# 03 – Análise de Algoritmos (parte 3)

## SCC201/501 - Introdução à Ciência de Computação II

Prof. Moacir Ponti Jr.

www.icmc.usp.br/~moacir

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – USP

2010/2

# Sumário

1. Análise Assintótica de Algoritmos
   - Crescimento de funções
   - Notação assintótica $O$
   - Notação assintótica $\Omega$
   - Notação assintótica $\Theta$
   - Uso e relação entre as notações $O$, $\Omega$ e $\Theta$
   - Notações $o$ e $\omega$
   - Regras
2. Funções
3. Dicas de análise na prática

# Crescimento de funções

## Análise assintótica de algoritmos

- geralmente baseada em uma descrição em pseudo-código (ao invés de código fonte em determinada linguagem)
- caracteriza a **complexidade de tempo** como uma **função do tamanho da entrada**, $n$
- um algoritmo assintoticamente mais eficiente é a melhor escolha para todas as entradas, *exceto as de tamanho pequeno*.
- permite analisar a complexidade de um algoritmo independente do sistema computacional utilizado

# Sumário

1. Análise Assintótica de Algoritmos
   - Crescimento de funções
   - Notação assintótica $O$
   - Notação assintótica $\Omega$
   - Notação assintótica $\Theta$
   - Uso e relação entre as notações $O$, $\Omega$ e $\Theta$
   - Notações $o$ e $\omega$
   - Regras

2. Funções

3. Dicas de análise na prática

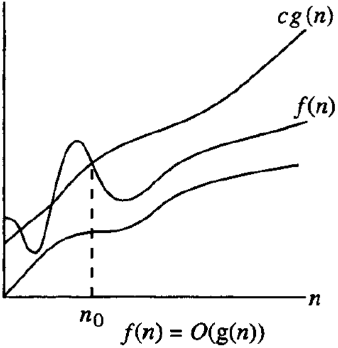
# Notação assintótica: $O$ (big oh)

- Para uma dada função $g(n)$, denotamos $O(g(n))$ o *conjunto de funções*:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que} \\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0 \ \}$$

- uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $O(g(n))$ se existe uma constante positiva $c$ de forma que ela possa estar limitada por $c \cdot g(n)$ para um valor de $n$ suficienemente grande
- podemos dizer que $f(n) \in O(g(n))$, mas em geral se escreve $f(n) = O(g(n))$ (abuso da notação de igualdade, não é simétrico)

# Notação assintótica: $O$ (big oh)




Fonte da figura: CORMEN et al.(2002)

- Para todos os valores de $n$ à direita de $n_0$, o valor de $f(n)$ reside em $c \cdot g(n)$ ou abaixo desse.
- Formalmente, a função $g(n)$ é um **limitante assintótico superior** para $f(n)$
- Exemplo: $2n^2 = O(n^3)$
  – podemos pensar nessa equação como sendo $2n^2 \leq O(n^3)$ ou $2n^2 \in O(n^3)$
  – a taxa de crescimento de $2n^2$ é **menor ou igual** à taxa de $n^3$

# Notação assintótica: $O$ (big oh) — exemplos

- Exemplo 1: $2n + 10$ é $O(n)$
  - podemos realizar uma manipulação para encontrar $c$ e $n_0$:
    $2n + 10 \leq c \cdot n$
    $c \cdot n - 2n \geq 10$
    $(c - 2)n \geq 10$
    $n \geq \frac{10}{c-2}$
  - a afirmação é válida para $c = 3$ e $n_0 = 10$.
- Exemplo 2: $n^2$ é $O(n)$
  - é preciso encontrar $c$ que seja sempre maior ou igual a $n$ para todo valor de um $n_0$:
    $n^2 \leq c \cdot n \Rightarrow n \leq c$
  - é impossível pois $c$ deve ser constante.

