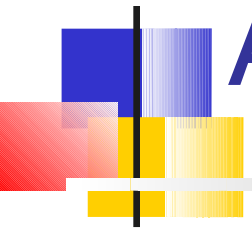


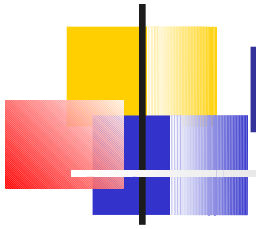
Árvores-B (Parte I)

SCC-503 Algoritmos e Estruturas de Dados II

Thiago A. S. Pardo

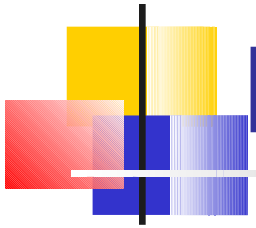
Leandro C. Cintra

M.C.F. de Oliveira



Problema

- Cenário até então
  - Acesso a disco é caro (lento)
  - Pesquisa binária é útil em índices ordenados...
  - mas com índice grande que não cabe em memória principal, pesquisa binária exige muitos acessos a disco
    - Exemplo: 15 itens podem requerer 4 acessos, enquanto 100.000 itens podem requerer até 17 acessos

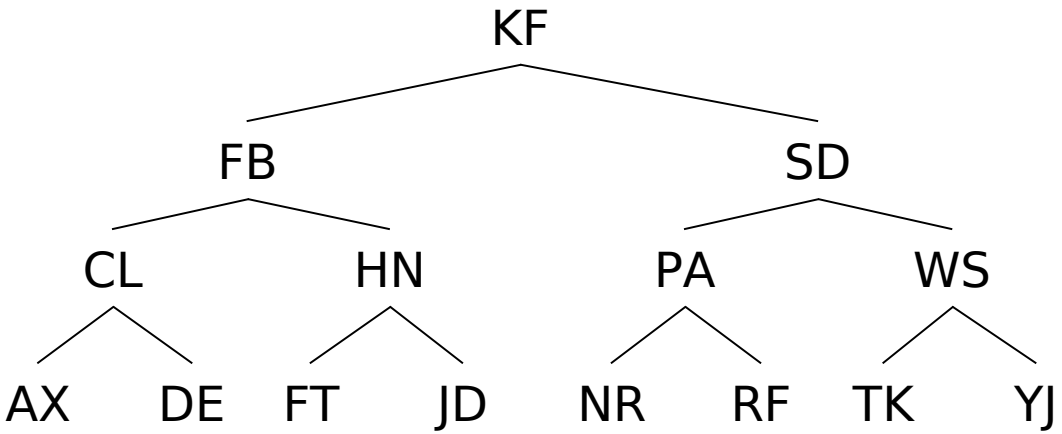


Problema

- Cenário
  - Manter em disco um índice ordenado para busca binária tem custo proibitivo
  - Necessidade de método com inserção e eliminação com apenas efeitos locais, isto é, que não exija a reorganização total do índice

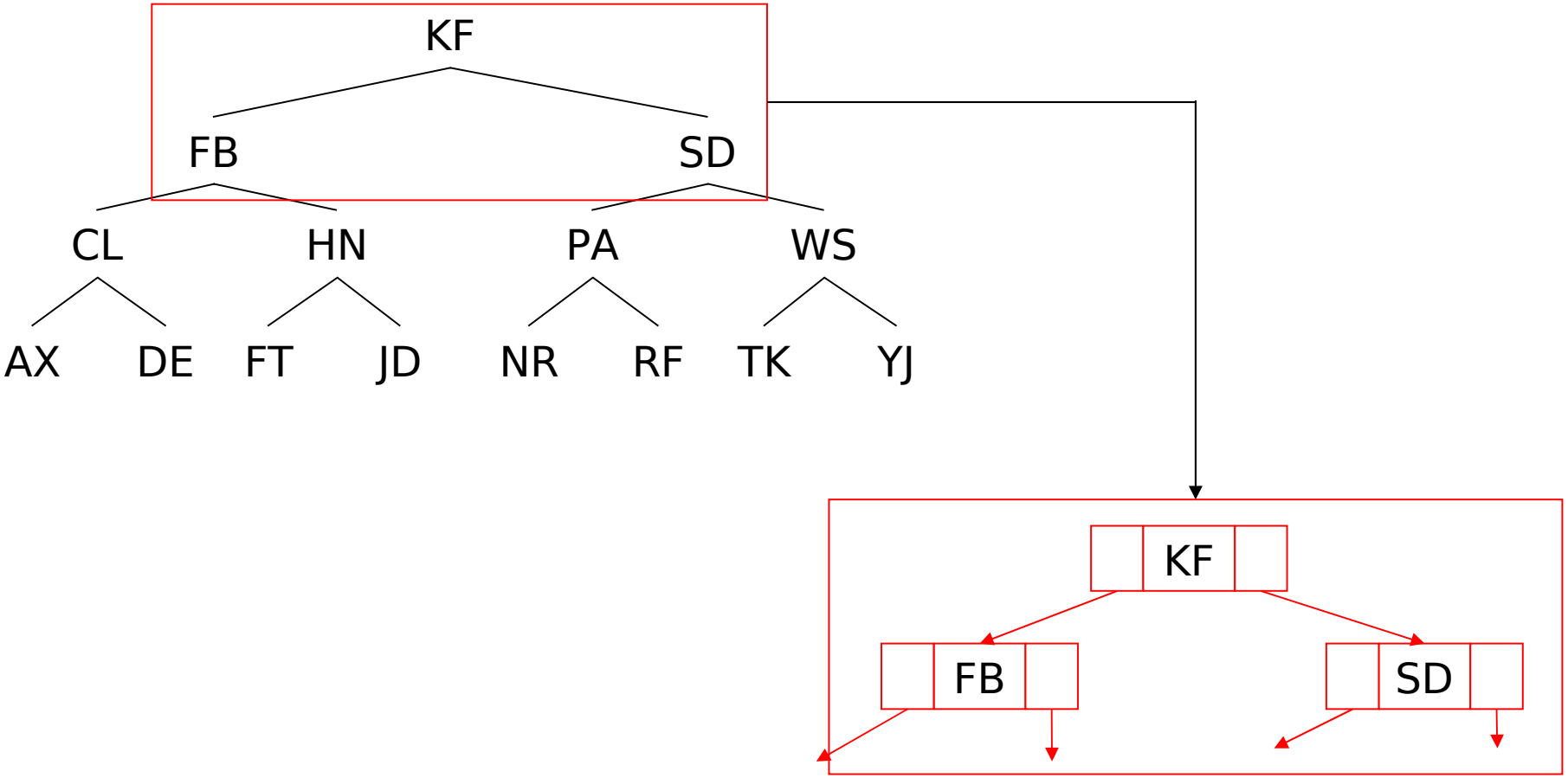
Solução: árvores binárias de busca?

AX, CL, DE, FB, FT, HN, JD, KF, NR, PA, RF, SD, TK, WS, YJ

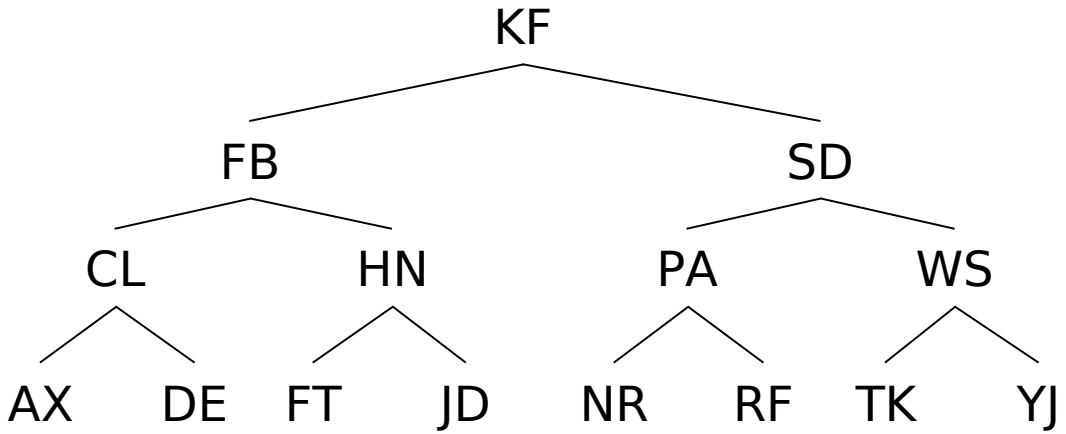


Vetor ordenado e representação por árvore binária

Solução: árvores binárias de busca

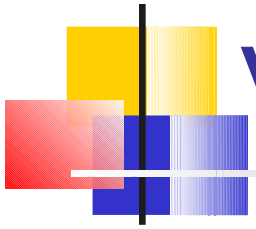


Representação da árvore no arquivo



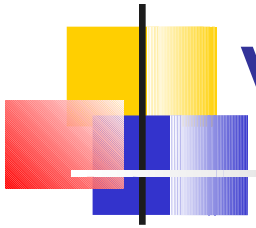
	Chave	Filho esq.	Filho dir.
0	FB	10	8
1	JD		
2	RF		
3	SD	6	13
4	AX		
5	YJ		
6	PA	11	2
7	FT		
8	HN	7	1
raiz → 9	KF	0	3
10	CL	4	12
11	NR		
12	DE		
13	WS	14	5
14	TK		

Registros são mantidos em arquivo, e ponteiros (**esq** e **dir**) indicam onde estão os registros filhos



Vantagens

- Quais são as vantagens de se utilizar ABBs?



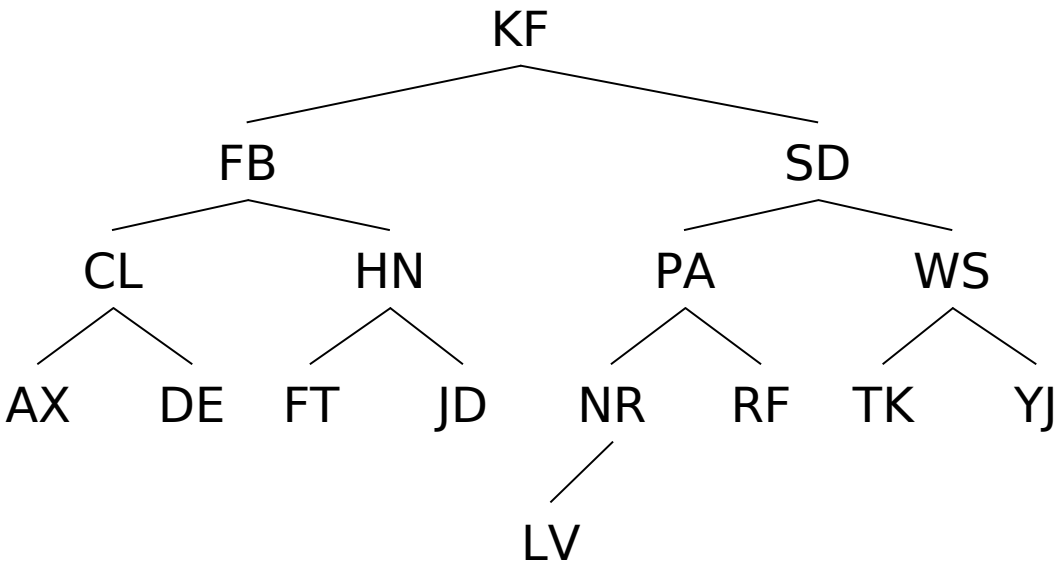
Vantagens

- Registros não precisam estar fisicamente ordenados
  - Ordem lógica: dada por ponteiros **esq** e **dir**

