Grafos – parte 2

Algoritmos e Estruturas de Dados 2

2010

Percorrendo um grafo

Percorrendo um Grafo

- Percorrer um grafo é um problema fundamental
- Deve-se ter uma forma sistemática de visitar as arestas e os vértices
- O algoritmo deve ser suficientemente flexível para adequar-se à diversidade de grafos

Eficiência

Percorrendo um Grafo

- Eficiência
  - Não deve haver repetições (desnecessárias) de visitas a um vértice e/ou aresta (apenas duas visitas a cada aresta)

Correção

Percorrendo um Grafo

- Correção
  - Todas os vértices e/ou arestas devem ser visitados

Solução

Percorrendo um Grafo

- Solução
  - Marcar os vértices com...
    - não visitados
    - visitados
    - processados

Solução

Percorrendo um Grafo

- Solução
  - Manter uma lista de vértices no estado ´visitados´
  - Há duas possibilidades:
    - Fila
    - Pilha

BFS (Busca em Largura)

Percorrendo um Grafo

- BFS – Breadth-First Search
  - Em grafos não-dirigidos cada aresta é visitada somente duas vezes
  - Em grafos dirigidos cada aresta é visitada uma única vez

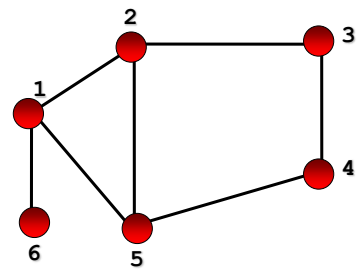
BFS

```
{ Percorre um grafo G a partir de um vértice
  inicial s informado. Pode realizar processa-
  mento à medida que visita vértices e arestas }


"Descobre" todos os vértices alcançáveis a partir
de s;
Calcula a distância de s a cada vértice alcançável
Gera uma árvore em largura com raiz em s com todos
os vértices alcancáveis v, tal que o caminho na árvore
corresponde ao menor caminho entre s e v.
```

```
BFS (G,s)
  for each vertex u ∈ V[G] - {s} do
      color[u] = "WHITE"
d[u] = INF
      p[u] = NIL
  end-for
  color[s]= GRAY, d[s] = 0, p[s] = NIL
  initialize(Q)
  enqueue(Q,s)
  while (not empty(Q)) do
    u = dequeue[Q]
    processe o vértice u conforme desejado
    for each v ∈ Adj[u] do
       processe a aresta (u,v) conforme desejado
       if color[v] = "WHITE" then
          color[v] = "GRAY"
          d[v] = d[u] + 1
          p[v] = u
          enqueue(Q,v)
       end-if
    end-for
    color[u] = "BLACK"
  end-while
```

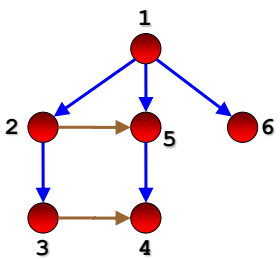

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS



BFS Tree

Percorrendo um Grafo: BFS Tree



Complexidade do BFS

O(V + E), ou seja, linear em relação ao tamanho da representação de G por lista de adjacências

Todos os vértices são empilhados/desempilhados no máximo uma vez. O custo de cada uma dessas operações é O(1), e elas são executadas O(V) vezes.

A lista de adjacências de cada vértice é percorrida no máximo uma vez (quando o vértice é desempilhado). O tempo total é O(E) (soma dos comprimentos de todas as listas, igual ao número de arestas)

Inicialização é O(V)

DFS – Busca em Profundidade

Percorrendo um Grafo

DFS - Depth-First Search

Recursivo, eliminando assim a necessidade de uma estrutura de lista (fila ou pilha)

DFS

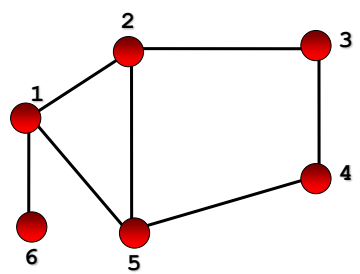
```
{ Percorre um grafo G. Pode realizar processa-
  mento à medida que visita vértices e arestas }

DFS-graph (G)
   for each vertex u ∈ V[G] do
       color[u] = "WHITE"
 p[u] = NIL
   end-for
   time = 0
   for each vertex u ∈ V[G] do
      if color[u] = "WHITE" then
         inicialize um novo componente
   DFS-visit(u)
      end-if
   end-for
```


