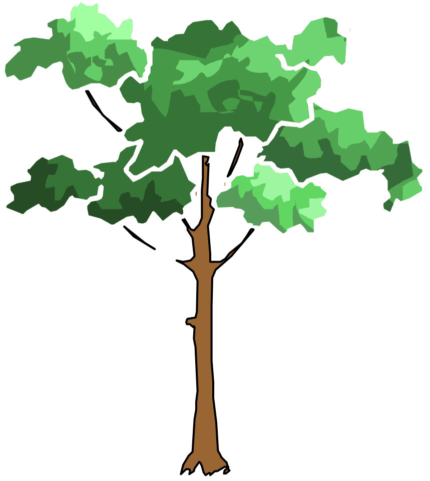
Árvores &
Árvores Binárias



Problema

- Implementações do TAD Lista Linear
  - Lista encadeada
    - eficiente para inserção e remoção dinâmica de elementos, mas ineficiente para busca
  - Lista seqüencial (ordenada)
    - Eficiente para busca, mas ineficiente para inserção e remoção de elementos
- Árvores: solução eficiente para inserção, remoção e busca
  - Representação não linear...

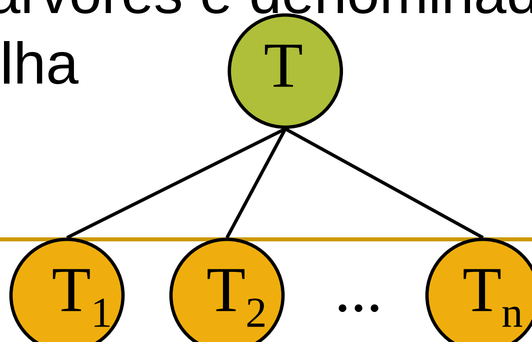
Definições

- Árvore T: conjunto finito de elementos, denominados **nós** ou vértices, tais que:
  - Se T = ∅, a árvore é dita vazia; c.c.

    (i) T contém um nó especial, denominado raiz;

    (ii) os demais nós, ou constituem um único conjunto vazio, ou são divididos em $n \geq 1$ conjuntos disjuntos não vazios $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, que são, por sua vez, cada qual uma árvore;

    - $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são chamadas sub-árvores de T;
    - Um nó sem sub-árvores é denominado nó-folha, ou simplesmente, folha

