2ª Lista de Exercícios - SME0822 Análise Multivariada - Profª Cibele Russo

---

Exercício 1. Resolver exercícios de Johnson and Wichern (2007), disponíveis na Coteia WIKI:

- 3.13, 3.16, 3.17, 3.20 pág 146-148
- 4.1, 4.3, 4.4, 4.8, 4.9, 4.17, 4.19, 4.22, 4.29, 4.39, 4.40, pág 200-208

Exercício 2. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I)$, com $\sigma^2 > 0$ e I a matriz identidade de ordem p. Mostre que $A\underset{\sim}{X}$ e $(I - A^- A)\underset{\sim}{X}$ são independentes e que cada uma tem distribuição normal. A matriz A^- é a **inversa generalizada** de A, que satisfaz $AA^-A = A$.

Exercício 3. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ e $\underset{\sim}{a}$ um vetor fixo qualquer de dimensão p. Mostre que

$$Z = \underset{\sim}{a} \sim N(0, 1).$$

Exercício 4. Se $\underset{\sim}{X} \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix},$$

determine o valor de a para que $\underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{X}$ sejam independentes, com $\underset{\sim}{b}' = (1, 1, 1)$ e $\underset{\sim}{c}' = (1, -1, -1)$.

Exercício 5. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_3(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ com

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & 0 \\ \rho^2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mostre que a distribuição condicional de (X_1, X_2) dado X_3 tem média $[\mu_1 + \rho^2(X_3 - \mu_3), \mu_2]'$ e matriz de variâncias e covariâncias

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho^4 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6. Sejam $\underset{\sim}{X}_1$, $\underset{\sim}{X}_2$ e $\underset{\sim}{X}_3$ vetores aleatórios independentes com distribuição $N(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ e considere $\underset{\sim}{Y}_1 = \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_2$, $\underset{\sim}{Y}_2 = \underset{\sim}{X}_2 + \underset{\sim}{X}_3$ e $\underset{\sim}{Y}_3 = \underset{\sim}{X}_1 + \underset{\sim}{X}_3$. Obtenha a distribuição condicional de $\underset{\sim}{Y}_1|\underset{\sim}{Y}_2$ e de $\underset{\sim}{Y}_1|\underset{\sim}{Y}_2, \underset{\sim}{Y}_3$.

Exercício 7. Seja $\underset{\sim}{X} \sim N_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$ e considere a seguinte partição

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{X}_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\mu}_1 \\ \underset{\sim}{\mu}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right),$$

em que $\underset{\sim}{X}_1$ e $\underset{\sim}{X}_2$ são vetores aleatórios de dimensão $(q \times 1)$ e $(p - q \times 1)$, respectivamente. Mostre que $\Sigma_{12} = 0$ implica independência entre $\underset{\sim}{X}_1$ e $\underset{\sim}{X}_2$, utilizando a função densidade de probabilidade da normal multivariada (Veja dica no exercício 4.14 de Johnson and Wichern, 2007, p.204).

Referências

- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (2007) Applied Multivariate Statistical Analysis. 5th edition. Prentice-Hall
- Coteia WIKI
  http://wiki.icmc.usp.br/index.php/SME0822.