# Notação assintótica: $O$ (big oh) — exemplos

- Exemplo 3: $3n^3 + 20n^2 + 5$ é $O(n^3)$
  - é preciso encontrar $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $3n^3 + 20n^2 + 5 \leq c \cdot n^3$ para $n \geq n_0$
  - como $3n^3 + 20n^2 + 5 \leq (3 + 20 + 5) \cdot n^3$, podemos tomar $c = 28$ e qualquer $n_0 > 1$
- Exemplo 4: $3 \log n + 5$ é $O(\log n)$
  - é preciso encontrar $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $3 \log +5 \leq c \cdot \log n$ para todo $n \geq n_0$
  - note que $3 \log n + 5 \leq (3 + 5) \cdot \log n$ se $n > 1$ $(\log 1 = 0)$
  - basta tomar, por exemplo, $c = 8$ e qualquer $n_0 = 2$
- Exemplo 5: $2^{n+2}$ é $O(2^n)$
  - é preciso $c > 0$ e $n_0 \geq 1$ tais que $2^{n+2} \leq c \cdot 2^n$ para todo $n \geq n_0$
  - note que $2^{n+2} = 2^n + 2^2 = 4 \cdot 2^n$
  - assim, basta tomar, por exemplo, $c = 4$ e qualquer $n_0$

# *Notação de igualdade para conjuntos de funções*: $O$

- a igualdade nesse tipo de caso será utilizada no sentido de "representatividade" e pode ser lida como "**é**".
- um conjunto em uma fórmula representa uma função anônima naquele conjunto.
- Exemplo 6:

  $$f(n) = n^3 + O(n^2)$$

  significa que existe um $h(n) \in O(n^2)$ de forma que $f(n) = n^3 + h(n)$.
- Exemplo 7:

  $$n^2 + O(n) = O(n^2)$$

  significa que, para qualquer $f(n) \in O(n)$ existe $h(n) \in O(n^2)$ de forma que $n^2 + f(n) = h(n)$.

# Sumário

1. Análise Assintótica de Algoritmos
   - Crescimento de funções
   - Notação assintótica $O$
   - Notação assintótica $\Omega$
   - Notação assintótica $\Theta$
   - Uso e relação entre as notações $O$, $\Omega$ e $\Theta$
   - Notações $o$ e $\omega$
   - Regras
2. Funções
3. Dicas de análise na prática

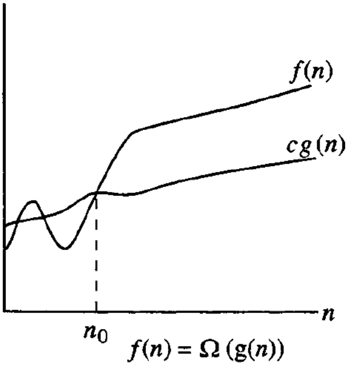
# Notação assintótica: $\Omega$ (omega)

- Na maiora dos casos estamos interessados no limite superior, pois queremos saber no pior caso, qual a complexidade de tempo
- Em alguns casos também podemos analisar o limite assintótico inferior para expressar algo que esteja "pelo menos" em um dado comportamento.
- Para uma dada função $g(n)$, $\Omega(g(n))$ é o *conjunto de funções*:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ existem constantes positivas } c \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \text{ para todo } n \geq n_0 \}$$

- uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $\Omega(g(n))$ se existem uma constante positiva $c$ tais que ela possa estar limitada por $c \cdot g(n)$ para um valor de $n$ suficienemente grande

# Notação assintótica: $\Omega$ (omega)




Fonte da figura: CORMEN et al.(2002)

- Para todos os valores de $n$ à direita de $n_0$, o valor de $f(n)$ reside em $c \cdot g(n)$ ou acima desse.
- Exemplo: $3n^2 + n = \Omega(n)$
  – podemos pensar nessa equação como sendo $3n^2 + n \geq \Omega(n)$,
  – ou seja, a taxa de crescimento de $3n^2 + n$ é **maior ou igual** à taxa de $n$

# *Notação de igualdade para conjuntos de funções*: $\Omega$

- Exemplo:

$$\sqrt{n} = \Omega(\lg(n))$$

podemos ler: "raiz de $n$ é, pelo menos, omega de $\lg(n)$" para um $n$ suficientemente grande ($n \geq n_0$).

