PIPGEs ICMC – USP/UFSCar

EST5102 – Inferência Estatística – 2024/1

$2^{\underline{a}}$ lista de exercícios

1. Considere uma distribuição da família exponencial com parâmetros naturais $\eta_1, \ldots, \eta_k$ e estatísticas suficientes naturais $T_1(\boldsymbol{X}), \ldots, T_k(\boldsymbol{X})$, $k \geq 2$.

   (a) Se as estatísticas $T_1(\boldsymbol{X}), \ldots, T_k(\boldsymbol{X})$ satisfazem uma restrição linear, prove que o modelo $\{P_{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} \in H\}$ não é identificável.
   Considere apenas o caso em que $k = 2$ e $T_1(\boldsymbol{X}) = T_2(\boldsymbol{X})$.

   (b) Se os parâmetros naturais $\eta_1, \ldots, \eta_k$ satisfazem uma restrição linear, prove que a dimensão da distribuição pode ser reduzida.

2. Prove que as distribuições abaixo pertencem à família exponencial de distribuições.

   (a) $\mathsf{gama}(\alpha, \lambda)$, α conhecido.

   (b) $\mathsf{gama}(\alpha, \lambda)$, λ conhecido.

   (c) $\mathsf{beta}(r, s)$, r conhecido.

   (d) $\mathsf{beta}(r, s)$, s conhecido.

3. $X_1, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma população com uma das seguintes funções densidade:

   (a) $f(x; \theta) = \theta\, x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x),\ \ \theta > 0.$

   (b) Weibull:
   $f(x; \theta) = \theta a x^{a-1} \exp(-\theta x^a) I_{(0,\infty)}(x),\ \ \theta > 0,\ \ a > 0.$

   (c) Pareto:
   $f(x; \theta) = \theta a^\theta x^{\theta+1} I_{(a,\infty)}(x),\ \ \theta > 0,\ \ a > 0.$

   Prove que as três distribuições são da família exponencial (a conhecido) e apresente as estatísticas suficientes.

4. Qual(is) das seguintes distribuições pertence(m) à família exponencial?

   (a) $f(x; \theta) = \exp\{-2\log(\theta) + \log(2x)\}\, I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta > 0$.

   (b) $f(x; \theta) = 1/9 I_{\{1+\theta, 2+\theta, \ldots, 9+\theta\}}(x)$.

   (c) $\mathsf{normal}(\theta, \theta^2)$, $\theta > 0$.

   (d) $f(x; \theta) = 2(x + \theta)/(1 + 2\theta)\, I_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.

   (e) $f(x; \theta)$ é a função massa de probabilidade condicional de uma variável X com distribuição $\mathsf{binomial}(n, \theta)$ dado $X > 0$, $0 < \theta < 1$.

5. Prove que as distribuições $\mathsf{beta}(r, s)$ e $\mathsf{gama}(\alpha, \lambda)$ são da família exponencial biparamétrica. Apresente as estatísticas suficientes.

6. Seja X uma variável aleatória que pode assumir os valores $v_1 < v_2 < \cdots < v_{k+1}$ com probabilidades $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$, respectivamente, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_{k+1})^\top$ desconhecido, variando em $\Theta = \{(\theta_1, \ldots, \theta_{k+1})^\top : \theta_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, k+1,\ \sum_{j=1}^{k+1} \theta_j = 1\}$. Considere $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} X$. Seja N_j a frequência do valor v_j. Prove que a distribuição de $(X_1, \ldots, X_n)^\top$ é da família exponencial e apresente as estatísticas suficientes. Considere também o caso $n = 1$.

7. Considere a família de distribuições série de potências com função massa de probabilidade dada por
$$f(x; \theta) = P_\theta(X = x) = \frac{a(x)\theta^x}{\tau(\theta)}\, I_{\{0,1,\ldots,M\}}(x),$$
em que $M \in \mathbb{Z}_+$ é uma constante conhecida, $a(x) > 0$, $\theta > 0$ e $\tau(\theta) = \sum_{x=0}^{M} a(x)\theta^x$ é a constante normalizadora.

   (a) Mostre que essa família de distribuições faz parte da família exponencial uniparamétrica e apresente uma estatística suficiente para θ.

   (b) Mostre que as distribuições binomial, binomial negativa e Poisson são casos especiais da distribuição série de potências e determine θ, M e $\tau(\theta)$.

8. A família exponencial de distribuições k-paramétrica, $k \geq 2$, é dita curvada se a dimensão p do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é menor do que k. Verifique se as distribuições abaixo são curvadas. Tente representar o espaço paramétrico por uma curva.

   (a) $\mathsf{normal}(\theta, \theta)$, $\quad \theta > 0$.

   (b) $\mathsf{gama}(\alpha, 1/\alpha)$.

   (c) $f(x; \theta) = \tau(\theta) \exp\{-(x - \theta)^4\}$, em que $\tau(\theta)$ é a constante de normalização, $\theta \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.