- Inserção de uma nova chave no arquivo
  - É necessário saber onde inserir
  - Busca pelo registro é necessária, mas reorganização do arquivo não

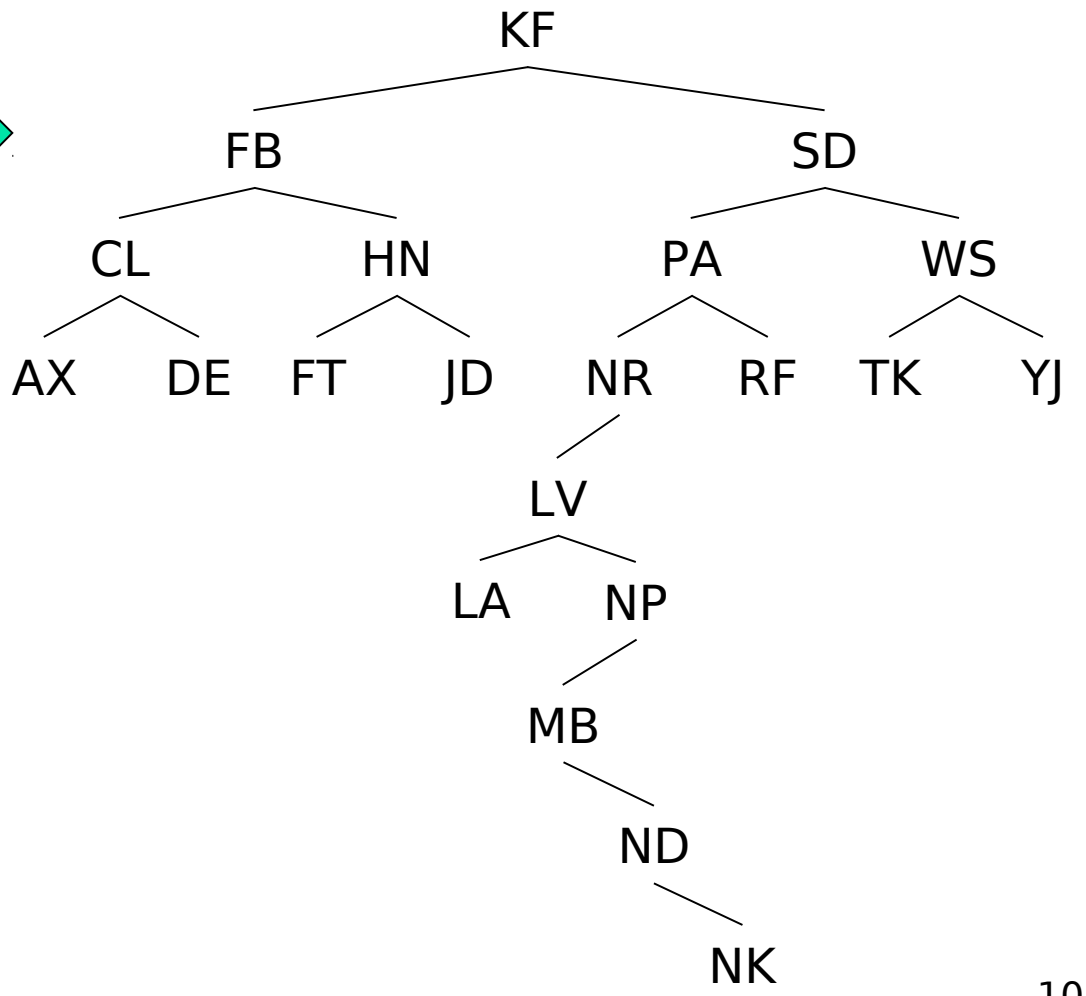
Inserção de chave

Inserção da chave LV



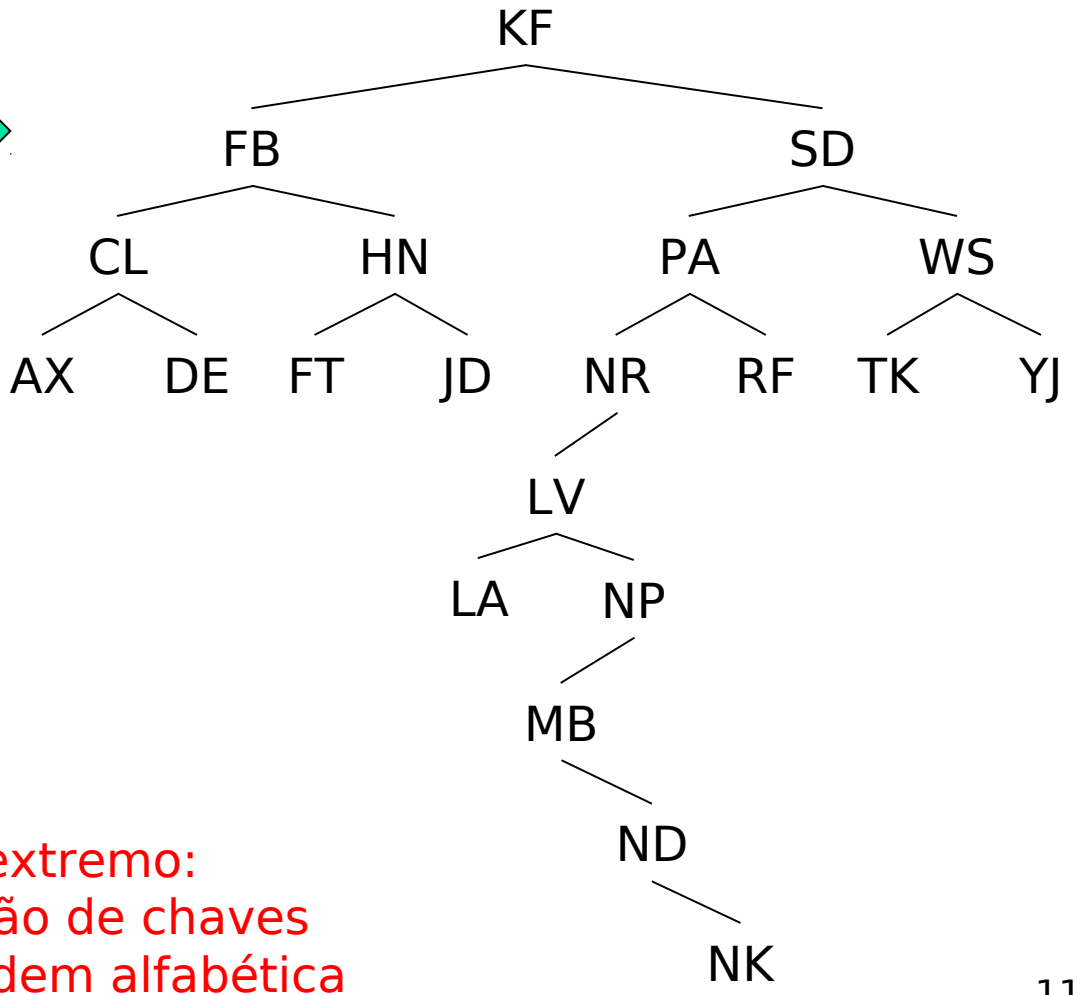
Problema: desbalanceamento

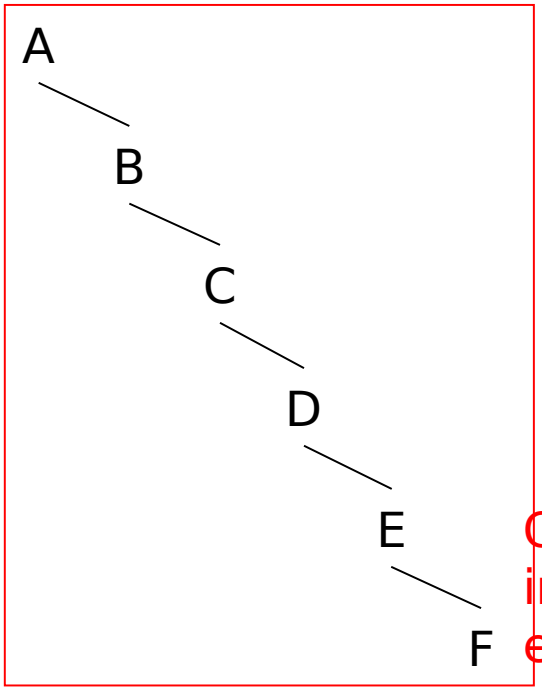
Inserção das chaves NP, MB, TM, LA, UF, ND, TS e NK



Problema: desbalanceamento

Inserção das chaves NP, MB, TM, LA, UF, ND, TS e NK

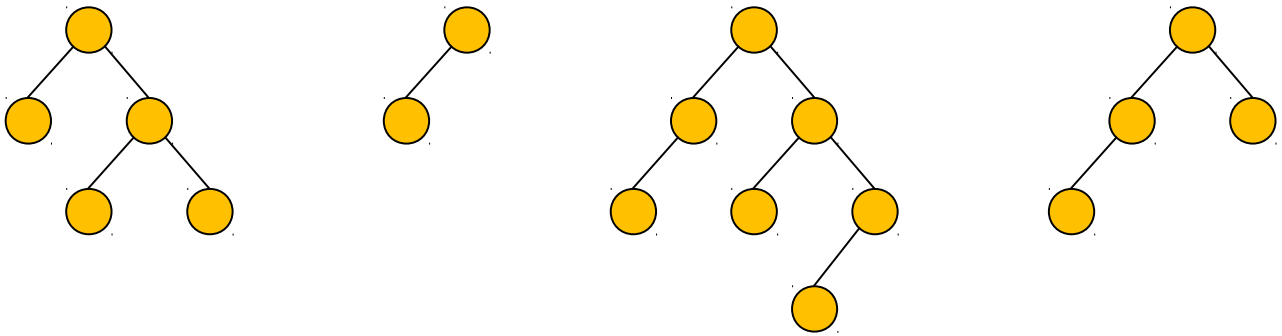




Caso extremo: inserção de chaves em ordem alfabética

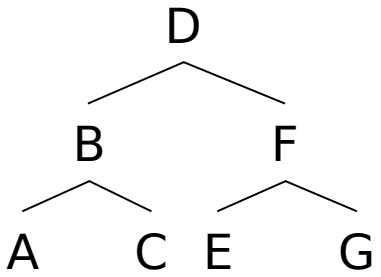
Solução por árvores-AVL

- Diferença limitada entre níveis
  - Garante performance aproximada de uma árvore completamente balanceada
  - Tradicionalmente, 1 nível de diferença
    - Procedimentos específicos de inserção e remoção
    - Manutenção feita por 4 tipos de rotação diferentes