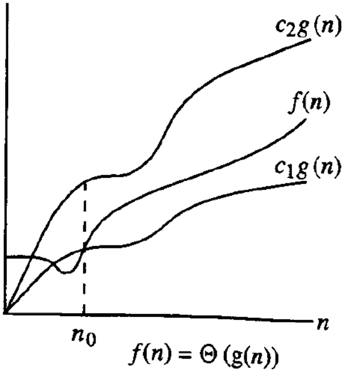
# Notação assintótica: $\Theta$ (theta)

- Para uma dada função $g(n)$, denotamos $\Theta(g(n))$ o *conjunto de funções*:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{existem constantes positivas } c_1,\ c_2 \text{ e } n_0 \text{ tais que } 0 \leq c_1 g(n) \leq c_2 g(n) \text{ para todo } n \geq n_0\ \}$$

- uma função $f(n)$ pertence ao conjunto $\Theta(g(n))$ se existem constantes positivas $c_1$ e $c_2$ tais que ela possa estar limitada entre $c_1 g(n)$ e $c_2 g(n)$ para um valor de $n$ suficienemente grande
- podemos dizer que $f(n) \in \Theta(g(n))$, mas em geral se escreve $f(n) = \Theta(g(n))$ (abuso da notação de igualdade)

# Notação assintótica: $\Theta$ (theta)




- Para todos os valores de $n$ à direita de $n_0$, o valor de $f(n)$ reside em $c_1 g(n)$ ou acima dele e em $c_2 g(n)$ ou abaixo desse.
- para todo $n > n_0$, $f(n) = g(n)$ dentro de um fator constante.
- $g(n)$ é um **limite assintoticamente restrito** para $f(n)$

Fonte da figura: CORMEN et al.(2002)

# Notação assintótica: $\Theta$ (theta)

- Foi dito que poderíamos descartar os termos de mais baixa ordem e coeficientes do termo de mais alta ordem.
- para mostrar formalmente que, por exemplo, $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$:
- definiremos constantes positivas $c_1$, $c_2$ e $n0$ tais que:

$$c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2,$$

  para todo $n \geq n_0$. Dividindo por $n^2$:

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2,$$

- a desigualdade do lado direito pode ser considerada válida para $n \geq 1$ escolhendo $c_2 \geq 1/2$, e a do lado esquerdo pode ser considerada válida para $n \geq 7$ escolhendo $c_1 \geq 1/14$.
- para $c_2 = 1/2$, $n = 7$ e $c_1 = 1/14$, temos: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

# Notação assintótica: $\Theta$ (theta)

- também é possível mostrar que $6n^3 \neq \Theta(n^2)$:
- suponha, a título de contradição, que existam $c_2$ e $n_0$ tais que: $6n^3 \leq c_2 n_2$ para $n \leq n_0$.
- mas $n \leq c_2/6$ não é válido para $n$ grande pois $c_2$ é constante

## Notação assintótica

- Exemplo: para dois algoritmos quaisquer, considere as funções de eficiência:
  - $f(n) = 1000n$
  - $g(n) = n^2$
- $f$ é maior do que $g$ para valores pequenos de $n$
- $g$ cresce mais rapidamente, e finalmente resultará em maiores valores, sendo o ponto de mudança $n = 1.000$
- segundo as notações vistas, se existe um $n_0$ a partir do qual $c \cdot f(n)$ é pelo menos tão grande quanto $g(n)$, então, desprezando os fatores constantes e considerando $n_0 = 1.000$ e $c = 1$:
  - $1000n = O(n^2)$
  - ou $f(n) = O(n^2)$
- o mesmo aconteceria para $n_0 = 10$ e $c = 100$.

# Notação assintótica: relações e teorema

## Analogias

$$\begin{array}{ccc} O & \Omega & \Theta \\ \leq & \geq & = \end{array}$$

## Teorema (1)

*para duas funções $g(n)$ e $f(n)$, $f(n) = \Theta(g(n))$ se e somente se:*

- $f(n) = O(g(n))$ *e*
- $f(n) = \Omega(g(n))$.

