

1. Considere a função f dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$$

- (a) Qual o domínio de f ?
- (b) Mostre que f é contínua.
- (c) Justifique a igualdade:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^4}.$$

- (d) Prove que para todo x no domínio de f ,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$$

Justifique todas as suas afirmações.

2. Determine o raio de convergência da série. Para quais valores de x a série converge a) absolutamente, b) condicionalmente.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências ímpares de x são nulos. Para contornar essa dificuldade faça $y = x^2$ e analise a série resultante)

$$(j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

(A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências pares de x são nulos.)

$$(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n$$

$$(l) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} (x-3)^n$$

3. Determine as expansões em séries de potências das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas.

$$(a) \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$(b) \frac{1}{(1+x)^3}$$

4. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$$

5. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

6. Mostre que $\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} (x-2)^n$, $0 < x < 4$.

7. Use séries de potências para aproximar a integral $\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$ com precisão de quatro casas decimais.

8. Dado um número inteiro positivo k , considere a k -ésima função de Bessel de primeira espécie, definida por

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k} \quad (\text{série de Bessel})$$

Determine o raio de convergência da série de Bessel.

9. Mostre que a função de Bessel J_0 é solução da edo:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$