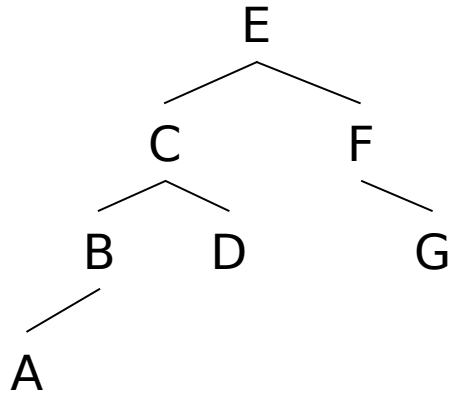


Árvores binárias perfeitamente balanceadas e AVL

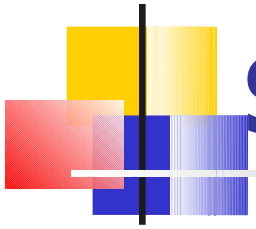
Chaves de entrada: B C G E F D A



Árvore perfeitamente balanceada



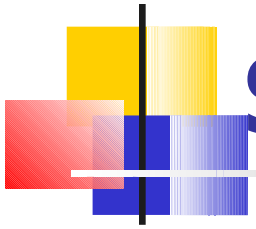
AVL
→ aceitável



Solução por árvores-AVL

- Árvores binárias de busca balanceadas garantem eficiência

- Busca no pior caso
  - Arvore binária perfeitamente balanceada: altura da árvore, ou seja, $\log_2(N+1)$
  - AVL, $1.44*\log_2(N+2)$
  - Exemplo: com 1.000.000 chaves
    - Árvore binária perfeitamente balanceada: busca em até 20 níveis
    - AVL: busca em até 28 níveis

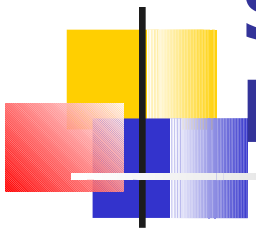


Solução por árvores-AVL

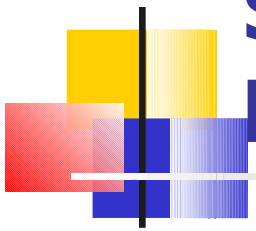
- **Problema**
  - Se chaves em memória secundária, ainda há muitos acessos!
    - 20 ou 28 *seeks* ainda é muito para disco

- Até agora...
  - Árvores binárias de busca **dispensam ordenação dos registros**
  - Mas **número excessivo de acessos**

Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)



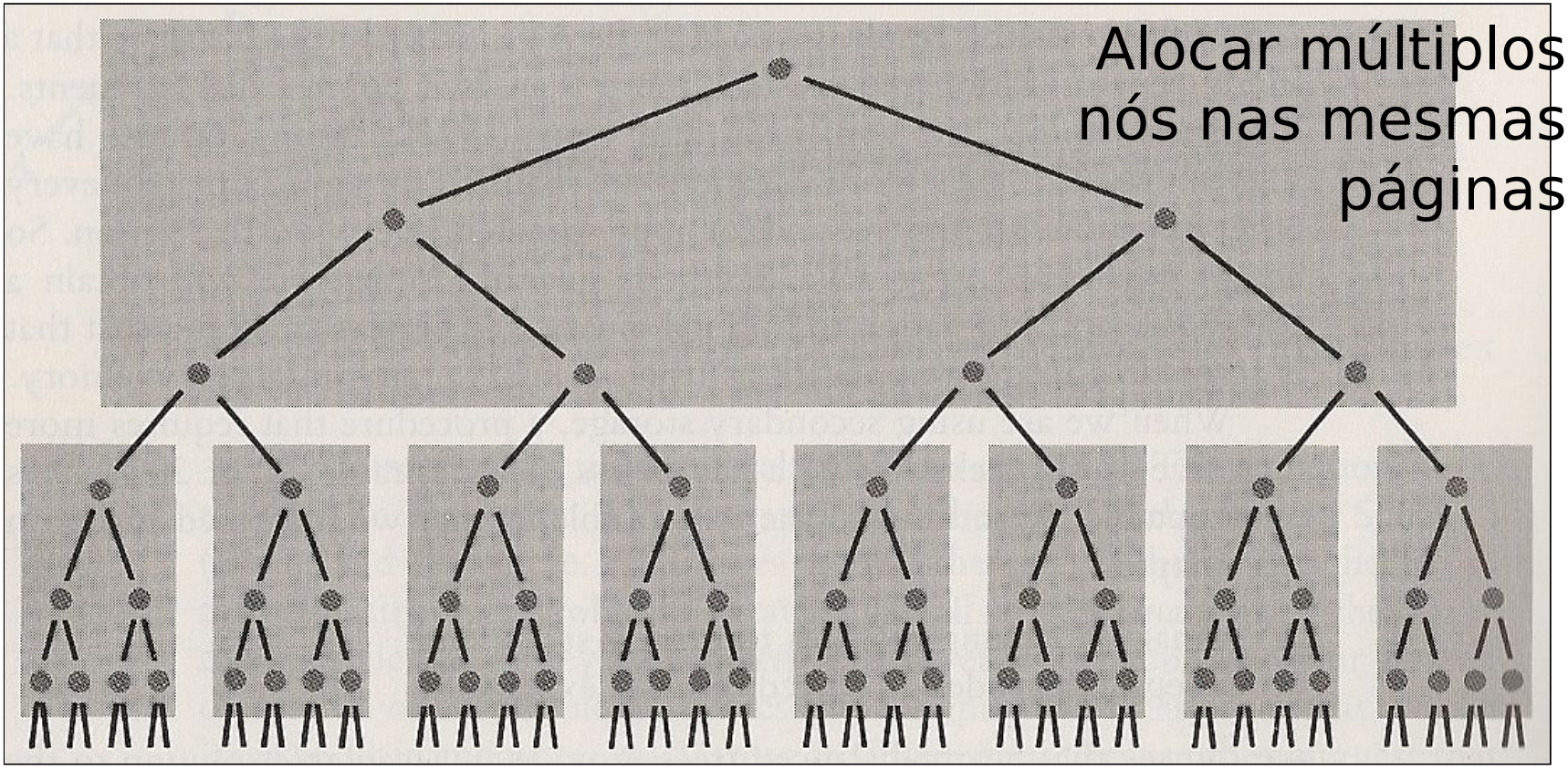
- **Paginação**
  - A busca (*seek*) por uma posição específica do disco é muito lenta
  - Mas, uma vez na posição, pode se ler uma grande quantidade de registros seqüencialmente a um custo relativamente pequeno



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

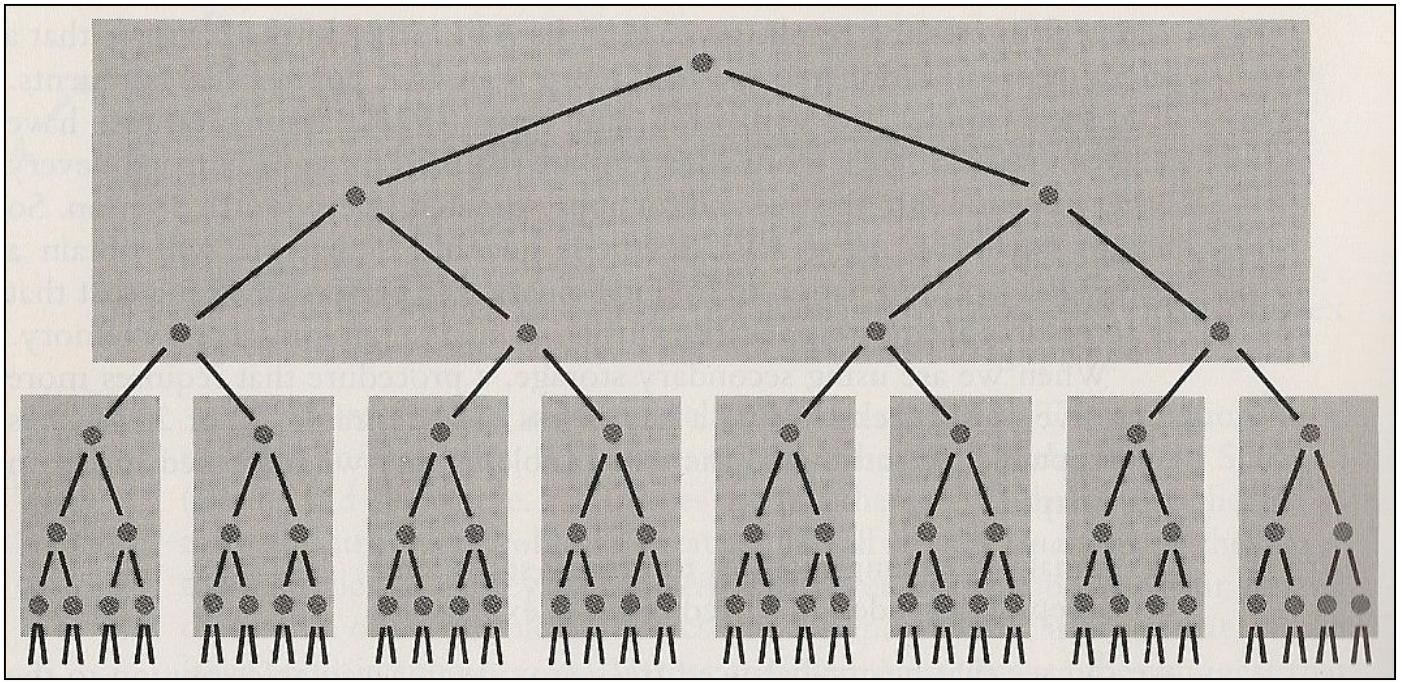
- Noção de **página** em *sistemas paginados*
  - Feito um seek, todos os registros de uma mesma "página" do arquivo (p.ex. 2 KB de um setor) são lidos
  - Esta página pode conter um número grande de registros
    - Se o próximo registro a ser recuperado estiver na mesma página já lida, evita-se novo acesso
    - Em ABB ou AVL quais informações temos ao recuperar um nó, e quais estão disponíveis na “página” lida?

Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)



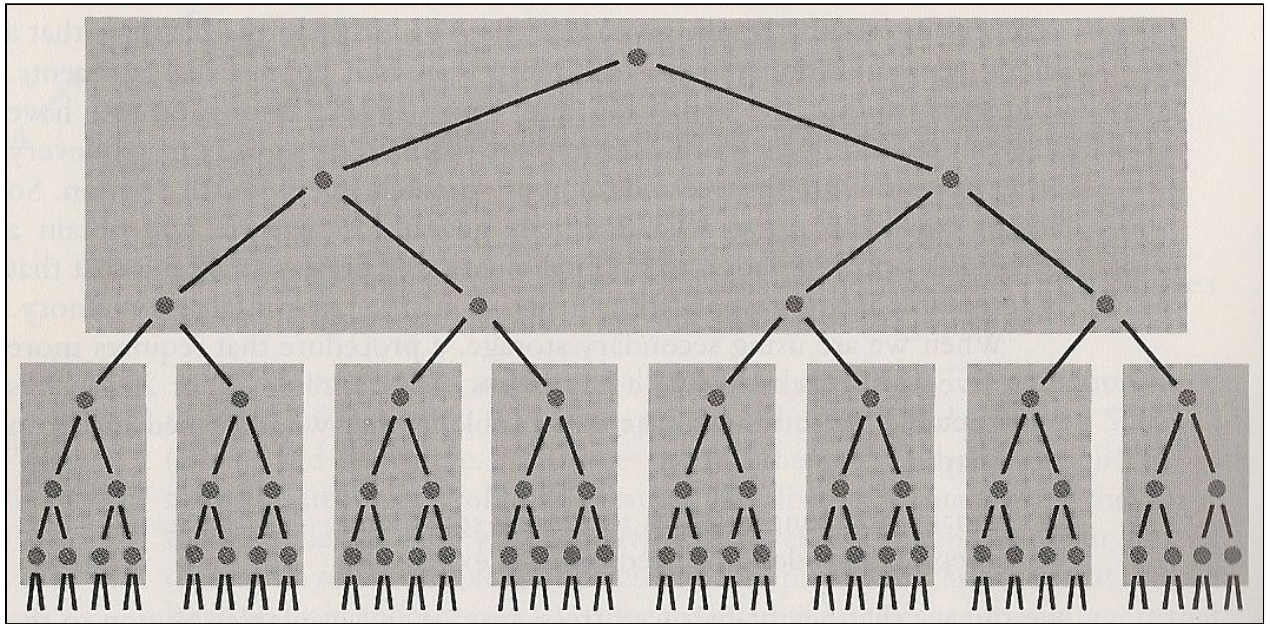
Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

