11ª Lista de Exercícios - 03/06/2011

1. Desenvolva $f(x) = x^2, \quad 0 \leq L,$

   (a) em uma série de Fourier de cossenos,

   (b) em uma série de Fourier de senos e

   (c) em uma série de Fourier.

   (d) Em cada um dos casos estude a convergência da série.

2. Esboce o gráfico de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen}\, nx)$$

   onde a série acima é a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 2π, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

3. Desenvolver a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$$

   no intervalo $]0, 2[$:

   (a) em uma série de Fourier em senos.

   (b) em uma série de Fourier em cossenos.

4. Desenvolva a função dada em uma série de cossenos ou seno, conforme o caso. Em cada um dos casos estude a convergência da série.

   (a) $f(x) = x|x|, \quad -1 < x < 1$

   (b) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -2\pi < x < -\pi \\ x, & -\pi \leq x < \pi \\ \pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

   (c) $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

5. Siga os passos a seguir para determine uma solução particular da equação

$$y'' + 4y = f(x),$$

   onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período 2π é dada por $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$.

Passo 1 Desenvolva a função dada em uma série de Fourier e use os teoremas de convergência para mostrar que

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nx)$$

Passo 2 Considere $f_1(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x)$ e determine uma solução particular y_1 para a equação

$$y'' + 4y = f_1(x).$$

(sugestão: tentativa $y_1(x) = A + B\cos x$ com A e B a serem determinados)

Passo 3 Vamos agora determinar uma solução particular y_2 para a equação

$$y'' + 4y = \cos(2x).$$

Temos aqui o fenômeno de ressonância comentado em aula. O método utilizada no item anterior não funciona neste caso. Verifique que $y_2(x) = \frac{1}{4}x\sin(2x)$ é uma solução particular. (Para os alunos da turma de Mecatrônica que já estudaram EDO, tente encontrar y_2 por um método já estudado na disciplina de EDO.)

Passo 4 Mostre que

$$y_3(x) = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{(4-n^2)n^2}\cos(nx)$$

é uma solução particular para

$$y'' + 4y = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2}\cos(nx).$$

(Perceba a necessidade do passo 3.)

Passo 5 Mostre que $y_p = y_1 + y_2 + y_3$ é uma solução particular da equação dada.

6. (Identidade de Parseval) Supondo que a série de Fourier de f convirja uniformemente para f em (-L,L), prove a seguinte identidade conhecida como Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

7. Escreva a identidade de Parseval correspondente à série de Fourier de cossenos da função $f(x) = x$, $0 < x < 2$. Com base nisto, determine a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.