Cálculo I - Lista 4 (Gabarito)

1) Dado $\epsilon > 0$, seja $0 < \delta \leq \epsilon^n$.
Se $0 < x < \delta$ então $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\epsilon^n} = \epsilon$.

2) Dado $\epsilon > 0$, seja $0 < \delta \leq \sqrt{a}\epsilon$.
Se $0 < |x-a| < \delta$ então $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} = \epsilon$.

3) (a) $\Rightarrow$ (b)
Dado $\epsilon > 0$ por (a), sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x-a| < \delta$ então, $|f(x) - I| < \epsilon$, ie, $\lim_{x\to a}(f(x) - I) = 0$

(b) $\Rightarrow$ (c)
Dado $\epsilon > 0$, por (b), sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x-a| < \delta$ então, $|f(x) - I| < \epsilon$. Logo, se $0 < |h| < \delta$, então $0 < |(a+h) - a| < \delta$ e, portanto, $|f(a+h) - I| < \epsilon$, ie, $\lim_{h\to 0} f(a+h) = I$.

(c) $\Rightarrow$ (a)
Dado $\epsilon > 0$, por (c), sabemos que existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |h| < \delta$ então, $|f(a+h) - I| < \epsilon$. Logo, se $0 < |x-a| < \delta$ então, $|f((x-a)+a) - I| < \epsilon$, ie, $\lim_{x\to a} f(x) = I$.

4) *Primeiro modo de resolução.* Restrinja-se a $\delta \leq 1$. Dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{2}\}$.
Se $0 < |x-1| < \delta$ então, $|(x^2-7) - (-6)| = |x^2 - 1| = |x-1||x+1| < 2\delta < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Segundo modo de resolução. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \sqrt{1+\epsilon} - 1$. Se $0 < |x-1| < \delta$ então, $|(x^2-7) - (-6)| = |x^2-1| = |x-1||x+1| = |x-1||x-1+2| < \delta(\delta+2) = \epsilon$.

5) Como $V = RI$, a corrente I em função da corrente R é dada por $I(R) = V/R = 120/R$. Observando que $\lim\limits_{R\to 24} I(R) = 5$, a resolução pode ser dada em termos da definição de limite: para uma precisão $\epsilon = 0,1$ dada, devemos determinar $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |R - 24| < \delta \Rightarrow |I(R) - 5| < 0,1.$$

Agora, $|I(R) - 5| < 0,1$ é equivalente a

$$-0,1 < \frac{120}{R} - 5 < 0,1$$

ou seja,

$$\frac{120}{5,1} < R < \frac{120}{4,9}.$$

Sendo

$$\frac{120}{5,1} = 23,52941176470588 \quad \text{e} \quad \frac{120}{4,9} = 24,48979591836735,$$

temos
24 - 23,52941176470588 = 0,4705882352941176
24,48979591836735 - 24 = 0,4897959183673469
Assim, podemos tomar $\delta = 0,4705882352941176$, para obter como resposta possível o intervalo $[23,52941176470588, 24,47058823529412]$.

6a) -9

6b) $\frac{1}{27}$

6c) $-\frac{1}{2}$

6d) $+\infty$

6e) 11

6f) $\nexists$

6g) $-\frac{4}{7}$

6h) 0

6i) 4

6j) 1

6k) 0

6l) 2

6m) -1

6n) $\frac{1}{5}$