhuma observação é igual ao valor de teste (θ_0). Aplicando a transformação $z_i = x_i - \theta_0$ obtemos

$$-0,09,\ 0,02,\ 0,41,\ -0,05,\ 0,56,\ 0,32,\ 0,28\, 0,18e\ 0,25,$$

de modo que $B_{obs} = 7$ (sete diferenças positivas). Calculamos valor-$p = \sum_{j=7}^{9} \mathrm{P}(B = j) = \{\binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}\}/2^9 = 0,0898$. A um nível de significância de 5%, conclui-se que a dose efetiva mediana não ultrapassa 0,5 mg/l (valor-$p > 0{,}05$).

Tabela 2: Questão 4.

Número de caras	0	1	2	3	4
Frequência	16	48	55	33	8
Probabilidade esperada	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625
Freqûencia esperada	10	40	60	40	10

3. Em uma sequência de símbolos A e B foram observadas 20 corridas de comprimento igual a 1 do símbolo A, 17 corridas de comprimento igual a 1 do símbolo B, uma corrida de comprimento igual a 2 do símbolo A e uma corrida de comprimento igual a 3 do símbolo B. Você considera que esta sequência é aleatória?
   Solução. Nesta sequência notamos muitas corridas de comprimento curto (igual a 1) para os dois símbolos. Este comportamento indica que a sequência não é aleatória.

4. Um conjunto de quatro moedas foi lançado 160 vezes e os resultados estão apresentados na Tabela 2. Pode ser afirmado que as moedas deste conjunto são não viesadas?
   Solução. Supondo que as quatro moedas são não viesadas e os lançamentos são independentes, a distribuição do número de caras (X) em quatro lançamentos é $\mathsf{binomial}(4, 1/2)$, com probabilidades $P(X = j) = \binom{4}{j}/2^4$, para $j = 0, 1, 2, 3, 4$, que são apresentadas na terceira linha da Tabela 2. Multiplicando estas probabilidades por 160 obtemos as freqûencia esperadas na quarta linha da Tabela 2. Em seguida aplicamos o teste qui-quadrado de Pearson, com $5 - 1 = 4$ graus de liberdade e estatística de teste

$$Q_{\text{obs}} = \frac{(10-16)^2}{10} + \frac{(40-48)^2}{40} + \frac{(60-55)^2}{60} + \frac{(40-33)^2}{40} + \frac{(10-8)^2}{10} = 7,24.$$

   Consultando a tabela da Nota 2, observamos que $5,39 < Q_{\text{obs}} < 7,78$, de modo que $0,10 <$ valor-$p < 0,25$. A um nível de significância de 5%, conclui-se que as moedas são não viesadas (valor-$p >$ 0,05).

Nota 1. Abaixo são apresentados alguns valores de probabilidades da cauda direita da distribuição da estatística D_n de Kolmogorov-Smirnov para $n = 10$.

d	0,323	0,369	0,409	0,489
$\mathrm{P}(D_{10} \geq d)$	0,20	0,10	0,05	0,01

Nota 2. No corpo da tabela abaixo são apresentados alguns valores de w tais que $\mathrm{P}(\chi^2_{\text{g.l.}} \geq w) = p$ para diferentes graus de liberdade (g.l.).

	p			
g.l.	0,50	0,25	0,10	0,05
4	3,36	5,39	7,78	9,49
5	4,35	6,63	9,24	11.07