

Entregar Exercício 11 em 13/07/2011

Exercício 1. Seja $Y \sim Poisson(\lambda)$ e $X|Y = y \sim B(n, p)$.

- (a) Calcule a função de probabilidade de X .
- (b) Determine a função de probabilidade condicional de Y dado $X = x$.

Exercício 2. Suponha que a tabela seguinte represente a distribuição de probabilidade conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y) . Calcule todas as distribuições marginais e condicionais.

$Y X$	1	2	3
1	1/12	1/6	0
2	0	1/9	1/5
3	1/18	1/4	2/15

Exercício 3. Uma amostra de 220 clientes de uma clínica dentária foi selecionada. As variáveis tempo, em anos, decorridos desde a última visita ao dentista, V , e o número de cáries encontradas, C , é apresentado na próxima tabela.

$V C$	0	1	2
1	18	16	10
2	34	45	38
3	12	16	31

- (a) Obtenha as tabelas marginais de frequência..
- (b) Construa a tabela de frequências esperadas, caso houvesse independência entre as variáveis.

Exercício 4. A função de probabilidade conjunta entre as variáveis aleatórias X e Y é apresentada na próxima tabela.

$X Y$	-2	0	2	4
-1	0,1	0,2	0,1	0,2
1	0,2	0	0,1	0,1

- (a) Obtenha as funções de probabilidade marginais das variáveis.
- (b) X e Y são independentes?
- (c) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y .

Exercício 5. Na caixa I existem duas bolas numeradas 0 e 1, enquanto que a caixa II contém duas bolas numeradas -1 e 0. Uma bola é retirada aleatoriamente de cada caixa, de forma independente uma da outra. A esse experimento, associamos as variáveis aleatórias: X : número da bola retirada na caixa I, Y : soma dos valores das duas bolas retiradas, e Z : diferença, em módulo, desses valores.

- (a) Determine a função de probabilidade conjunta entre X e Y e entre Y e Z .
- (b) Verifique se X e Y são independentes. Idem para Y e Z .
- (c) Calcule a covariância entre X e Y .
- (d) Obtenha $Var(X + Y)$.

Exercício 6. A variável aleatória X é Bernoulli com $p = 0,4$ e Y é Binomial com $p = 0,5$ e $n = 3$. Admita que X e Y são independentes.

- (a) Determine $P(X = 0|Y = 2)$.
- (b) Obtenha a função de probabilidade conjunta de X e Y e do produto XY .
- (c) Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $E(XY)$ e verifique que $E(X)E(Y) = E(XY)$.
- (d) Determine o valor de $Cov(X, Y)$ e de $\rho_{X,Y}$.

Exercício 7. Para o lançamento de dois dados equilibrados, defina duas variáveis aleatórias. Seja X o número de vezes que aparece a face 2 e Y igual a 0 se a soma for par e 1, caso contrário.

- (a) Determine a função de probabilidade conjunta de X e Y .
- (b) Calcule $E(X)$, $E(Y)$ e $E(X + Y)$.
- (c) Verifique se X e Y são independentes.
- (d) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .

Exercício 8. Considere a frase: “Para mais saúde pratique mais esporte”. Escolha ao acaso uma palavra dessa frase e considere as variáveis aleatórias V : número de vogais e C : número de consoantes.

- (a) Determine a função de probabilidade conjunta de V e C .
- (b) Obtenha as funções de probabilidade marginais.
- (c) Calcule os valores esperados dessas variáveis. As variáveis são independentes? Justifique. Se a escolha acima resultou em $V = 2$, qual é a probabilidade da palavra “mais” ter sido escolhida?

Exercício 9. Sejam $X \sim Bin(5; 0,5)$ e $Y \sim Bin(3; 0,2)$ independentes. Determine o valor esperado e a variância da variável $2X - 3Y$.

Exercício 10. Sejam $U = Y^2$ e $V = X + Y$, com função de probabilidade conjunta entre X e Y dada na tabela a seguir:

$X Y$	0	1	2
-1	1/12	1/6	1/3
1	1/6	1/4	0

- (a) Obtenha a função de probabilidade conjunta U e V .
- (b) Calcule $P(U = 4|V = 1)$.
- (c) Determine $Cov(U, V)$.

Exercício 11. Considere duas variáveis aleatórias discretas A e B . Admita que A assume somente valores a_1, a_2 , e a_3 , enquanto B os valores b_1 e b_2 . Sabemos que:

$$P(A = a_1) = 0,2; P(A = a_3) = 0,5; P(B = b_1) = 0,6;$$

$$P(A = a_1, B = b_1) = 0,12; \text{ e } P(B = b_2|A = a_3) = 0,5.$$

- (a) Construa a tabela de dupla entrada entre A e B .
- (b) As variáveis são independentes? Justifique.
- (c) Calcule $P(A = a_2|B = b_1)$.