SMA0333 - Cálculo III **Teste 1**

Prof. Zani, Thais Jordão e Sergio Monari **26 de março de 2015**

NOME E NÚMERO USP: ____________________

Questão	Resposta
1. V ou F?	a (V) b (F) c (V) d (F) e (V)
2.	(✓) (b) (c) (d) (e)
3.	(a) (✓) (c) (d) (e)
4.	(a) (b) (c) (✓) (e)
5.	(a) (b) (c) (d) (✓)
6.	(a) (✓) (c) (d) (e)
7.	(a) (b) (c) (d) (✓)
8.	(a) (b) (✓) (d) (e)
9.	(✓) (b) (c) (d) (e)
10.	(a) (✓) (c) (d) (e)

1. Marque V para verdadeiro e F para falso.

   (a) (V) Se (a_n) converge para 0 e (b_n) é limitada então $(a_n b_n)$ converge para 0.
   Resolução: *É o teorema do infinitésimo por limitada demonstrado em classe.*

   (b) (F) A sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ diverge.
   Resolução: *Basta observar que se trata da sequência* $a_n = 2^{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n} = 2^{1-(\frac{1}{2})^n} \to 2$ *para 2 quando* $n \to \infty$. *Outro modo é verificar que a sequência é monótona e limitada.*

   (c) (V) Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
   Resolução: *Basta ver que* $y_n = x_n - (x_n - y_n) \to a - 0 = a$.

   (d) (F) Se (x_n) é convergente e (y_n) é divergente então $(x_n + y_n)$ é convergente.
   Resolução: *Se* (x_n+y_n) *convergisse então* (y_n) *teria de convergir, pois seria igual à diferença de duas sequências convergentes, a saber,* $y_n = (x_n + y_n) - x_n$. *Isto é impossível pois* (y_n) *diverge.*

   (e) (V) A fim de que uma sequência (x_n) não possua subsequência convergente é necessário e suficiente que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.
   Resolução: *Vamos supor que* (x_n) *não possua subsequência convergente. Devemos mostrar que* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$. *De fato, se isto não ocorresse então existiria* $M > 0$ *tal que para cada* $k \geq 1$ *existia um índice* n_k *tais que* $|x_{n_k}| < M$. *Ou seja, existiria alguma subsequência* (x_{n_k}) *limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass,* (x_{n_k}) *teria uma subsequência* $(x_{n_{k_j}})$ *convergente. Ou seja, se não vale que* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ *então* (x_n) *possui alguma subsequência convergente; uma contradição.*
   Reciprocamente, suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$. *Seja* (x_{n_k}) *uma subsequência de* (x_n). *Temos* $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{n_k}| = +\infty$. *Portanto,* (x_{n_k}) *diverge.*

2. Considere as seguintes afirmações

   I – Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = 3$ então $r = 2/3$.

   II – Não existe $s \in \mathbb{R}$ que satisfaz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s^n = -3$.

III – Vale que $\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n = 1/4$.

É correto afirmar que

(a) ✓As afirmações I e II são verdadeiras.
(b) As afirmações I e II são falsas.
(c) A afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa.
(d) As afirmações I e III são verdadeiras.
(e) A afirmação II é falsa e a afirmação III é verdadeira.

Resolução:

I – Verdadeiro. Basta usar que para $-1 < r < 1$ *a série geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *vale* $1/(1-r)$. *Logo, para* $-1 < r < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ *equivale a* $1/(1-r) = 3$, *ou seja,* $r = 2/3$.

II – Verdadeiro. Se existisse a série teria de ser convergente, isto, é deveríamos ter $-1 < s < 1$ *e* $1/(1-s) = -3$. *Mas esta última equação só tem a solução* $s = 4/3 > 1$.

III – Falso. A série diverge.

3. Considere a série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^{2n} x$. Assinale a alternativa correta.

(a) A série acima diverge para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) ✓$f(x) = \tan^2 x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.
(c) $f(x) = \cos x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.
(d) $f(x) = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.
(e) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: *Trata-se de uma série geométrica de razão* $r = \operatorname{sen}^2 x$. *Se* $-\pi/2 < x < \pi/2$ *então* $0 \leq \operatorname{sen}^2 x < 1$. *Logo, a série converge para (começa em* $n = 1$*)*

$$\frac{r}{1-r} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$$

4. A quantidade de números inteiros $k \geq 1$ para os quais ambas as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{kn}}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{10^n}$$

são convergentes é

(a) 0
(b) 1
(c) 3
(d) ✓5
(e) 7

Resolução: *A primeira série só converge se* k *for ímpar. A segunda só converge se a razão, que é positiva, for menor do que 1. Logo, precisamos contar quantos números ímpares maiores ou iguais a 1 satisfazem* $k/10 < 1$. *São cinco números, a saber,* $1, 3, 5, 7$ *e* 9.

5. O conjunto dos números reais x tais que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{x^3-9}$ converge é o intervalo

   (a) $(-\infty, 3)$
   (b) $(-\infty, 3]$
   (c) $(3, +\infty)$
   (d) $(2, +\infty)$
   (e) $\checkmark(-\infty, 2)$

   Resolução: *É uma* $p-$*'série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *com* $p = 9 - x^3$. *Logo, a série converge se e somente se* $p = 9 - x^3 > 1$, *isto é,* $x < 2$.