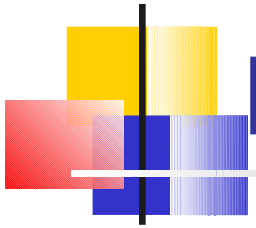
- Cada página aloca 7 nós e permite acesso a 8 páginas
- Assim, qualquer um dos 63 registros (9x7 nós) pode ser acessado em, no máximo, 2 acessos



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

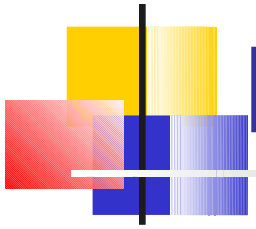
- Se a árvore é estendida com um nível de paginação adicional, adicionamos 64 novas páginas
  - Podemos encontrar qualquer uma das 511 (64 x 7 + 63) chaves fazendo apenas 3 *seeks* (contra 9 de uma AVL)





Eficiência da árvore paginada

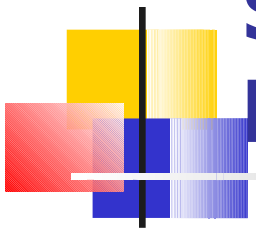
- Supondo que
  - Cada página de uma árvore ocupa 4KB e armazena 511 pares chave/referencia
  - Cada página contém uma árvore completa perfeitamente balanceada
  - Uma árvore de 3 níveis pode armazenar 134.217.727 chaves
    - Encontra-se qualquer uma das chaves com no máximo 3 seeks



Eficiência da árvore

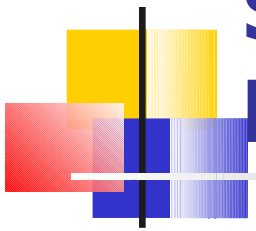
- Pior caso da busca
  - ABB completa, perfeitamente balanceada: $\log_2 (N+1)$
  - Versão paginada: $\log_{k+1} (N+1)$

    onde **N** é o número total de chaves, e ***k*** é o número de chaves armazenadas em uma página
    - Note que, na ABB tradicional, base do $\log_2$ nada mais é do que 1 chave por página + 1
  - Exemplo
    - ABB: $\log_2 (134.217.727) = 27$ acessos
    - Versão paginada: $\log_{511+1} (134.217.727) = 3$ acessos



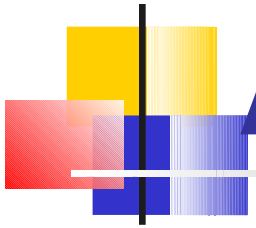
Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

- **Preços a pagar?**



Solução por Árvores Binárias Paginadas (*Paged Binary Trees*)

- **Preços a pagar**
  - Maior tempo na transmissão de dados
  - Necessário manter a organização da árvore

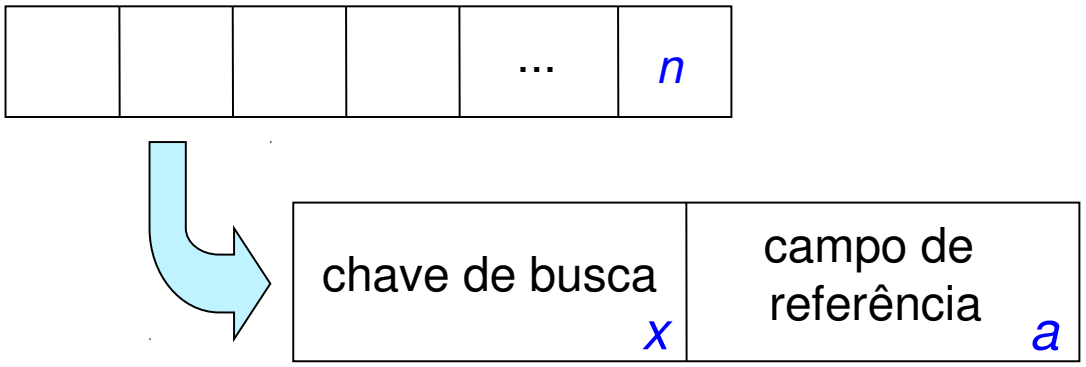


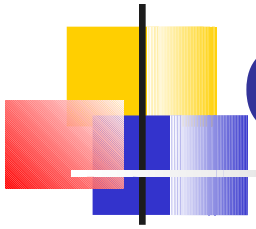
A invenção das árvores-B

- Arvores-B: generalização de uma ABB paginada
  - Não binárias, com conteúdo de uma página não mantido como árvore
- 1960s: competição entre fabricantes e pesquisadores
- 1972: Bayer and McGreight (trabalhando pela Boeing) publicam o artigo *Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes*
- 1979: árvores-B viram padrão em sistemas de arquivos de propósito geral
  - De onde vem o “B” do nome?

Características Gerais

- Organizar e manter um índice para um arquivo de acesso aleatório altamente dinâmico
- Índice
  - *n* elementos (x,a) de tamanho fixo

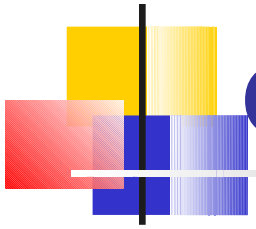




Características Gerais

- Índice
  - extremamente volumoso
- *Pool de buffers é* pequeno
  - apenas uma parcela do índice pode ser carregada em memória principal
  - operações baseadas em disco

Construção *Top-Down* de árvores paginadas

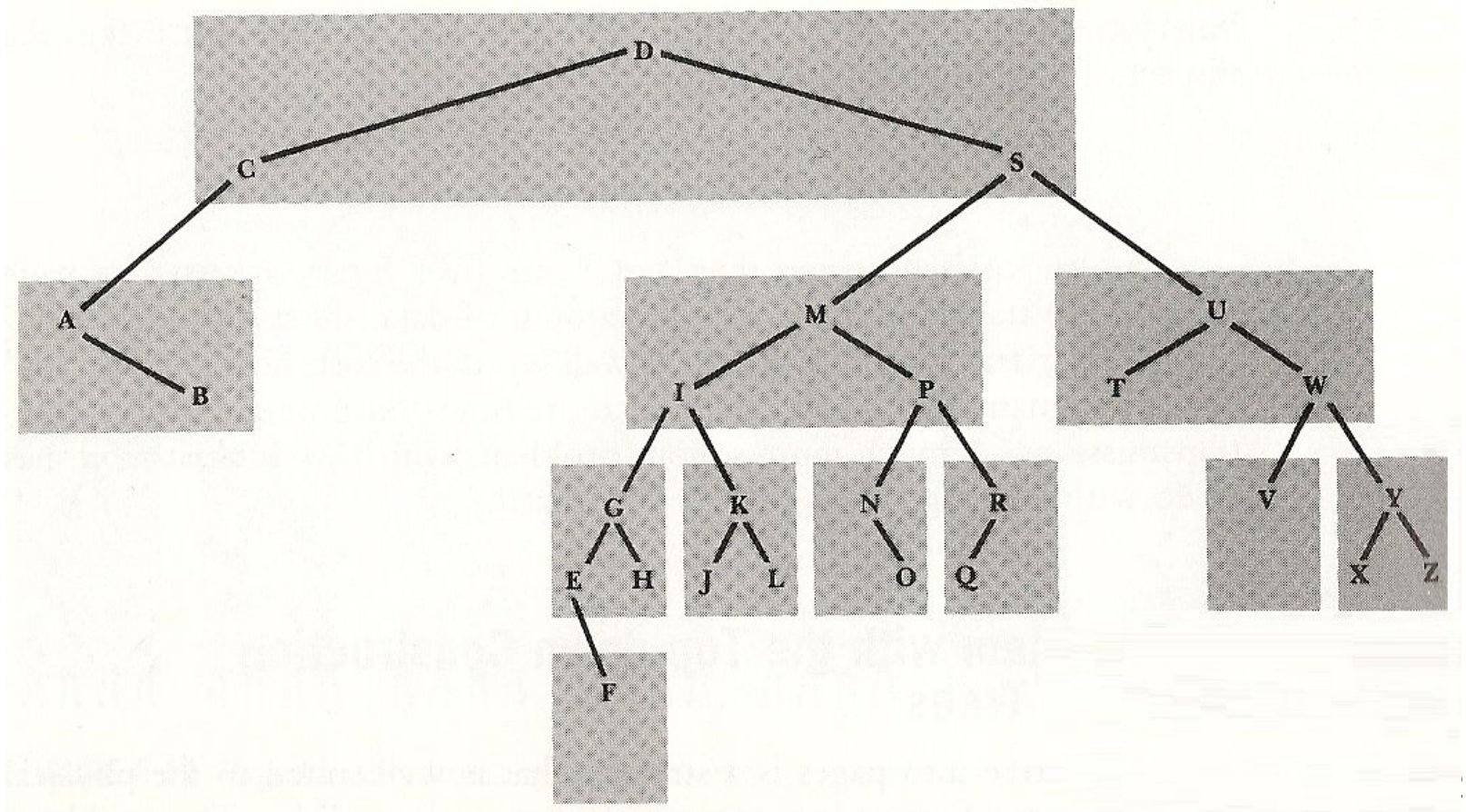


- Se conjunto de chaves é conhecido, construção da árvore é simples
  - Inicia-se pela chave do meio para obter uma árvore balanceada

- Porém, é complicado se as chaves são recebidas em uma seqüência aleatória

Construção *Top-Down* de árvores paginadas

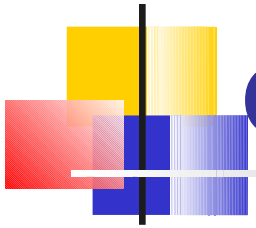
- Ordem: **C S D T A M P I B W N G U R K E H O L J Y Q Z F X V**



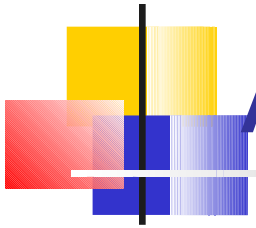
Construção *Top-Down* de árvores paginadas

- Figura anterior: a construção foi feita *top-down*, a partir da raiz
  - Quando uma chave é inserida, a árvore dentro da página pode sofrer rotações para manter o balanceamento
  - Construção a partir da raiz implica em que as chaves iniciais tendem a ficar na raiz
    - C e D não deveriam estar no topo, pois acabam desbalanceando a árvore de forma definitiva

Construção *Top-Down* de árvores paginadas



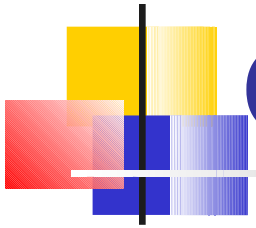
- **Questões**
  - Como garantir que as chaves na página raiz são boas separadoras, i.e., dividem o conjunto de chaves de maneira balanceada?
  - Como impedir o agrupamento de chaves que não deveriam estar na mesma página (como C, D e S, por exemplo)?
  - Como garantir que cada página contenha um número mínimo de chaves?



