Cálculo Numérico / Métodos Numéricos

Determinação numérica de autovalores e autovetores
Método de Francis (QR)

25 Nov 2008 . 15:36

Método de Francis (QR)

- Decompomos a matriz em um produto de duas matrizes.

$A_1 = Q_1R_1$

- Para obter a matriz seguinte da seqüência $\{A_k\}$, invertemos a ordem do produto:

$A_2 = R_1Q_1$

E novamente decompomos e continuamos o processo...

Método de Francis (QR)

$A_1 = A$, $A_1 = Q_1 R_1$

$A_2 = R_1 Q_1$ e decompõe $A_2 = Q_2 R_2$,

$A_3 = R_2 Q_2$ e decompõe $A_3 = Q_3 R_3$,

...

$A_k = R_{k-1} Q_{k-1}$ e decompõe $A_k = Q_k R_k$

Método QR

- No caso do método QR:
  - A primeira matriz do produto é ortogonal ($QQ^{t} = Q^{t}Q = I$)
  - A segunda matriz é uma matriz triangular superior.

Observações

- A seqüência $\{A_k\}$ converge para uma matriz triangular superior.

- Os elementos da diagonal da matriz A_k são os autovalores procurados.

Observações

- O processo termina quando o maior valor absoluto da matriz A_k (abaixo da diagonal principal) for menor que a precisão dada (ε).

- Em cada passo do método é necessário determinar as matrizes Q_k e R_k,

  Q_k: ortogonal ($QQ^t = Q^tQ = I$)

  R_k: triangular superior.

Como obter Q e R ?

$$U_2 U_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Queremos A = QR

Vamos achar uma matriz U_1, ortogonal, tal que a multiplicação de U_1 por A zera o elemento a_{21}.

Vamos achar uma matriz U_2, ortogonal, tal que a multiplicação de U_2 por U_1A zera o elemento a_{31}.

e assim por diante...

Como obter Q e R ?

- Logo:

$$U_s \ldots U_2 U_1 A = R \quad (s=(n-1)+(n-2)+\ldots+1=(n-1)n/2)$$

Como as matrizes U são ortogonais, $U^{-1} = U^T$:

$$A = \underbrace{U_1^T U_2^T \ldots U_s^T}_{Q} R$$

Matriz de rotação

- Como matriz U, vamos usar matrizes de rotação:

Definição: Uma matriz de rotação U difere da matriz identidade em quatro elementos. Esses quatro elementos são da forma:

$$u_{qq} = u_{pp} = cos\varphi$$

$$u_{pq} = -u_{qp} = sen\varphi, \text{ para qualquer } \varphi \text{ e } p \neq q.$$

Para qualquer matriz de rotação U, a matriz UA difere de A apenas na p-ésima e q-ésima linha.

Para qualquer p≠q, o ângulo φ pode ser escolhido de modo que o elemento qxp de UA seja zero.

Matriz de rotação

- Ex.: 3x3:

$$\begin{pmatrix} cos\ \varphi & 0 & sen\ \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\ \varphi & 0 & cos\ \varphi \end{pmatrix}$$

- Ex.: Caso geral:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & cos\ \varphi & 0 & \dots & 0 & sen\ \varphi & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & \vdots & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & -sen\ \varphi & 0 & \dots & 0 & cos\ \varphi & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Obtendo cos φ e sen φ

$$u_{qq} = u_{pp} = cos\varphi$$

$$u_{pq} = -u_{qp} = sen\varphi$$

q p

- Para zerar a_{21}, fazemos U_1A:

$$\begin{pmatrix} cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -sen\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a'_{21} = -sen\varphi a_{11} + cos\varphi a_{21}$$

- No caso geral, queremos zerar o elemento a_{qp}.

$$a'_{qp} = -sen\varphi a_{pp} + cos\varphi a_{qp}$$

Zerando o elemento a_{pq}

$$a'_{qp} = -sen\varphi a_{pp} + cos\varphi a_{qp} \quad = 0$$

$$a'_{qp} = -a_{pp}\sqrt{1 - cos^2\varphi} + cos\varphi a_{qp} \quad = 0$$

Então:

$$a_{pp}\sqrt{1 - cos^2\varphi} = cos\varphi a_{qp}$$

$$a_{pp}^2(1 - cos^2\varphi) = cos^2\varphi a_{qp}^2$$

$$(a_{pp}^2 + a_{qp}^2)cos^2\varphi = a_{pp}^2$$

$$\boxed{cos\varphi = \frac{a_{pp}}{\sqrt{a_{pp}^2 + a_{qp}^2}}}$$

$$\boxed{sen\varphi = \frac{a_{qp}}{\sqrt{a_{pp}^2 + a_{qp}^2}}}$$

Exemplo geral (caso 3x3)