6. O maior conjunto dos números reais r tais que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^r}$ diverge é

   (a) $(-\infty, 0)$
   (b) $\checkmark(-\infty, 1]$
   (c) $(0, 1)$
   (d) $[0, 1]$
   (e) $\mathbb{R}$

   Resolução: *Podemos aplicar o critério da integral. A série diverge se e somente se a integral* $\int_2^{+\infty} 1/(x(\ln x)^r)dx$ *diverge. Fazendo a mudança* $u = \ln x$ *a integral fica* $\int_{\ln 2}^{+\infty} 1/u^r du$. *Esta última diverge se e somente se* $r \leq 1$.

7. Das seguintes séries

$$\text{I. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \qquad \text{II. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}} \qquad \text{III. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{IV. } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \qquad \text{V. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1 + n^2}$$

   convergem

   (a) somente I.
   (b) somente II e III.
   (c) somente III e IV.
   (d) somente I, II e V.
   (e) $\checkmark$somente I, IV e V.

   Resolução:

   I – Racionalizando vemos que

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}.$$

   A série converge fazendo a comparação pelo limite com $1/n^{3/2}$.

   II – Fazendo a comparação pelo limite com $1/n$ *vemos que diverge.*

III – O módulo do termo geral é $n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ *que tende a 1 pelo primeiro limite fundamental. Logo a série diverge pois seu termo geral não tende a zero.*

IV – Utilize comparação pelo limite com $1/n^{3/2}$*. Usando L'Hospital vemos que* $\frac{\ln n}{n^{1/2}} \to 0$*. Portanto, converge.*

V – Observe que $\pi/4 \leq \operatorname{arctg} n < \pi/2$*. Assim,*

$$0 < \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2} \leq \frac{\pi/2}{1+n^2} \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

Segue por comparação que a série converge.

8. Considere as afirmações:

   I – Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então a série telescópica $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ é convergente e vale $a_0 - a$.

   II – Se a série telescópica $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ é convergente então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   III – Vale que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} = 1/4$.

   É correto afirmar que:

   (a) Todas as afirmações são verdadeiras.
   (b) As afirmações I e III são falsas.
   (c) ✓A afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa.
   (d) As afirmações II e III são verdadeiras.
   (e) As afirmações II e III são falsas.

   Resolução:

   I – Verdadeiro. Basta ver que a reduzida (soma parcial) da série telescópica é $s_n = a_0 - a_{n+1}$.

   II – Falso. Basta tomar $a_n = 1$.

   III – Verdadeiro. Tome na série telescópica $a_n = \frac{1}{4(4n+1)}$*. Temos* $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$*,* $a_0 = 1/4$ *e* $a_n \to 0$.

9. Considere as afirmações:

   I – Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

   II – Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e (a_n) é uma sequência decrescente de números reais positivos então a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ é convergente.

   III – A série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$ é convergente.

   IV – A série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{n^4+3}$ é divergente.

É correto afirmar que:

(a) ✓As afirmações II e III são verdadeiras.

(b) As afirmações I e III são falsas.

(c) A afirmação I é verdadeira e a afirmações II, III e IV são falsas.

(d) As afirmações I, II e III são falsas.

(e) A afirmação II é falsa e a afirmação I é verdadeira.

Resolução:

I – Falso. Série harmônica diverge e seu termo geral tende a zero.

II – Verdadeiro. É o Teste da série alternada visto em classe.

III – Verdadeiro. Temos que $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *decresce para* $x > e$, *pois sua derivada é* $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ *se* $x > e$. *Além disso, usando L'Hospital temos* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *A série converge pelo critério da série alternada.*

IV – Falso. Temos que $f(x) = \dfrac{x^3}{x}$ *decresce para* $x > \sqrt[4]{3}$, *pois sua derivada é* $f'(x) = -\dfrac{x^2(x^4-3)}{(x^4+1)^2} < 0$ *se* $x > \sqrt[4]{3}$. *Além disso, usando, p. ex., L'Hospital temos* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *A série converge pelo critério da série alternada.*

10. Quais das seguintes sequências convergem?

$$\text{I. } a_n = n \tan \frac{1}{n} \qquad \text{II. } a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{III. } a_n = \frac{n + (-1)^n n^2}{n^2 + 1}$$

(a) I e II convergem e III diverge.

(b) ✓ I converge e II e III divergem.

(c) I e II divergem e III converge.

(d) II converge e I e III divergem.

(e) I e III convergem e II diverge.

Resolução:

I. Converge pois

$$n \tan \frac{1}{n} = n \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} \to 1 \times 1 = 1.$$

II. Diverge pois $a_{2n} \to e$ *enquanto que* $a_{2n+1} \to -e$.

III. Diverge pois

$$a_{2n} = \frac{2n + 4n^2}{4n^2 + 1} \to 1$$

enquanto que

$$a_{2n+1} = \frac{2n + 1 - (2n+1)^2}{(2n+1)^2 + 1} \to -1.$$