DFS

```
DFS-visit(u)
   color[u] = "GRAY"
   time = time + 1
   d[u] = time
   processe o vértice u conforme desejado
   for each v ∈ Adj[u] do
        processe a aresta (u,v) conforme desejado
        if color[v] = "WHITE" then
           p[v] = u
           DFS-visit(v)
        end-if
   end-for
   color[u] = "BLACK"
   f[u] = time = time + 1
```

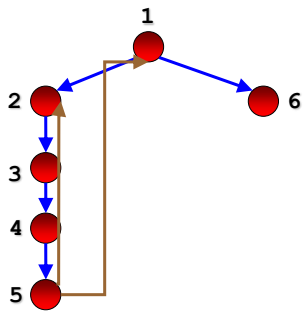

DFS

Percorrendo um Grafo: DFS



DFS Tree

Percorrendo um Grafo: DFS Tree



17

Complexidade do DFS

O(V + E)

No algoritmo principal, cada for é O(V). O DFS-visit é chamado exatamente uma vez para cada vértice de V (na pior das hipóteses)

No DFS-visit, o laço é executado |adj[v]| vezes, i.e., O(E) no total

18

DFS

- Uma aplicação clássica do DFS consiste em decompor um grafo direcionado (dígrafo) em componentes fortemente conexos.
- Um grafo direcionado é fortemente conexo se quaisquer dois vértices são mutuamente alcançáveis entre si.
- Um componente fortemente conexo de um grafo é um sub-conjunto maximal C de vértices de V tal que qualquer par de vértices de C é mutuamente alcançável.
- Algoritmo no Cormen, p. 554, v. tb. livro Ziviani

19

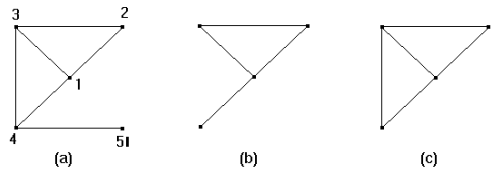
Tarefas

1. Escrever uma versão não recursiva do DFS
2. Escreva um algoritmo que verifique se um dado grafo G(V,E) é acíclico.
   Dica: a solução é uma aplicação do algoritmo DFS. Se na busca em profundidade é encontrada uma aresta (u,v) ∈ E conectando um vértice *u* com um seu antecessor *v* na árvore de busca em profundidade, então o grafo tem ciclo. Igualmente, se G tem ciclo uma aresta desse tipo será encontrada em qqr busca em profundidade em G
3. Escreva um algoritmo que determina as componentes fortemente conexas de um grafo direcionado G(V,E).
   Dica: solução tb. aplica algoritmo de busca em profundidade...

20

Sub-grafo

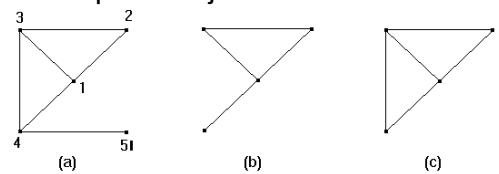
Um sub-grafo **G2(V2,E2)** de um grafo **G1(V1,E1)** é um grafo tal que **V2** está contido em **V1** e **E2** está contido em **E1**



b e c são subgrafos de a

Sub-grafo induzido

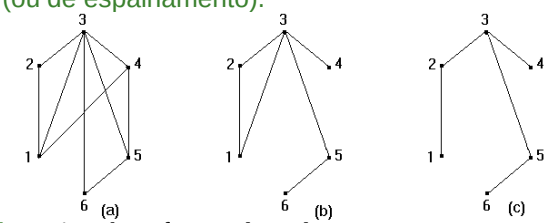
Se o sub-grafo **G2** de **G1** satisfaz: para quaisquer **v**, **w** pertencentes a **V2**, se **(v,w)** pertence a **E1**, então **(v,w)** também pertence a **E2**. Dessa forma, **G2** é dito sub-grafo induzido pelo conjunto de vértices **V2**



b e c são sub-grafos de a, mas apenas c é sub-grafo induzido

Sub-grafo gerador

Sub-grafo Gerador ou sub-grafo de espalhamento de um grafo **G1(V1,E1)** é um sub-grafo **G2(V2,E2)** de **G1** tal que **V1=V2**. Quando o sub-grafo gerador é uma árvore, ele recebe o nome de árvore geradora (ou de espalhamento).



