6ª Lista de Exercícios - 25/04/2011

1. Determine o raio de convergência da série. Para quais valores de x a série converge a) absolutamente, b) condicionalmente.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}}$

   (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
   (A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências ímpares de x são nulos. Para contornar essa dificuldade faça $y = x^2$ e analise a série resultante)

   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$
   (A fórmula do raio de convergência não pode ser aplicada diretamente pois todos os coeficientes das potências pares de x são nulos.)

   (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$

   (l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}(x-3)^n$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+2}$

   (n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

   (o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)2^n}$

   (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

   (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$

   (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

   (s) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

   (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$

   (u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\ln(n+2)}$

   (v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$

   (w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

2. Determine as expansões em séries de potências das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas.

   (a) $\frac{1}{(1+x)^2}$

   (b) $\frac{1}{(1+x)^3}$

3. Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$$

4. Calcule a soma de cada uma das seguintes séries.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

5. Mostre que a função de Bessel

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

satisfaz a equação diferencial

$$xy'' + y' + xy = 0.$$