Árvore-B

- Características
  - balanceada
  - *bottom-up* para a criação (em disco)
    - nós folhas $\rightarrow$ nó raiz

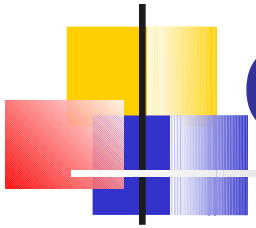
- Inovação
  - Não é necessário construir a árvore a partir do nó raiz, como é feito para árvores em memória principal e para as árvores anteriores



Construção *Bottom-Up*

- Conseqüências
  - Chaves indevidas não são mais alocadas na raiz
    - Elimina as questões em aberto de *chaves separadoras* e de *chaves extremas*
  - Não é necessário tratar o problema de desbalanceamento

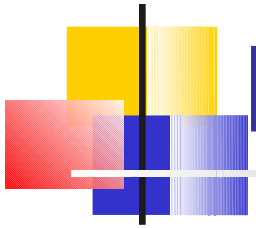
na árvore-B, as chaves na raiz da árvore emergem naturalmente



Características

- Conteúdo de cada nó (página de disco)
  - Seqüência ordenada de chaves
  - Conjunto de ponteiros
    - Número de ponteiros = número de chaves + 1

Não há uma árvore explícita dentro de uma página

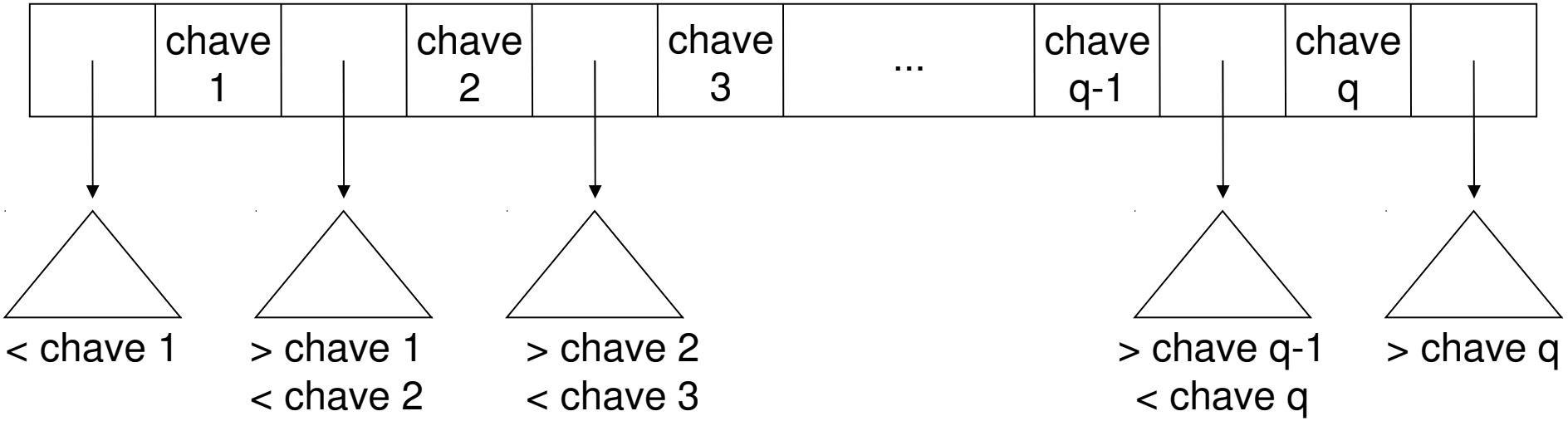


Definição geral

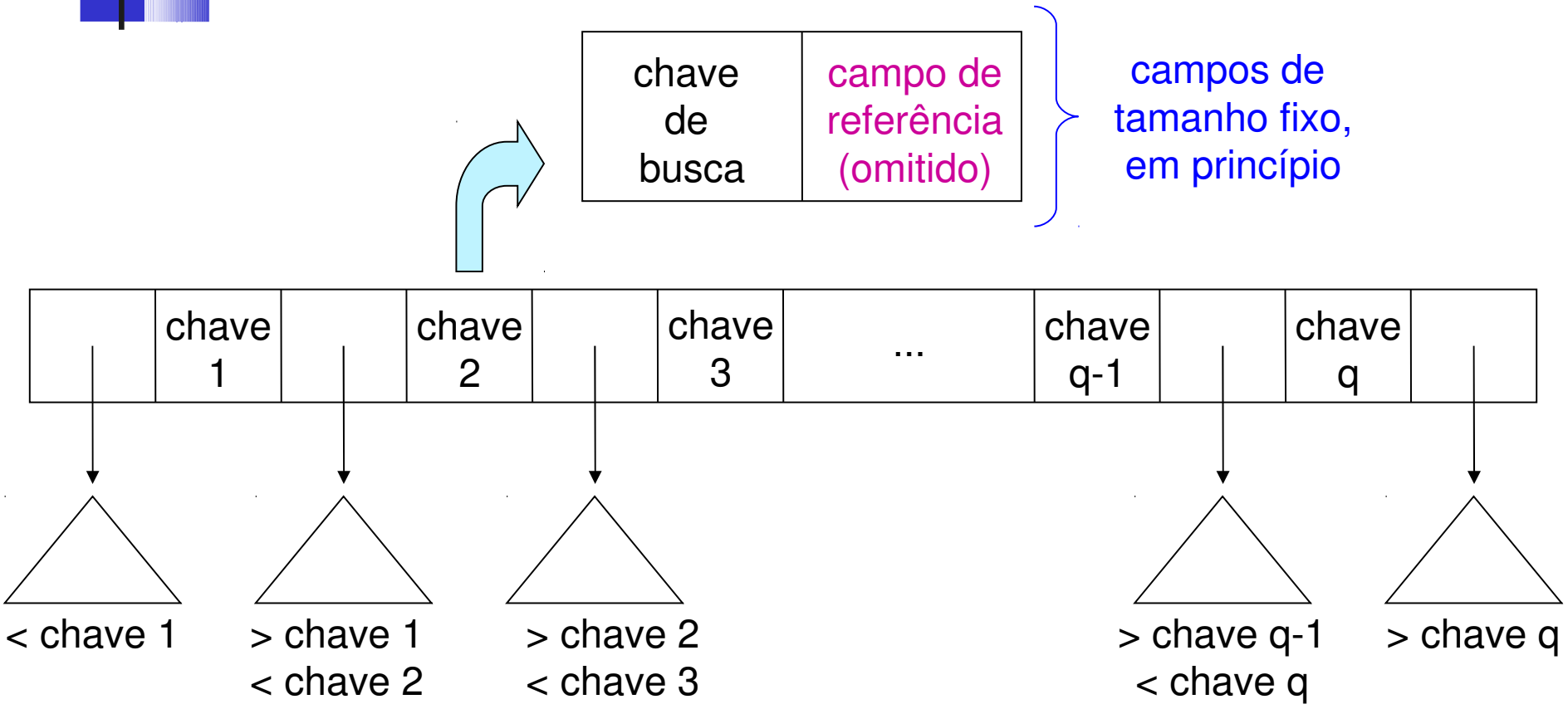
- Uma árvore-B é *n*-ária pois possui **mais** de 2 descendentes por nó
- Nesse caso, é comum chamar os nós de **páginas**

- Em uma árvore-B de ordem *m:*
  - Cada página contém:
    - no mínimo *m-1* registros e *m* descendentes,
    - no máximo *2m-1* registros e *2m* descendentes.
    - a raiz é uma exceção e pode ter de *1* a *2m-1* registros
  - Todas as páginas folha aparecem no mesmo nível.