b e c são sub-grafos geradores de a

c é árvore geradora de a e b

Sub-grafo gerador de custo mínimo

- Formalmente...
- Dado um grafo não orientado G(V,E)
  - onde *w*: E→$\Re^+$ define os custos das arestas
  - queremos encontrar um sub-grafo gerador conexo T de G tal que, para todo sub-grafo gerador conexo T´ de G

$$\sum_{e \in T} w(e) \leq \sum_{e \in T'} w(e)$$

Árvore geradora mínima (MST)

- Claramente, o problema só tem solução se G é conexo
- A partir de agora, assumimos G conexo
- Também não é difícil ver que a solução para esse problema será sempre uma árvore...
  - Basta notar que T não terá ciclos pois, c.c., poderíamos obter um outro sub-grafo T´, ainda conexo e com custo menor que o de T, removendo o ciclo!

25

Árvore geradora mínima

- Árvore Geradora (*Spanning Tree*) de um grafo G é um sub-grafo de G que contém todos os seus vértices e, ainda, é uma árvore
- Arvore Geradora Mínima (*Minimum Spanning Tree*, MST) é a árvore geradora de um grafo valorado cuja soma dos pesos associados às arestas é mínimo, i.e., é uma árvore geradora de custo mínimo

26

Porque é um problema interessante?

- Suponha que queremos construir estradas para interligar n cidades
  - Cada estrada direta entre as cidades i e j tem um custo associado
  - Nem todas as cidades precisam ser ligadas diretamente, desde que todas sejam acessíveis...
- Como determinar eficientemente quais estradas devem ser construídas de forma a minimizar o custo total de interligação das cidades?

27

Árvore geradora mínima (MST)

Como encontrar a árvore geradora mínima de um grafo G ?

- Algoritmo Genérico
- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Kruskal

28

Árvore geradora mínima

Algoritmo Genérico

```
Generic-MST(G)
A = ∅
While A não define uma spanning tree
    encontre uma aresta (u,v) segura para A
    A = A ∪ {(u,v)}
Return A
```

A – conjunto de arestas

G conexo, não direcionado, ponderado

Abordagem 'gulosa' -> MST cresce uma aresta por vez

Aresta é 'segura' se mantém a condição de que, antes de cada iteração, A é um sub-conjunto de alguma MST

Algoritmo de Prim

```
{ Gera uma Minimum Spanning Tree do
  grafo ponderado G – Algoritmo de Prim}

Prim-MST (G)
   Escolha um vértice s para iniciar a árvore
   enquanto "Há vértices que não estão na árvore"
      Selecione a aresta com menor peso adjacente
      a um vértice pertencente à árvore e a outro
      não pertencente à árvore

      Insira a aresta selecionada e o respectivo
      vértice na árvore
   fim-enquanto
```


Algoritmo de Prim

Inicia em um determinado vértice e gera a árvore, uma aresta por vez

Complexidade (tempo): O(n.m)

n: número de vértices

m: número de arestas

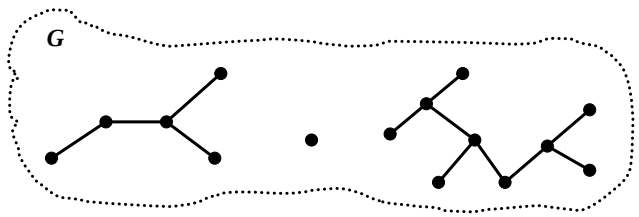
Algoritmo de Prim

- Maneira mais eficiente de determinar a aresta de menor peso a partir de um dado vértice
  - manter todas as arestas que ainda não estão na árvore em uma fila de prioridade (*heap*)
  - prioridade é dada à aresta de menor peso adjacente a um vértice na árvore e outro fora dela

Complexidade (tempo): O(m.log(n))

Floresta

- Uma Floresta é um conjunto de árvores.



Algoritmo de Kruskal

- Mais eficiente que Prim em grafos esparsos
- Não inicia em nenhum vértice em particular
  - Considera se cada aresta individualmente pode ou não pertencer à árvore geradora mínima, analisando-as em ordem crescente de custo
  - As árvores que compõem a floresta são identificadas pelos conjuntos S_i, que contém os vértices que a compõem
  - Ao final do processo, o conjunto E_T contém a solução do problema, i.e., a MST
  - Complexidade: O(m log(m))
    - Se o teste $S_p \cap S_q = \varnothing$ for bem implementado…
    - Esse teste garante que a inclusão de *e* em E_T não introduz um ciclo

Algoritmo de Kruskal

Basicamente, o algoritmo consiste de

"Incluir em E_T todas as arestas de E em ordem crescente de peso, rejeitando, contudo, cada uma que forma ciclos com as arestas já em E_T."