## Utilidade

- utilizamos o teorema para demonstrar **limites assintoticamente restritos** a partir de limites assintotitos superiores e inferiores.

# Sumário

# Notações $o$ e $\omega$: notações "estritas"

- Muito parecidas com as notações $O$ e $\Omega$, respectivamente. No entanto, a desigualdade deve valer para <u>qualquer</u> constante $c$:
- Para uma função $g(n)$, denotamos $o(g(n))$ o *conjunto de funções*:

$$o(g(n)) = \{f(n) : \text{ para qualquer } c > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tais que } 0 \le f(n) \le c \cdot g(n) \text{ para todo } n \ge n_0 \}$$

- e $\omega(g(n))$ o *conjunto de funções*:

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ para qualquer } c > 0 \text{ e } n_0 > 0 \text{ tais que } 0 \le c \cdot g(n) \le f(n) \text{ para todo } n \ge n_0 \}$$

- $f(n) \in \omega(g(n))$ se e somente se $g(n) \in o(f(n))$
- Intuitivamente, (se o limite existe),

para $\omega(g(n))$, $\lim\limits_{n \to 0} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ , e para $o(g(n))$ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

# Notações $o$ e $\omega$

- Exemplo 1 : $2n^2 = o(n^3)$
  - $n^2$ é sempre menor que $n^3$ para um $n$ suficientemente grande.
  - é preciso apenas determinar $n_0$ em função de $c$
- Exemplo 2 : $2n^3 \neq o(n^3)$
  - ignorando as constantes, não podemos dizer que $n^3$ é sempre menor que $n^3$ para um $n$ suficientemente grande.
- Exemplo 3: $\frac{1}{2}n^2 = \Theta(n^2)$, mas
  - $\frac{1}{2}n^2 \neq o(n^2)$, e
  - $\frac{1}{2}n^2 \neq \omega(n^2)$

# Sumário

# Notação assintótica

## Algumas regras

- Se $T_1(n) = O(f(n))$ e $T_2(n) = O(g(n))$, então:
  $$T_1(n) + T_2(n) = \max\left[O(f(n)), O(g(n))\right] \text{ e}$$
  $$T_1(n) \cdot T_2(n) = O(f(n) \cdot g(n)).$$
- $log_k n = O(n)$ para qualquer $k$ pois logaritmos crescem muito lentamente

# Notação assintótica

## ... Algumas regras

- Se $T(x)$ é um polinômio de grau $n$, então:
  $T(x) = \Theta(x^n)$.

## Relembrando

- um polinômio de grau $n$ é uma função na forma:
  $$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 \cdot x + a_0$$
- classificação em função do grau
  - 0: polinômio constante
  - 1: função afim (ou polinômio linear, se $a_0 = 0$)
  - 2: polinômio quadrático
  - 3: polinômio cúbico

# Funções importantes (1/3)

- Constante: $\approx 1$
  - independente do tamanho de $n$, operações executadas um número fixo de vezes.
- Logarítmica: $\approx \log_b n$
  - típica de algoritmos que resolvem um problema transformando-o em problemas menores.
  - para dobrar $\log_2 n$ é preciso fazer $\log_2 n^2$.
  - a base também muda pouco os valores: $\log_2 n \approx 20$ e $\log_{10} n \approx 6$ para $n = 1.000.000$.
- Linear: $\approx n$
  - em geral, uma certa quantidade de operações é realizada sobre cada um dos elementos de entrada.
  - melhor situação para quando é preciso processar $n$ elementos de entrada e obter $n$ elementos de saída.

# Funções importantes (2/3)

- Log linear (ou n-log-n): $\approx n \cdot \log_b n$
  - típico de algoritmos que resolvem um problema transformando-o em problemas menores, resolvem cada um de forma independente e depois ajunta as soluções.
  - para dobrar $n \cdot \log_2 n$ é preciso fazer aproximadamente $n \cdot \log_2 2n$.
- Quadrática: $\approx n^2$
  - ocorre frequentemente quando os dados são processados aos pares, com laços de repetição aninhados.
  - sempre que $n$ dobra, o tempo de execução é multiplicado por 4.
  - podem ser úteis para resolver problemas de tamanho relativamente pequeno.
- Cúbica: $\approx n^3$
  - ocorre em multiplicações de matrizes, com três estruturas de repetição aninhadas.
  - sempre que $n$ dobra, o tempod e execução é multiplicado por 8.
  - podem ser úteis para resolver problemas de tamanho relativamente pequeno (ou quando não se tem outra opção!).