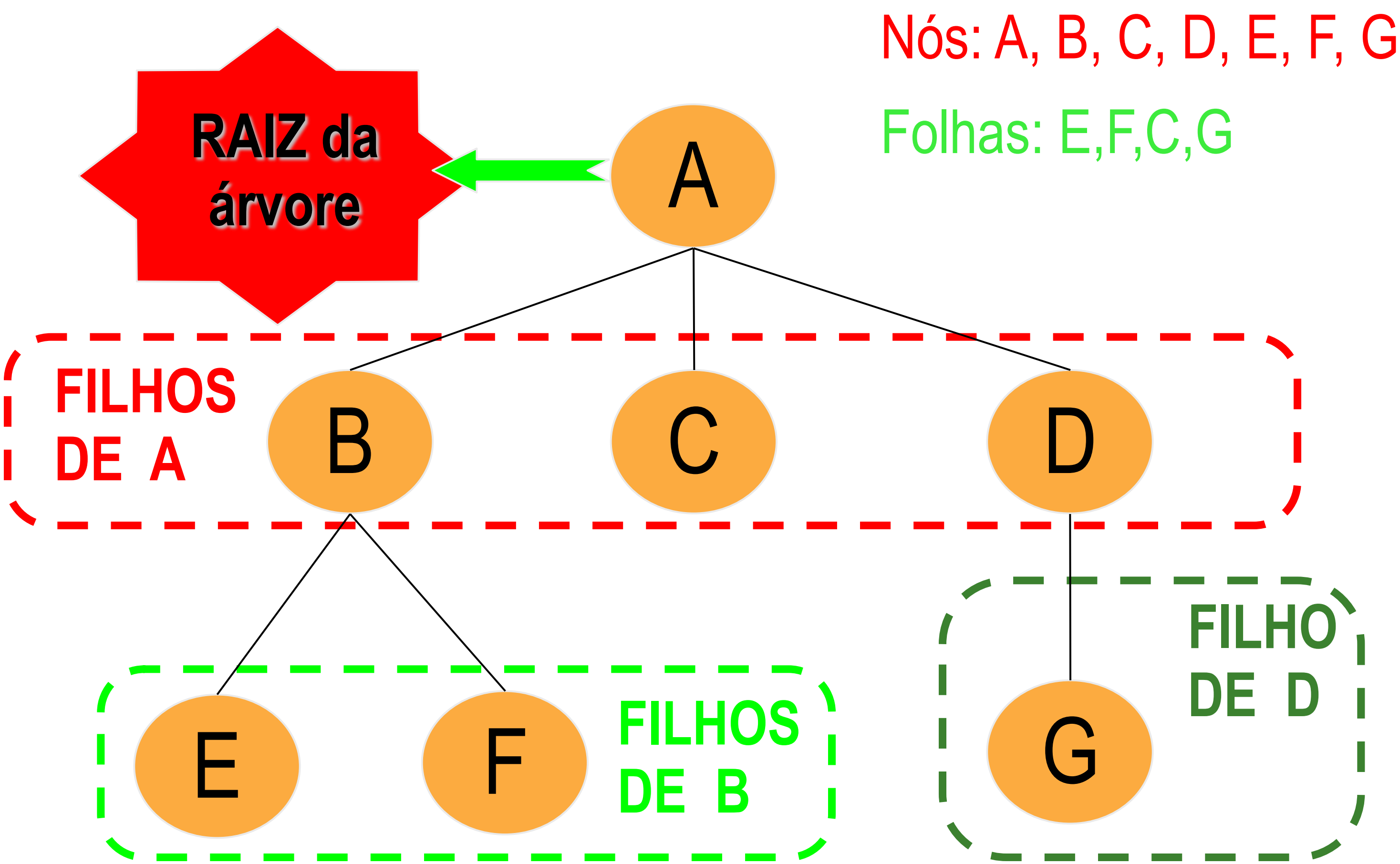


Definições (cont.)

- Árvore: adequada para representar estruturas hierárquicas não lineares, como relações de descendência (pai, filho, irmãos, etc.)

- Se um nó X é raiz de uma árvore, e um nó Y é raiz de uma sub-árvore de X, então X é **PAI** de Y e Y é **FILHO** de X

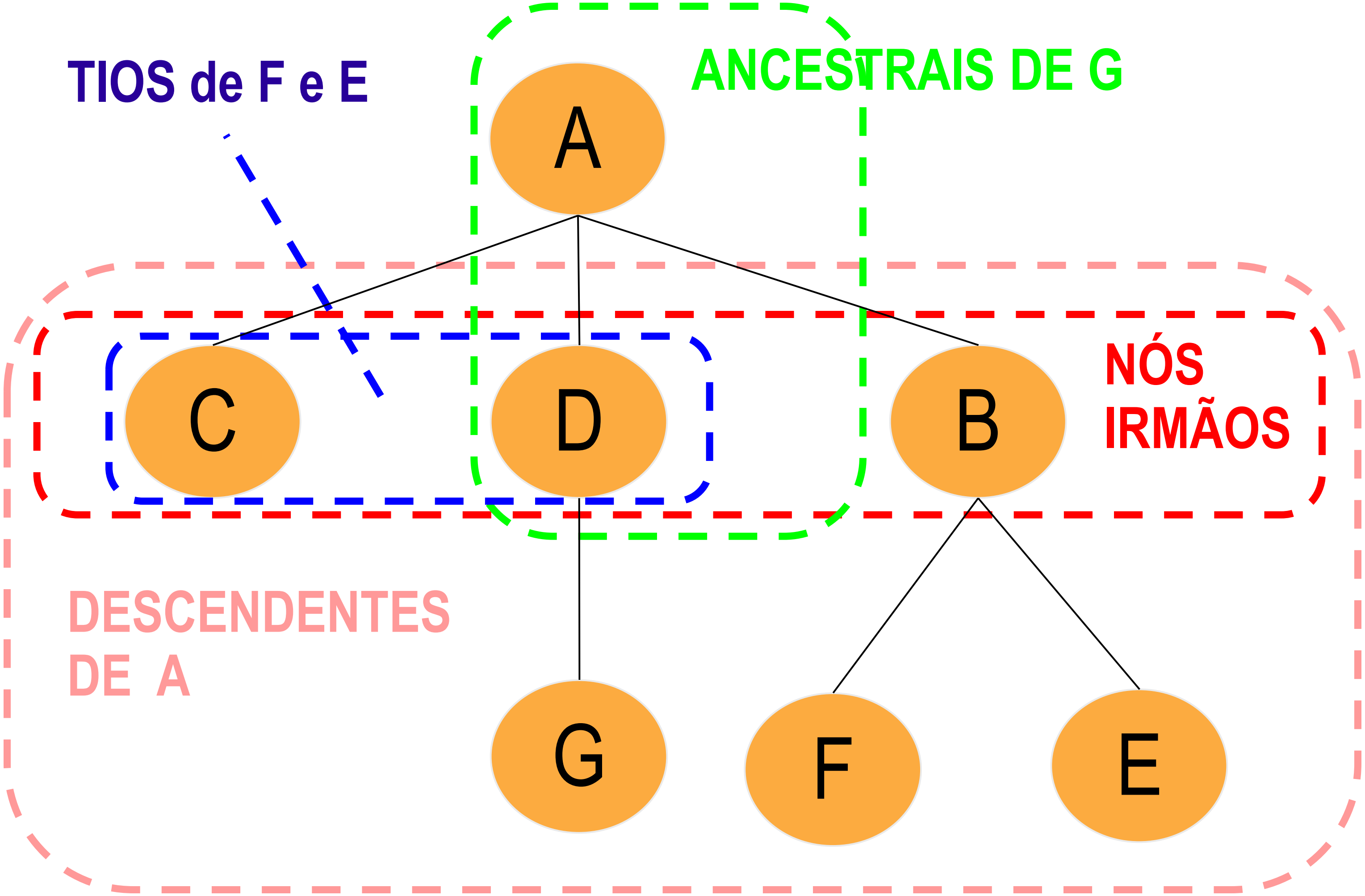
Definições (cont.)