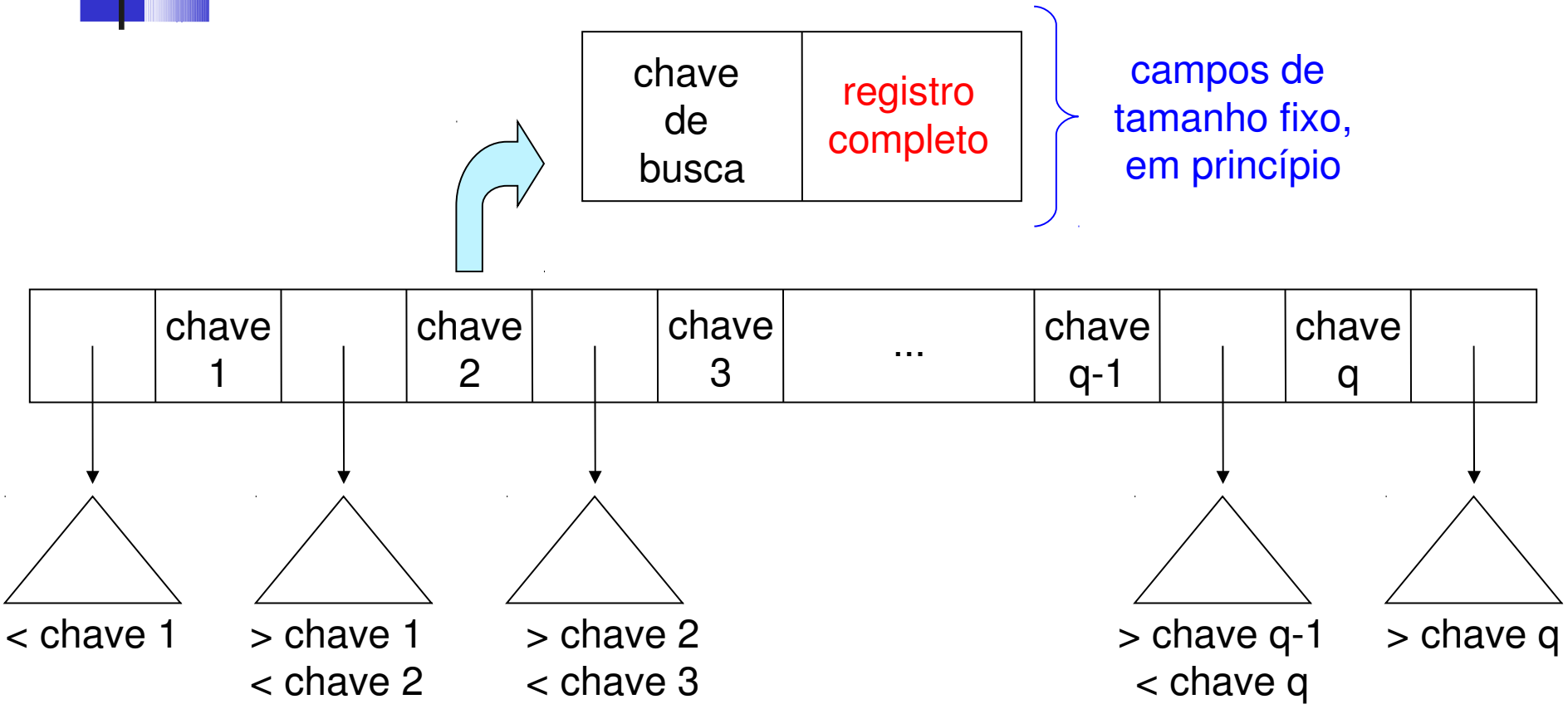
Estrutura Lógica de um Nó



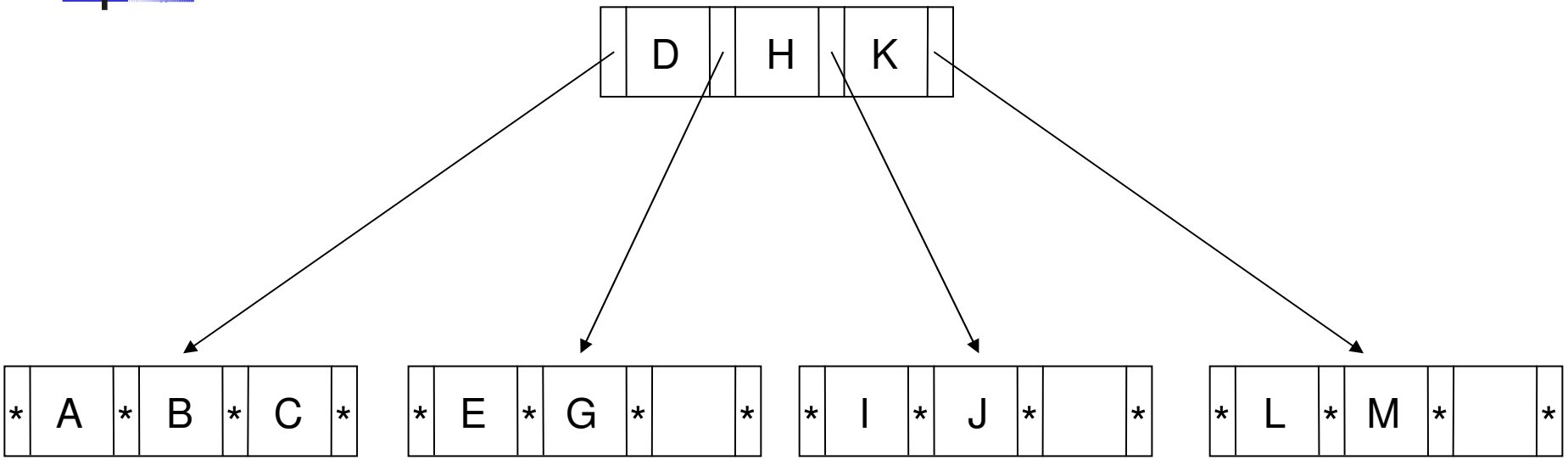
Estrutura Lógica de um Nó

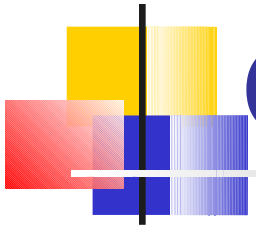


Estrutura Lógica de um Nó



Exemplo

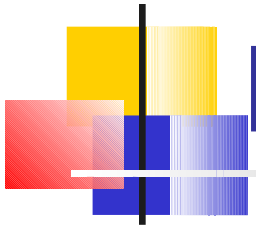




Características

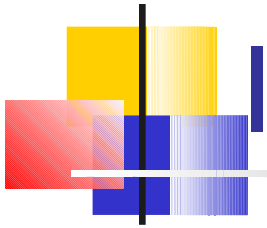
- Ordem
  - Número máximo de ponteiros que pode ser armazenado em um nó
  - Exemplo: árvore-B de ordem 8
    - máximo de 7 chaves e 8 ponteiros

- Observações
  - Número máximo de ponteiros é igual ao número máximo de descendentes de um nó
  - Nós folhas não possuem filhos, e seus ponteiros são nulos



Estrutura típica de um nó

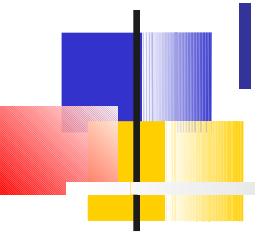
```
const m = 2;    // ordem da arvore-B
typedef struct node_Btree Btree;
struct node_Btree {
    int num_keys;       // numero de chaves armazenadas
    char keys[2*m-1]; // vetor de chaves
    Btree *desc[2*m]; // ponteiros para os descendentes
    bool leaf;          // flag folha da arvore
};
```



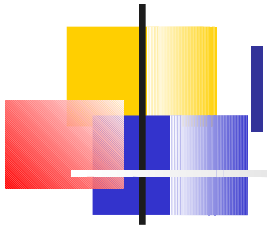
Inserção de Dados (Chave)

- Característica
  - Sempre realizada nos nós **folha**

- Situações a serem analisadas
  1. árvore vazia
  2. *overflow* no nó raiz
  3. inserção em nós folha



Inserção em árvore vazia



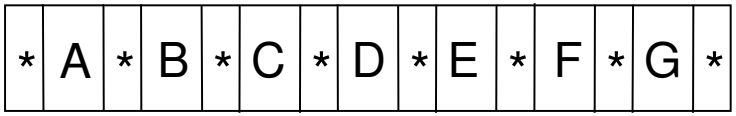
Inserção: situação inicial

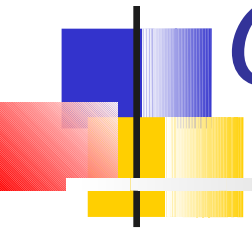
- Criação e preenchimento do nó
  - primeira chave: criação do nó raiz
  - demais chaves: inserção até a capacidade limite do nó

- Exemplo
  - nó com capacidade para 7 chaves → ordem 8
  - chaves: letras do alfabeto
  - situação inicial: árvore vazia

Inserção: situação inicial

- Chaves B C G E F D A
  - inseridas desordenadamente
  - mantidas ordenadas no nó
- Ponteiros (*)
  - nós folhas: -1 ou fim de lista (NULL)
  - nós internos: referência para o nó filho ou -1
- Nó raiz (= nó folha nesse momento)



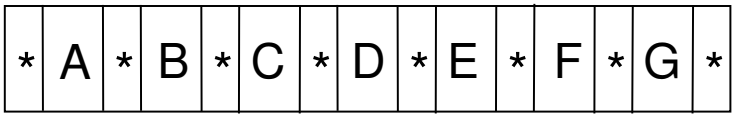


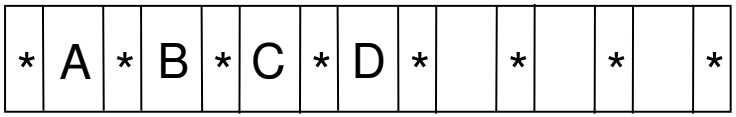
Overflow no nó raiz

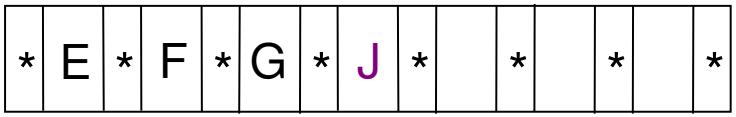
Inserção: *overflow* nó raiz

- Passo 1 – particionamento do nó (*split*)
  - nó original → nó original + novo nó
    - *split* 1-to-2
  - as chaves são distribuídas uniformemente nos dois nós
    - considerando chaves do nó original + nova chave

- Exemplo: inserção de J em
  - particionamento da página

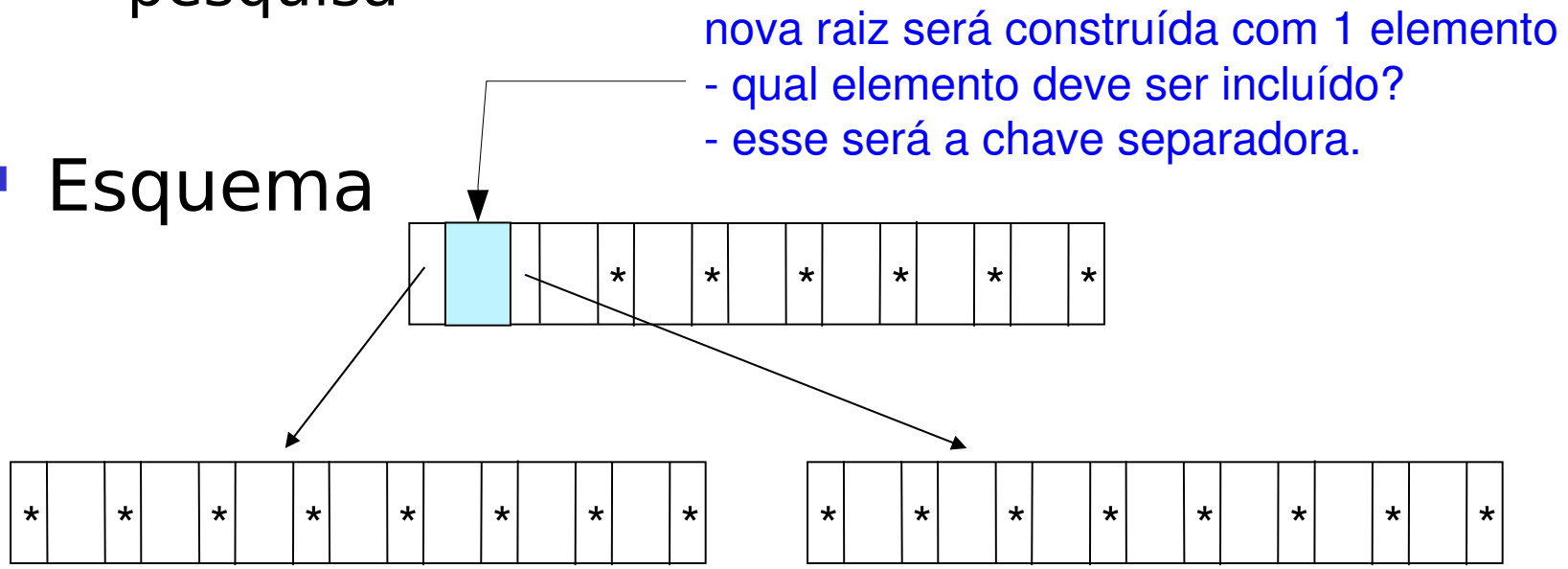






Inserção: *overflow* nó raiz

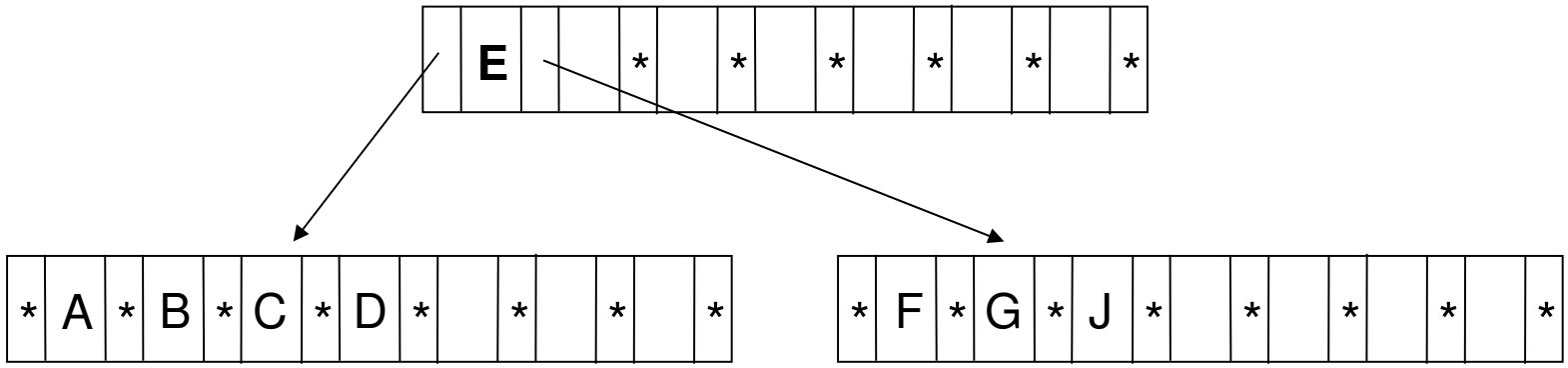
- Passo 2 – criação de uma nova raiz
  - a existência de um nível mais alto na árvore permite a escolha das folhas durante a pesquisa
- Esquema

