

Lista 2

1. Coloque na forma padrão os seguintes problemas de programação linear:

a) Maximizar $-X_1 - 7 X_2 + 8 X_3 + X_4$

Sujeito a

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 - X_3 + X_4 &\leq 4 \\ X_1 + X_3 &\geq 9 \\ X_2 + X_3 + X_4 &\geq 6 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Minimizar $3 X_1 - 3 X_2 + 7 X_3$

Sujeito a

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\leq 40 \\ X_1 + 9 X_2 - 7 X_3 &\geq -5 \\ 5 X_1 + 3 X_2 &\geq 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \leq 0 \end{aligned}$$

c) Maximizar $-X_1 + X_2 - 3X_3$

Sujeito a

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\leq 25 \\ X_1 + X_2 - X_3 &\geq 10 \\ |5 X_1 + 3 X_2| &\leq 100 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \text{ livre} \end{aligned}$$

2. Escreva uma solução factível para o problema 1(a). A solução que voce escreveu é básica? Senão for escreva uma solução básica para o problema 1(a).
3. Escreva o problema 1(a) na forma matricial.
4. Escreva a matriz A e os vetores b e c (função objetivo) do problema 1(c).
5. Transforme o problema 1(a) em um problema de mínimo equivalente.
6. Esboce as regiões factíveis do conjunto $\{x \mid Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}$ onde A e b são dados abaixo. A região factível é vazia? É limitada ?

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

7. Dado o problema de Programação Linear abaixo, transforme as restrições em um sistema de equações lineares, calcule todas as soluções básicas, informe quais soluções são viáveis e indique qual é a solução ótima.

a) maximizar $z = x_1 + x_2$
 sujeito a: $x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 5$
 $2 \cdot x_1 + x_2 \leq 4$
 $x \geq 0$

b) maximizar $z = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$
 sujeito a: $2 \cdot x_1 + x_2 \leq 6$
 $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 9$
 $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
\text{c) maximizar } z &= 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\
\text{sujeito a: } x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 9 \\
x_1 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 4 \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

8. Para a forma padrão da programação linear, defina clara e sucintamente:

- solução básica;
- solução factível;
- solução básica factível;
- solução ótima;
- solução básica ótima;
- indique as condições para que uma solução factível não seja básica;
- indique as condições para que uma solução factível não seja ótima.

9. Considere os problemas:

a) **Maximizar** $f(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2$
 Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Resp. (0 1)

b) **Minimizar** $f(x_1, x_2) = -x_1 + x_2$
 Sujeito a:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_1 \leq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Resp. (0 2)

c) **Minimizar** $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
 Sujeito a:

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &\geq 2 \\
2x_1 - x_2 &\leq 6 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Resp. (0 2)

d) **Minimizar** $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
 Sujeito a:

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &\geq 2 \\
2x_1 - x_2 &\leq 6 \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Resp. Infactível

Para cada um dos problemas, responda as seguintes questões:

- Resolva o problema graficamente (isto é, desenhe a região factível e a(s) solução(ões) ótima(s)).
- A solução $x_1 = x_2 = 0$ é um vértice da região factível? Identifique todos os vértices da região factível.
- Desenhe as soluções $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1) = (1, 1)$ e $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, x_2^2) = (5, 1)$. Estas soluções são factíveis? Por que?
- Considere agora uma outra função objetivo: **Minimizar** $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Verifique se a solução ótima obtida no item a. é também ótima considerando esta nova função objetivo. Há múltiplas soluções ótimas? Identifique no gráfico.
- Considere que o valor de b_1 seja incrementado de 1 unidade, o que aconteceria com a solução do problema?

10. Considere a região de factibilidade dada pelas seguintes restrições:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 2 \\
2x_1 - x_2 &\leq 6 \\
x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

- a) reescreva as restrições na forma padrão.
 b) encontre todas as soluções básicas para o sistema.
 c) dada a solução básica (0 0 2 6 1), escreva o sistema na forma $B X_B = b - NB X_{NB}$.
 d) qual o valor máximo que x_1 pode assumir no sistema dado em (c) de modo que obtenhamos uma nova solução básica factível?

11) Utilize o Método Simplex para resolver os seguintes problemas

- 1.** maximizar $z = 10.x_1 + 1.x_2$
 sujeito a: $2.x_1 + 5.x_2 \leq 11$
 $\mathbf{x} \geq 0$
- 2.** maximizar $z = 1.x_1 + 1.x_2$
 sujeito a: $1.x_1 + 5.x_2 \leq 5$
 $2.x_1 + 1.x_2 \leq 4$
 $\mathbf{x} \geq 0$
- 3.** maximizar $z = 3.x_1 + 4.x_2$
 sujeito a: $2.x_1 + 1.x_2 \leq 6$
 $2.x_1 + 3.x_2 \leq 9$
 $\mathbf{x} \geq 0$
- 4.** minimizar $z = 1.x_1 + 2.x_2$
 sujeito a: $1.x_1 + 3.x_2 \leq 11$
 $2.x_1 + 1.x_2 \leq 9$
 $\mathbf{x} \geq 0$

12) Utilize o Método Simplex na forma de tabelas para resolver os seguintes problemas.

- a.** maximizar $z = 1.x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 + 1.x_4$
 sujeito a: $3.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 + 4.x_4 \leq 10$
 $5.x_1 + 3.x_2 + 2.x_3 + 5.x_4 \leq 5$
 $\mathbf{x} \geq 0$
- b.** maximizar $z = 1.x_1 + 9.x_2 + 1.x_3$
 sujeito a: $1.x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 \leq 9$
 $3.x_1 + 2.x_2 + 2.x_3 \leq 15$
 $\mathbf{x} \geq 0$