Pode ser interpretado como sendo a construção de uma árvore geradora a partir de uma floresta.

Estado inicial: corresponde à floresta formada por n árvores triviais (um só vértice cada), i.e.,

$E_T = \varnothing$

Algoritmo de Kruskal

```
{ Gera uma Minimum Spanning Tree do grafo
  ponderado G(V,E), conexo - Algoritmo de Kruskal}
 Kruskal-MST (G)

  Definir conjuntos Sj:{vj}, 1 ≤ j ≤ n, e ET = ∅
  Insira as arestas de E em uma fila de prioridade
  Q, segundo o peso (ordem crescente)
  Enquanto houver arestas na fila faça
     e = unqueue(Q)
     Seja (v,w) o par de vértices extremos de e
     Se v ∈ Sp e w ∈ Sq, Sp ∩ Sq = ∅ então
          Sp = Sp ∪ {Sq}
          eliminar Sq
          ET = ET ∪ {e}
  Fim Enquanto
```

Caminho mínimo

Problema: encontrar o caminho de menor custo (ou o menor caminho) entre dois vértices em um grafo valorado

Algoritmo de Djikstra

Algoritmo de Floyd-Warshall

Caminho mínimo

- Grafo dirigido G(V,E) com função peso w: E$\rightarrow\Re$ que mapeia as arestas em pesos
- Peso (custo) do caminho p = <v_0, v_1, ..., v_k>

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

- Caminho de menor peso entre u e v:

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\Rightarrow} v\} se \exists\ rota\ de\ u\ \ p/v \\ \infty\ cc \end{cases}$$

Caminho mínimo

- Menor caminho entre os vértices *u* e *v* definido como qqr rota p com um peso

$$w(p) = \delta(u,v)$$

Dijkstra

Procedimento Dijkstra(L,v_p,v_q)

-T={v_p} ; PL={0}; P={0}; W=V-T=V-{v_p} //inicialização
-TL={∞ qq w_i pertencente W}
-Enquanto $v_q \notin T$ OU $W \neq \emptyset$
  -Determine v_i tal que $v_i \in W$, $v_k \in T$ e $(v_k,v_i) \in A$
  -Atribua a cada v_i um rótulo temporário igual a dist(v_p,v_i)
  -Se existe mais de uma distância para v_i então
    - rótulo temporário de v_i = min(PL(v_k)+l_{ki}), para todo
  -Seja v o v_i com menor rótulo:
    -Faça v vértice permanente transferindo-o de W para T
    -Armazene em PL o rótulo de v (PL=PL+{TL(v)})
    -Armazene em P o vértice antecessor de v (P=P+{v_k:(v_k,v) ∈ A})
    -TL={∞ qq w_i pertencente W} (lembre-se v∉W)
-Fim do enquanto
-Se $v_q \in T$ então
  -A distância do menor caminho de v_p a v_q é dada por PL(v_q)
  -Para encontrar o menor caminho propriamente dito, basta encontrar v_q em T (ele é o último).
  A partir dele, encontre o vértice correspondente em P (chame-o v_m). Ache v_m em T. Prossiga achando correspondentes aos v_m em P e em T até chegar a v_p.
-Senão
  -Não existe um caminho entre v_p e v_q
-Fim

- L: matriz de distâncias
- V: conjunto de vértices do dígrafo
- T: vetor com os vértices permanentes
- PL: vetor com os labels permanentes
- W: vetor com os vértices ainda não-permanentes
- TL: vetor com rótulos temporários
- P: vetor com vértices 'antecedentes'
- v_p vértice inicial
- v_q vértice final
- l_{ij} distância entre os vértices i e j

