

1. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com $\text{posto}(\boldsymbol{\Sigma}) = n$, determine a distribuição de $\mathbf{Y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}$.
2. Sejam \mathbf{Y} um vetor aleatório $n \times 1$ com vetor de médias $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\sigma^2 \mathbf{I}_n$. Se \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$, calcule $E(\mathbf{Y}^\top \mathbf{A} \mathbf{Y})$.
3. Sejam $\mathbf{W} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, \mathbf{B} uma matriz $q \times p$ e \mathbf{b} um vetor $q \times 1$. Prove que $\mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{b}$ tem distribuição $N_q(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top)$.
4. Se Y_1, \dots, Y_n é uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, prove que \bar{Y} e $S^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 / (n - 1)$ são variáveis aleatórias independentes.
5. Se $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$, determine a variância de $(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + \dots + (Y_{n-1} - Y_n)^2$.
6. Seja $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$. Prove que se $\mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} = Q_1 + Q_2$ e $Q_1 \sim \chi_a^2$, então $Q_2 \sim \chi_{n-m}^2$, em que $Q_1 = \mathbf{Y}^\top \mathbf{A} \mathbf{Y}$ e \mathbf{A} é uma matriz $n \times n$ simétrica e idempotente com $\text{posto}(\mathbf{A}) = m$, $m < n$.
7. Considere o modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, em que $E(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$, $\text{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ e \mathbf{X} é a matriz modelo $n \times p$ de posto $p < n$, prove que¹
 - (a) $\text{Cov}(\mathbf{e}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$,
 - (b) $\text{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}$,
 - (c) $\text{Cov}(\mathbf{e}, \mathbf{Y}) = \sigma^2 \{\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top\}$ e
 - (d) $\text{Cov}(\mathbf{e}, \hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}$,em que $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ é o vetor de resíduos.
8. No modelo $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, em que a matriz modelo \mathbf{X} tem posto $p < n$, prove que
$$\frac{1}{\sigma^2} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim \chi_p^2.$$
9. No modelo do exercício 8, determine a distribuição do vetor de resíduos \mathbf{e} (vide exercício 7).
10. Sejam $Y_1 = \theta + \epsilon_1$, $Y_2 = 2\theta - \gamma + \epsilon_2$ e $Y_3 = \theta + 2\gamma + \epsilon_3$, em que $E(\epsilon_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Determine os estimadores de mínimos quadrados de θ e γ .

¹Indique a dimensão de cada vetor ou matriz denotado por $\mathbf{0}$.