- Zerando o elemento a_{21}:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U_1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$-s\ a_{11} + c\ a_{21} = 0, \text{ onde}$$

$$s = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}} \qquad c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}$$

Exemplo geral (caso 3x3)

- Zerando o elemento a_{31}:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}}_{U_2} \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a''_{32} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

$$-\,s\ a'_{11} + c\ a_{31} = 0,\ \text{onde}$$

$$s = \frac{a_{31}}{\sqrt{a'^2_{11} + a^2_{31}}} \qquad c = \frac{a'_{11}}{\sqrt{a'^2_{11} + a^2_{31}}}$$

Exemplo geral (caso 3x3)

- Zerando o elemento a_{32}:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}}_{U_3} \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a''_{32} & a''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ 0 & a''_{22} & a''_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{pmatrix}$$

$$-\ s\ a'_{22} + c\ a''_{32} \ = \ 0$$

$$s \ = \ \frac{a''_{32}}{\sqrt{a'^2_{22} + a''^2_{32}}} \qquad\qquad c \ = \ \frac{a'_{22}}{\sqrt{a'^2_{22} + a''^2_{32}}}$$

Exemplo geral (caso 3x3)

- Obtendo as matrizes Q e R:

$$U_3 U_2 U_1 A = R_1$$

$$A = \underbrace{U_1^t U_2^t U_3^t}_{Q_1} R_1 \ .$$

Exemplo

- Determinar os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com precisão 10^{-2}.

Solução: Como a_{21} já é igual a zero, não precisamos nos preocupar com ele. Começamos zerando a_{31}.

$$U_1 = I$$

Exemplo (solução)

- Obtendo U_2 (zerando a_{31})

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.8944$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.8944 & 0 & 0.4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.4472 & 0 & 0.8944 \end{pmatrix}$$

Exemplo (solução)

$$U_2U_1A = U_2IA = U_2A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.2360 & 0 & 1.3416 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4472 \end{pmatrix}}_{R_1}$$

Usaríamos a matriz U_2U_1A para calcular agora a matriz U_3. Mas veja que isso não é necessário, pois a_{32} já é igual a zero! Logo, $U_2A = R_1$ e:

$$A_1 = A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8944 & 0 & -0.4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4472 & 0 & 0.8944 \end{pmatrix}}_{U_2^t} \begin{pmatrix} 2.2360 & 0 & 1.3416 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4472 \end{pmatrix} = Q_1R_1$$

Calculando A_2 e verificando critério de parada.

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 2.5998 & 0 & 0.2000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.2000 & 0 & 0.4000 \end{pmatrix}.$$

Não precisamos de U_1 nem de U_3

Maior que 10^{-2}, continuamos.

Iteração 2

- Determinar U_2 tal que U_2A_2 tem $a'_{31} = 0$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{0.2000}{\sqrt{(2.5998)^2 + (0.2000)^2}} = 0.0767 \\ c &= \frac{2.5998}{\sqrt{(2.5998)^2 + (0.2000)^2}} = 0.9971 \end{aligned}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.9971 & 0 & 0.0767 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.0767 & 0 & 0.9971 \end{pmatrix}$$

Iteração 2

$$U_2 A_2 = \begin{pmatrix} 2.6076 & 0 & 0.2301 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3935 \end{pmatrix} = R_2$$

$$A_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.9971 & 0 & -0.0767 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.0767 & 0 & 0.9971 \end{pmatrix}}_{U_2^t} \begin{pmatrix} 2.6076 & 0 & 0.2301 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3835 \end{pmatrix} = Q_2 \, R_2$$

Iteração 3 e critério de parada

$$A_3 = R_2\ Q_2\ = \begin{pmatrix} 2.6177 & 0 & 0.0294 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.0094 & 0 & 0.3824 \end{pmatrix}$$

- Todos os elementos abaixo da diagonal são menores que o erro pedido (10^{-2})

- Logo, os autovalores são os elementos da diagonal:

λ = 2.6177, 1, 0.3824

(Os autovalores são, com precisão maior: 2.610834, 1 e 0.381966).

Exercícios

7.13 - *Usando o método QR, determinar todos os auto-valores das matrizes:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ -9 & -2 & -3 \\ 14 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

com precisão de 10^{-2}.

7.14 - *Usando o método QR, uma única vez, na matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

é possível estimar seus auto-valores? (Use aritmética exata).