Floyd-Warshall

SE $i \neq j$ E $(i,j) \in A$ então $B_0[i,j]=C[i,j]$

SE $(i,j) \notin A$ então $B_0[i,j]=\infty$

SE $i=j$ então $B_0[i,j]=0$

Para $k=1$ até N faça

$B_k[i,j]=\min(B_{k-1}[i,j], B_{k-i}[i,k]+B_{k-1}[k,j])$

B_n contém a distância dos caminhos mínimos de todos os pares de vértices

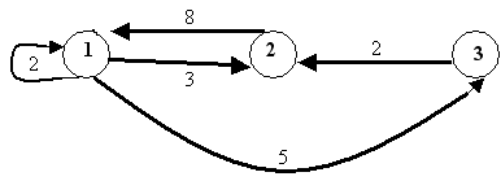
C[i,j]: custo para ir de i a j

A: conjunto de arestas do grafo

N: número de vértices do grafo

41

Exemplo de Floyd-Warshall

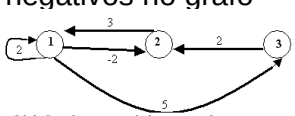


$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

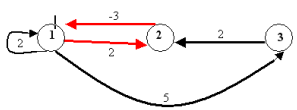
42

Floyd-Warshall

- O algoritmo de Floyd-Warshall determina as distâncias dos menores caminhos entre todos os pares de vértices de um grafo
- Trabalha com arestas com pesos negativos
- Mas não funciona quando existem ciclos negativos no grafo



Ok! Grafo sem ciclo negativo



Nada feito. Grafo com ciclo negativo (arestas vermelhas)

43

Aplicações

Coloração de Grafos

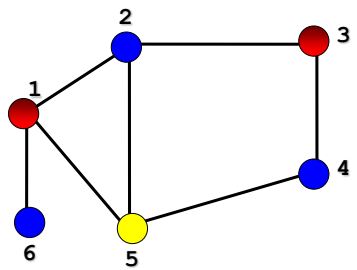
Coloração de Vértices é a busca pela associação de uma cor para cada vértice de forma que

- **nenhuma aresta ligue dois vértices de mesma cor**
- **utiliza-se menor número possível de cores**

44

Aplicações

Aplicações: Coloração de Grafos



Aplicações

Aplicações: Ordenação Topológica

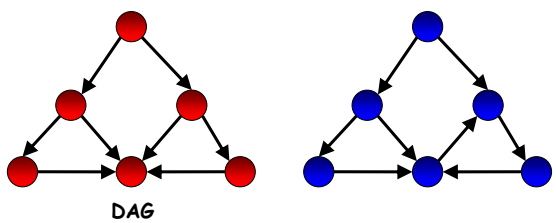
***DAG – Directed-Acyclic Graph** são mais complexos que as árvores*

***DFS** pode ser utilizado para verificar se um grafo é um DAG*

Caso DFS não encontre nenhuma aresta de retorno durante o percurso, o grafo é um DAG

Aplicações

Aplicações: Ordenação Topológica



Aplicações

Aplicações: Vértices de Articulação

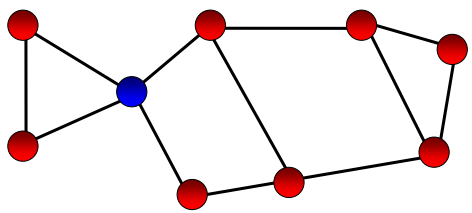
Um vértice de articulação é um vértice cuja exclusão desconecta o grafo

Grafos com este tipo de vértice são frágeis

Conectividade de um grafo é o menor número de vértices cuja exclusão desconecta o grafo

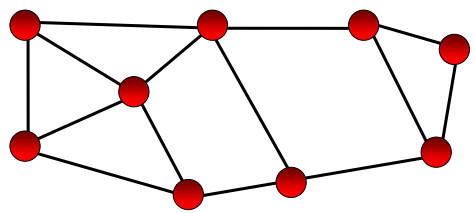
Aplicações

Aplicações: Vértices de Articulação



Aplicações

Aplicações: Vértices de Articulação



Modelagem

Modelando Problemas por Grafos

- Procuro um algoritmo para descobrir rotas mínimas para personagens de um *videogame* movimentarem-se entre dois pontos do cenário.
- Como poderia resolver isto?

Modelagem

Modelando Problemas por Grafos

- Na ordenação de fragmentos de DNA, para cada fragmento f, temos certos outros que são forçados a ligarem-se a f pelo seu lado direito, outros pelo seu lado esquerdo e ainda outros que podem se ligar a qualquer lado
- Como encontrar uma ordenação consistente para todos os fragmentos?

Modelagem

Modelando Problemas por Grafos

- Usando um grafo dirigido no qual cada fragmento é representado por um vértice e o algoritmo de ordenação topológica de grafos dirigidos

Modelagem

Modelando Problemas por Grafos

- Dado um conjunto arbitrário de retângulos num plano, como posso organizá-los em um número mínimo de grupos, de forma que nenhum retângulo sobreponha-se a outro em seu respectivo grupo?

Modelagem

Modelando Problemas por Grafos

- |Tratar como um problema de coloração de grafos, em que cada retângulo é representado por um vértice
- Dois vértices são ligados por uma aresta se os retângulos correspondentes se sobrepõem