$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - 30/03/2011

(Critério da divergência, Testes da comparação, comparação no limite e da integral)

1. Determine se cada uma das sequências converge ou diverge.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+2}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)2^n}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

   (l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{1+n^2}$

   (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\ln(n+2)}$

   (o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$

   (p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

   (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

   (r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$

   (s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

2. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos não-negativos, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ também converge. Com as mesmas hipóteses, mostre com exemplos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ pode ser convergente ou divergente.

3. (a) A série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge por comparação com a série harmônica, pois
   $$\frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$$
   para $n \geq 3$. Estabeleça essa divergência por meio do teste da integral.

   (b) Se p é uma constante positiva, mostre que $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.