# Funções importantes (3/3)

- Exponencial: $\approx a^n$
  - geralmente ocorre quando se usa uma solução de força bruta.
  - para o caso $2^n$, sempre que $n$ dobra, o tempo de execução é elevado ao quadrado.
  - não são úteis do ponto de vista prático.
- Fatorial: $\approx n!$
  - é muitas vezes dito ter complexidade "exponencial", apesar de o fatorial ter comportamento muito pior.
  - geralmente ocorre quando se usa uma solução de força bruta.
  - para $n = 20$, $n! \approx 2,4 \times 10^{18}$,
  - – para o dobro $n = 40$, $n! \approx 8,2 \times 10^{47}$.
  - definitivamente, **não** são úteis do ponto de vista prático.

# Funções e tempo cronológico

| | |
|---|---|
| (ciano) | segundos |
| (bege) | minutos |
| (lilás) | séculos |

| Características Aproximadas do Hardware | |
|---|---|
| Número de Instruções executadas por Ciclo do relógio (IPC) | 8 |
| Freqüência (1 / período do ciclo em min.) | 3E+09 |
| No. de Instruções por minuto | 24E+09 |

| $T(n)$ | $n = 20$ | $n = 40$ | $n = 60$ | $n = 80$ |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | 5,3E-08 | 1,1E-07 | 1,6E-07 | 2,1E-07 |
| $n \log n$ | 2,3E-07 | 5,7E-07 | 9,5E-07 | 1,3E-06 |
| $n^2$ | 1,1E-06 | 4,3E-06 | 9,6E-06 | 1,7E-05 |
| $n^3$ | 2,1E-05 | 1,7E-04 | 5,8E-04 | 1,4E-03 |
| $2^n$ | 2,8E-03 | 48,9 | 1,0 | 1,0E+06 |
| $3^n$ | 0,2 | 5,4E+08 | 1,9E+18 | 6,6E+27 |

Fonte da figura: notas de aula do Prof. Ricardo Campello

# Exercício

- Um algoritmo tradicional e muito utilizado possui complexidade $n^{1,5}$, enquanto um algoritmo novo proposto é da ordem de $n \log n$:
  - $f(n) = n^{1,5}$
  - $g(n) = n \log n$
- Qual algoritmo adotar?
- Uma possível solução:

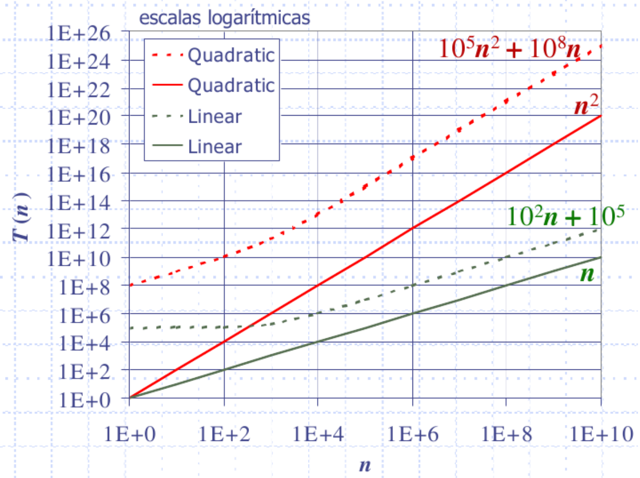
$$f(n) = \frac{n^{1,5}}{n} = n^{0,5} \quad \Rightarrow \quad (n^{0,5})^2 = n$$

$$g(n) = \frac{n \log n}{n} = \log n \quad \Rightarrow \quad (\log n)^2 = \log^2 n$$

- Como $n$ cresce mais rapidamente do que qualquer potência de log, o algoritmo novo é mais eficiente.

