SMA 0333 Cálculo III - Lista 5

Eng. Aeronáutica

1. Determine o domínio da função dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, onde

$$a)\ f_n(x) = \mathrm{e}^{nx} \quad b)\ f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} \quad c)\ f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2}$$

$$d)\ f_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} e)\ f_n(x) = \frac{n}{1+nx^2} \quad f)\ f_n(x) = \sqrt{\frac{1+nx^2}{n}}$$

$$g)\ f_n(x) = \frac{nx}{n+x^2} \quad h)\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}$$

2. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em A. Seja $B \subset A$, onde para todo $x \in B$ e todo $\varepsilon > 0$ existe inteiro positivo n_0 tal que se $n > n_0$ e $m > n_0$ então $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Mostre que existe $f : B \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in B$ temos que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

3. Seja $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$
   (a) Determine o domínio da função dada por $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
   (b) A sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente à f em $(0, +\infty)$? E em $[1, +\infty)$?
   (c) Esboce o gráfico das funções f_1, f_2 e f_3.

4. Verifique se a convergência é uniforme onde $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e:

$$a)\ f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} \quad 0 \le x \le 1 \quad b)\ f_n(x) = \left\{ \begin{array}{rl} 1-nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \end{array} \right\}$$

$$c)\ f_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad x \ge 0 \quad d)\ f_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e)\ f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad 0 \le x \le 1 \quad f)\ f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad x \in [1, +\infty)$$

5. Mostre que a sequência de funções $f_n(x) = \cos(nx)$, com $x \in [0, 2\pi]$ não é convergente.

6. Dados um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ sequência numérica convergente para um número $a \in \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos $f_n : X \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = a_n g(x)$. Mostre que a sequência $\{f_n\}$ converge em X para $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ag(x)$.

   Com isso mostre que $f_n(x) = \frac{x}{n}$ converge para a função nula para $x \in \mathbb{R}$.

7. Mostre que a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ converge para $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 0$ se $x \in [0,1)$ e $f(1) = 1$.

8. Se a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente, onde $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1 + x^{2n}}$ converge uniformemente para todo número real.

9. Estude a convergência uniforme das seguintes séries de funções:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2},\ x \in \mathbb{R}$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^4},\ x \in \mathbb{R}$ *c)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx) + \mathrm{sen}(nx)}{n^2},\ x \in \mathbb{R}$

   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in [-r, r],\ r > 0$ *e)* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n,\ x \in [-r, r],\ 0 < r < \frac{1}{2}$

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n + 1},\ x \in [-r, r],\ 0 < r < 1.$

10. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em A à uma função $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Seja $g : A \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$, $|g(x)| \leq M$, onde $M > 0$ é um número real fixo. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} g f_n$ converge uniformemente em A à função $h(x) = f(x)g(x)$.

11. Mostre que:

   (a) Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}(\frac{x}{n^2})$ então

   $$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

   Dica: Use o fato que quando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ então $\mathrm{sen}(x) < x$.

   (b) Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ então

   $$\int_1^x f(t)dt = f(x) - 1$$

(c) Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ então

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

12. (a) Verifique que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge uniformemente, dentre $\mathbb{R}$, à função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$$

(b) Justifique a igualdade

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} arctg\left(\frac{1}{n}\right)$$

13. Seja a_k, $k \geq 1$, uma sequência numérica dada. Suponha que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ convirja uniformemente em $]-\pi,\pi[$. Seja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$, $x \in]-\pi,\pi[$. Prove que para todo natural $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

14. Sejam a_k, $k \geq 0$, e b_k, $k \geq 1$, sequências numéricas dadas. Suponha que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \cos(kx)]$$

convirja uniformemente em $]-\pi,\pi[$. Seja

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \cos(kx)], \quad x \in]-\pi,\pi[.$$

Prove que para todo natural $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \quad k \geq 0,$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \quad k \geq 0.$$

15. Considere a função f dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$$

   (a) Qual o domínio de f?

   (b) Mostre que f é contínua.

   (c) Justifique a igualdade:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^4}.$$

   (d) Prove que para todo x no domínio de f,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$$

   Justifique todas as suas afirmações.

16. (**Critério de Cauchy para sequências**): Mostre que uma sequência de funções $\{f_n\}$, definidas em $B \subset \mathbb{R}$, converge uniformemente para $f : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado existir um natural n_0 tal que, para quaiquer que sejam os naturais n e m com $m > n_0$ e $n > n_0$, e para todo $x \in B$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

17. (**Critério de Cauchy para séries**): Mostre que a série de funções $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ converge uniformemente, em B, para a função $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um natural n_0 tal que, quaisquer que sejam os naturais n e m com $m > n_0$ e $n > n_0$, e para todo $x \in B$,

$$\left| \sum_{k=0}^{m} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right|.$$