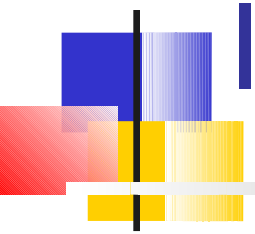


Inserção: *overflow* nó raiz

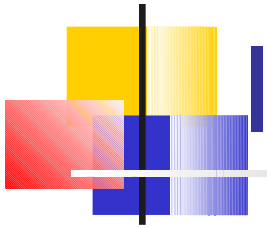
- Passo 3 – promoção de chave (*promotion*)
  - a primeira chave do novo nó após particionamento é promovida para o nó raiz

- Exemplo





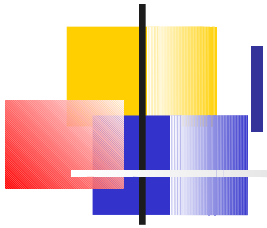
Inserção em nós folha



Inserção: nós folhas

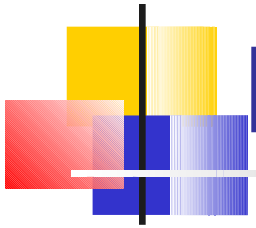
- Passo 1 – pesquisa
  - a árvore é percorrida até encontrar o nó folha no qual a nova chave será inserida
- Passo 2 – inserção em nó com espaço
  - ordenação da chave após a inserção
  - alteração dos valores dos campos de referência

nó folha em memória principal



Inserção: nós folhas

- Passo 2 – inserção em nó cheio
  - particionamento
    - criação de um novo nó
      (nó original $\rightarrow$ nó original + novo nó)
    - distribuição uniforme das chaves nos dois nós
  - promoção
    - escolha da primeira chave do novo nó como chave separadora no nó pai (nó por onde a pesquisa passou antes)
    - ajuste do nó pai para apontar para o novo nó
    - propagação de *overflow*



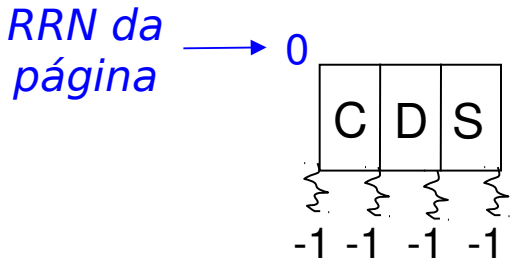
Exemplo

- Insira as seguintes chaves em um índice árvore-B
  - C S D T A M P I B W N G U K

- Ordem da árvore-B: 4
  - em cada nó (página de disco)
    - número de chaves: 3
    - número de ponteiros: 4

C S D T A M P I B W N G U

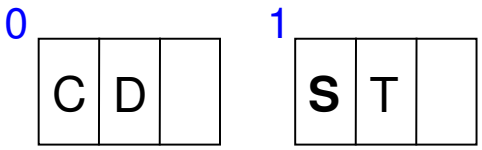
- Passo 1 – inserção de C, S, D
  - criação do nó raiz
    - C
    - C S
    - C D S



C S D T A M P I B W N G U

- Passo 2 – inserção de T
  - nó raiz cheio

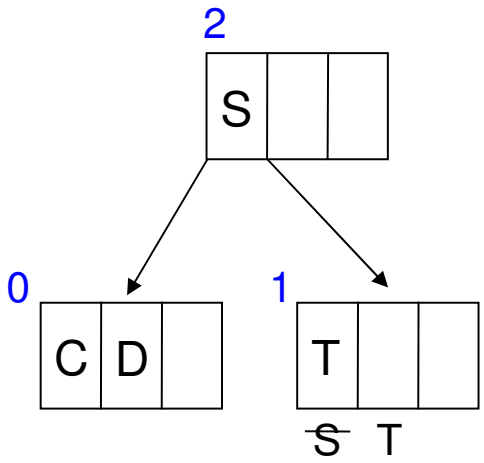
- particionamento do nó
- criação de uma nova raiz
- promoção de S



C S D T A M P I B W N G U

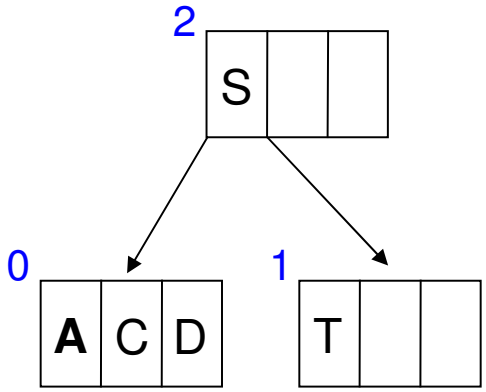
- Passo 2 – inserção de T
  - nó raiz cheio

- particionamento do nó
- criação de uma nova raiz
- promoção de S



C S D T A M P I B W N G U

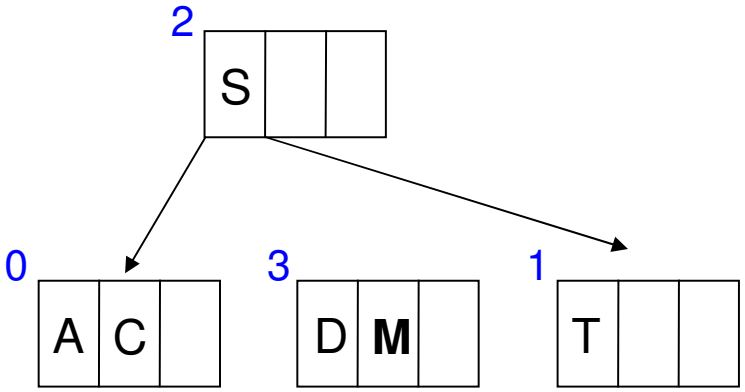
- Passo 3 – inserção de A
  - nó folha com espaço



C S D T A M P I B W N G U

- Passo 4 – inserção de M
  - nó folha 0 cheio

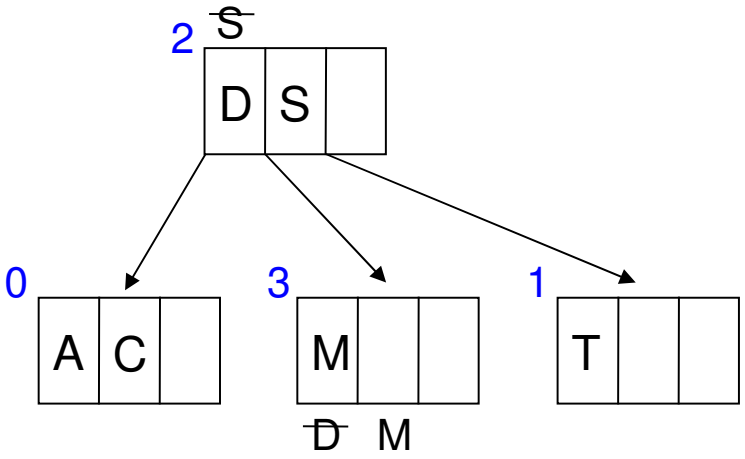
• particionamento do nó



C S D T A M P I B W N G U

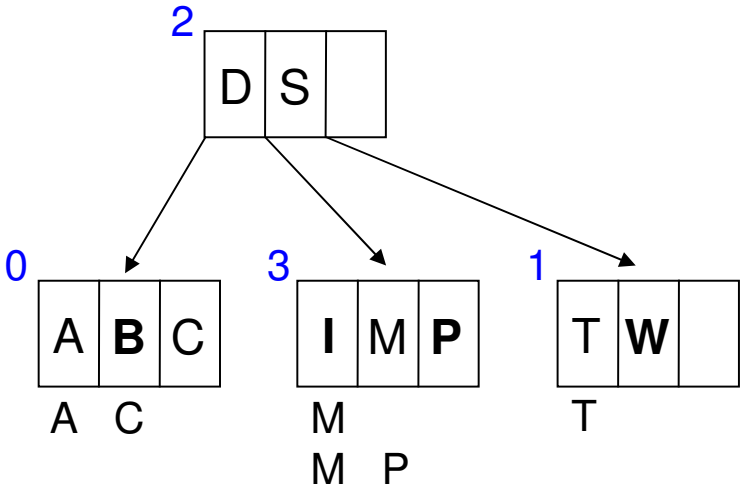
- Passo 4 – inserção de M
  - nó folha 0 cheio

• particionamento do nó
• promoção de D



C S D T A M P I B W N G U

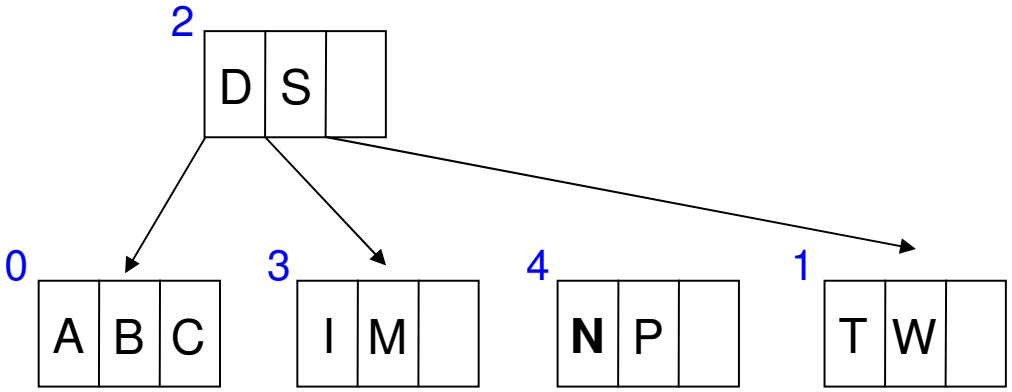
- Passo 5 – inserção de P, I, B, W
  - nós folhas com espaço