# Dicas de análise na prática

- Se $f(n)$ for um polinômio de grau $d$ então $f(n)$ é $O(n^d)$
  - despreze os termos de menor ordem
  - despreze os fatores constantes
- Use a menor classe de funções possível
  - $2n$ é $O(n)$, ao invés de $2n$ é $O(2n)$
- Use a expressão mais simples
  - $3n + 5$ é $O(n)$, ao invés de $3n + 5$ é $O(3n)$




Exemplo: $n^2$ vs. $10^5 n^2 + 10^8 n$ e $n$ vs. $10^2 n^2 + 10^5$

Fonte da figura: notas de aula do Prof. Ricardo Campello

# Dicas de análise na prática

- Há casos em que a análise assintótica ignora fatores assintoticamente irrelevantes, mas relevantes na prática: em especial quando temos interesse em entradas relativamente pequenas.
- Ao comparar dois algoritmos com tempo de execuçao:
  - $f(n) = 10^{100}n$, e
  - $g(n) = 10n \log n$

  pela análise assintótica, o primeiro é mais eficiente
- No entanto, $10^{100}$ é o número estimado (por alguns astrônomos) como o limite superior para a quantidade de átomos no universo observável
  - $10n \log n > 10^{100}n$ apenas para $n > 2^{10^{99}}$

- **Repetições**: o tempo de execução é pelo menos o tempo dos comandos dentro da repetição multiplicada pelo número de vezes que é executada.
  - o exemplo abaixo é $O(n)$

```
para i de 1 ate n faca
   a = a*i
```

- **Repetições aninhadas**: análise feita de dentro para fora
  - o tempo total é o tempo de execução dos comandos multiplicado pelo produto do tamanho de todas as repetições.
  - o exemplo abaixo é $O(n^2)$

```
para i de 1 ate n faca
   para j de 0 ate n-1 faca
      a = a*(i+j)
```

# Dicas de análise na prática

- **Condições**: o tempo nunca é maior do que o tempo do teste mais o tempo do maior entre os comandos dentro do bloco do "então" e do "senão"
  - o exemplo abaixo é $O(n)$

```
se (a < b) entao
   a = a + 1
senao
   para i de 1 ate n-1 faca
      a = a*i
```

- **Chamadas à subrotinas**:
  - a subrotina deve ser analisada primeiro e depois ter suas unidades de tempo incorporadas ao programa que a chamou

# Exercício

- Quantas unidades de tempo são necessárias para rodar o algoritmo abaixo? Qual a ordem de complexidade de tempo?

```
inicio
   i, j: inteiro
   A: vetor inteiro de n posicoes
   i = 1

   enquanto (i < n) faca
      A[i] = 0
      i = i + 1

   para i = 1 ate n faca
      para j = 1 ate n faca
         A[i] = A[i] + (i*j)
fim
```

# Bibliografia


- CORMEN, T.H. et al. **Algoritmos: Teoria e Prática** (Caps. 1–3). Campus. 2002.
- ZIVIANI, N. **Projeto de algoritmos**: com implementações em Pascal e C (Cap. 1). 2.ed. Thomson, 2004.
- FEOFILOFF, P. **Minicurso de Análise de Algoritmos**, 2010. Disponível em: `http://www.ime.usp.br/~pf/livrinho-AA/`.
- DOWNEY, A.B. **Analysis of algorithms** (Cap. 2), Em: Computational Modeling and Complexity Science. Disponível em: `http://www.greenteapress.com/compmod/html/book003.html`
- ROSA, J.L. **Notas de Aula de Introdução a Ciência de Computação II**. Universidade de São Paulo. Disponível em: `http://coteia.icmc.usp.br/mostra.php?ident=639`
- CAMPELLO, R. **Notas de Aula de Introdução a Ciência de Computação II**. Universidade de São Paulo. Disponível em: `http://coteia.icmc.usp.br/mostra.php?ident=611`