C S D T A M P I B W N G U

- Passo 6 – inserção de N
  - nó folha 3 cheio

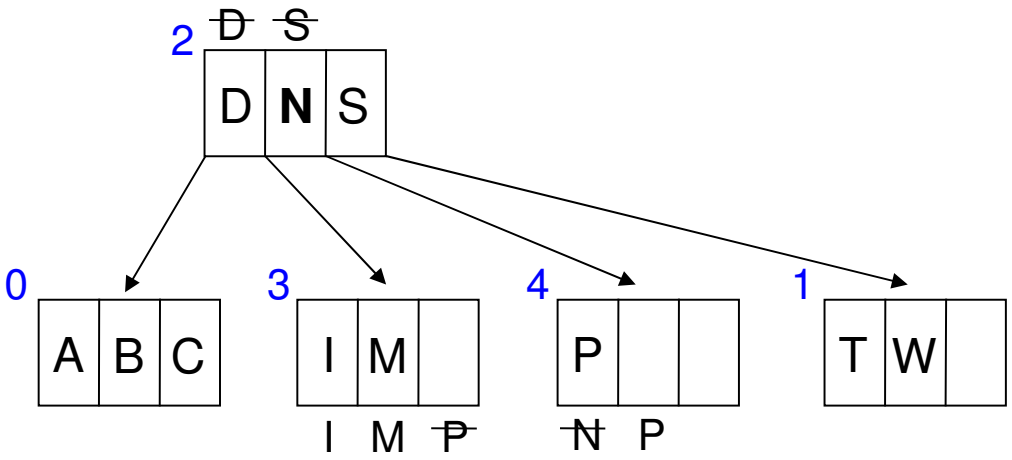
• particionamento do nó



C S D T A M P I B W N G U

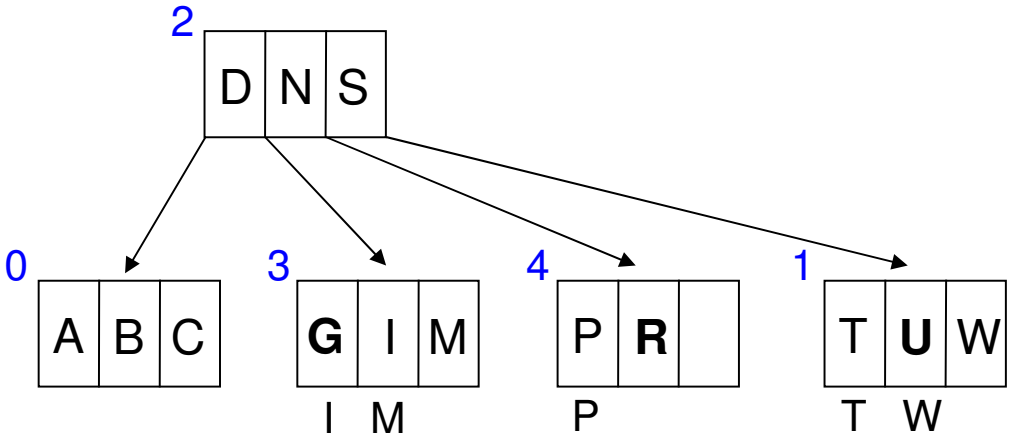
- Passo 6 – inserção de N
  - nó folha 3 cheio

• particionamento do nó
• promoção de N



C S D T A M P I B W N G U

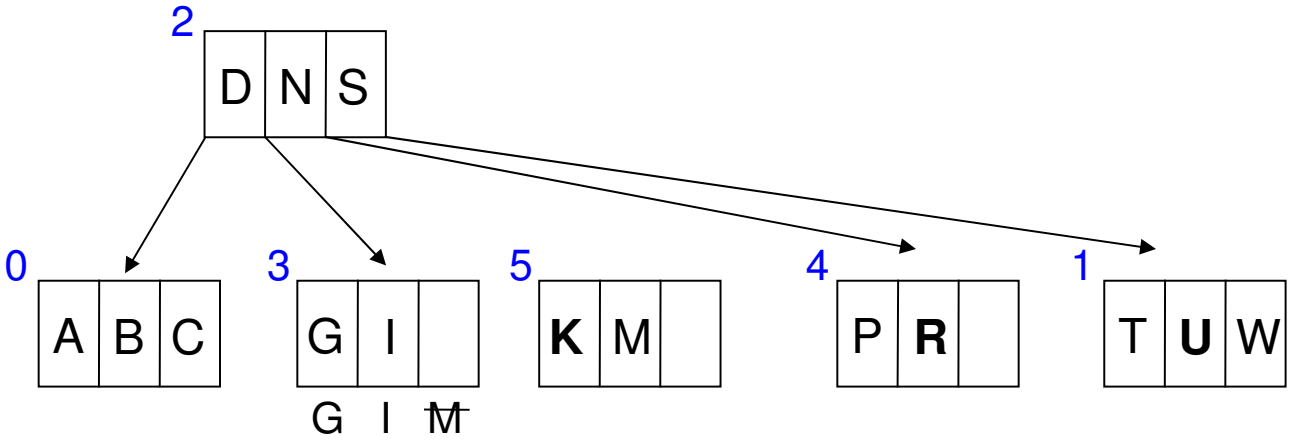
- Passo 7 – inserção de G, U, R
  - nós folhas com espaço



... K

- particionamento do nó 3

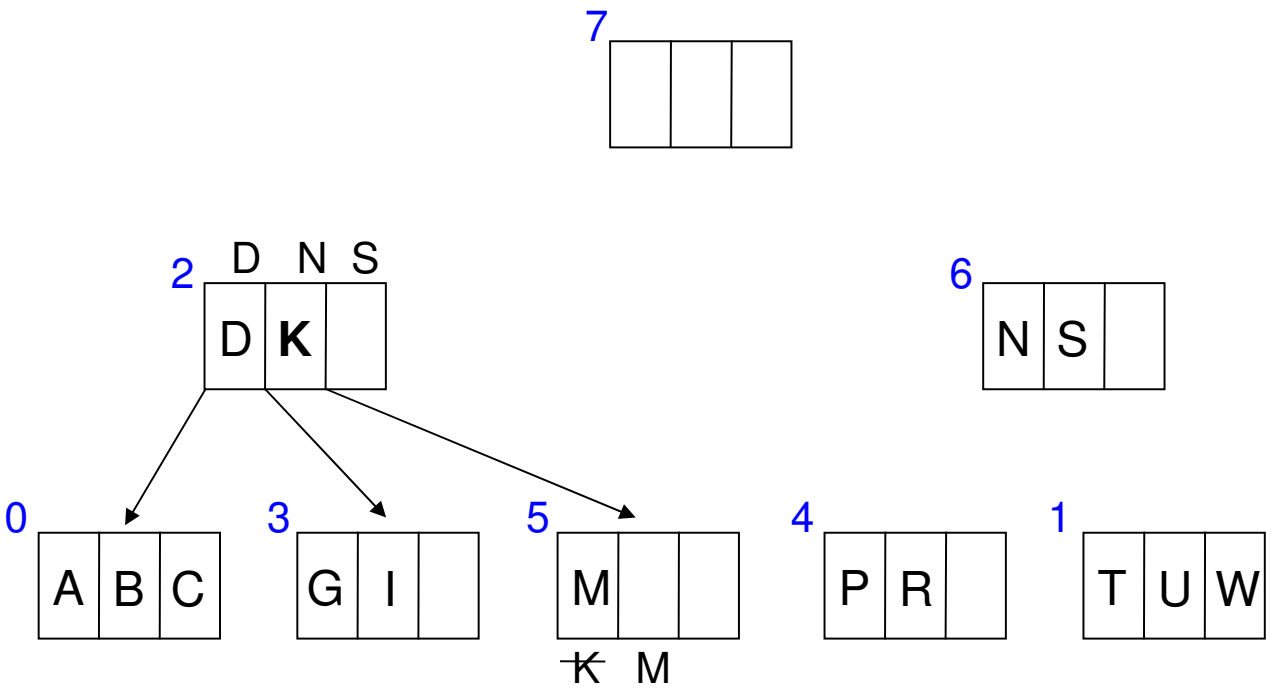
- Passo 8 – inserção de K
  - nó folha 3 cheio



... K

- particionamento do nó 3
- promoção de K
- particionamento do nó 2 e criação de nova raiz

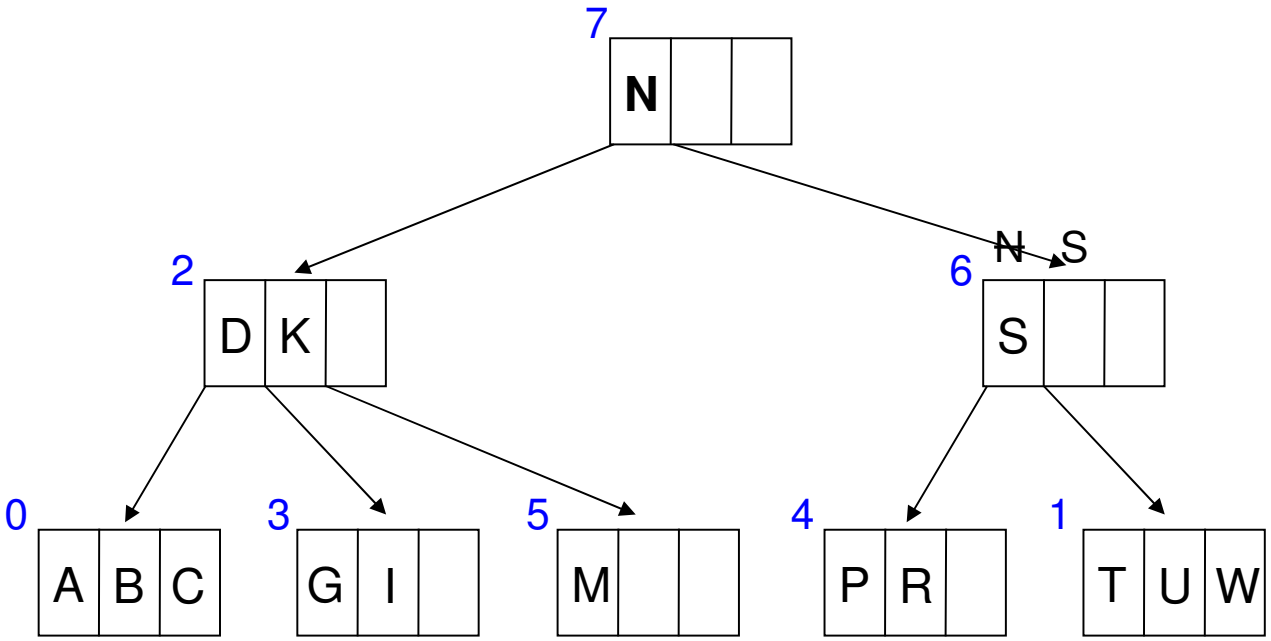
- Passo 8 – inserção de K

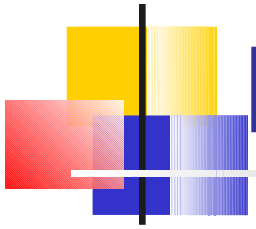


... K

- particionamento do nó 3
- promoção de K
- particionamento do nó 2
- promoção de N

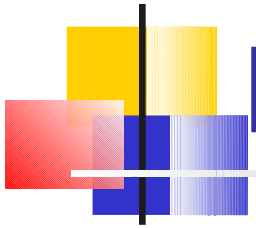
- Passo 8 – inserção de K





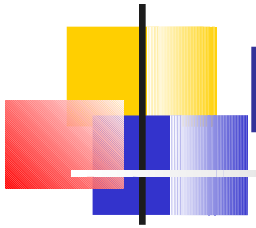
Exercício

- Na árvore-B do exemplo anterior, insira a chave $, sendo que $ < A



Exercício

- Insira as seguintes chaves em um índice árvore-B
  - C S D T A M P I B W N G U R K E H O L
  - diferentemente do exemplo anterior, escolha o último elemento do primeiro nó para promoção durante o particionamento do nó.



Exercício

- Construa uma árvore-B de ordem 3 pela inserção das chaves A, B, C, D, E, F, G, H e I, nessa ordem

  - Qual o efeito da inserção das chaves em ordem alfabética? A árvore degenerou?