Definições (cont.)

- O nó X é um ANCESTRAL do nó Y (e Y é DESCENDENTE de X) se X é o PAI de Y, ou se X é PAI de algum ANCESTRAL de Y
- Dois nós são IRMÃOS se são filhos do mesmo pai
- Se os nós Y_1, Y_2, ...Y_j são irmãos, e o nó Z é filho de Y_1, então Y_2,...Y_j são TIOs de Z

Definições (cont.)



Conceitos

- O NÍVEL de um nó **X** é definido como:
  - O nível do nó raiz é 1
  - O nível de um nó não-raiz é dado por (nível de seu nó PAI + 1)

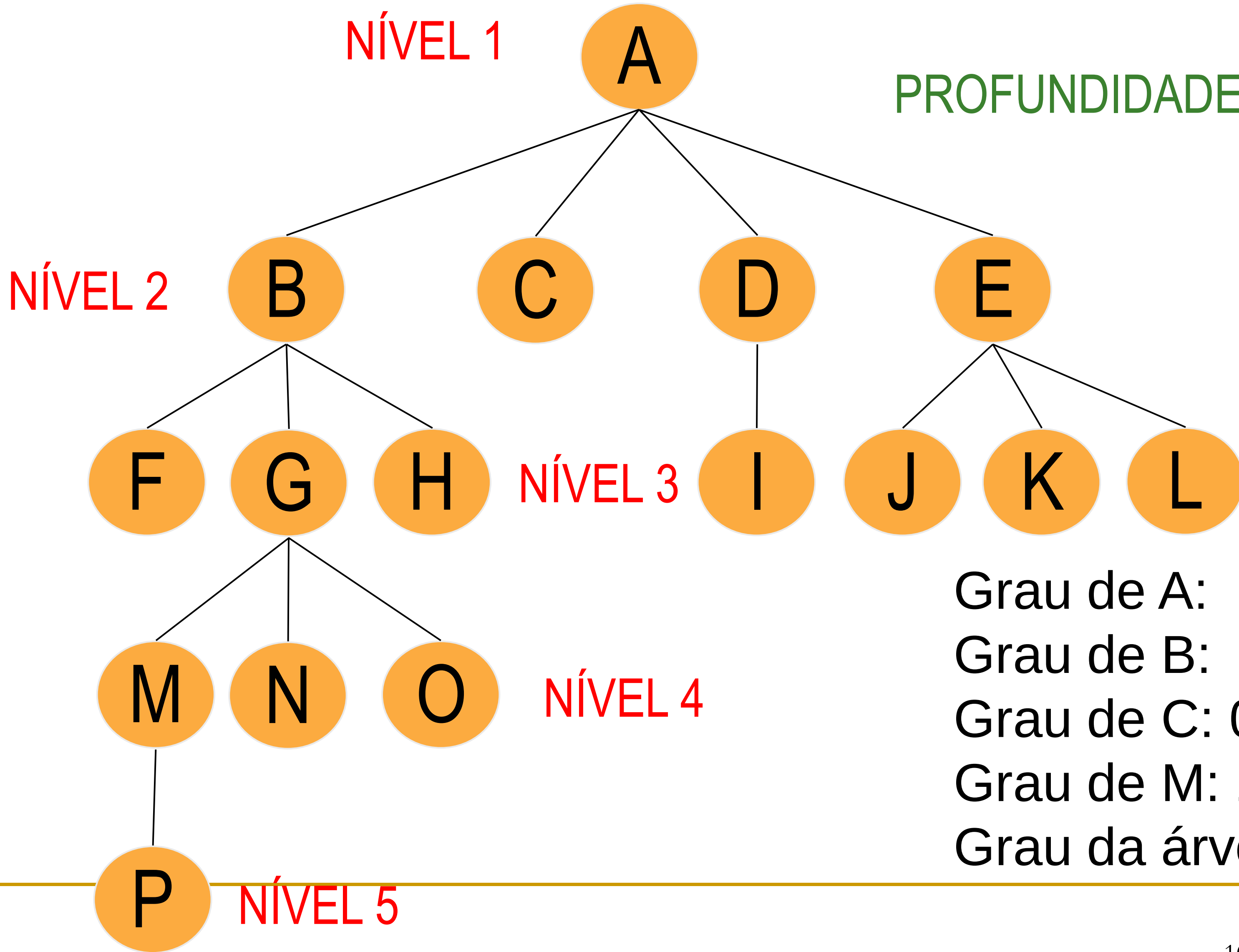
- Os nós de maior nível são também nós-folha.

Conceitos (cont.)

- O GRAU de um nó **X** pertencente a uma árvore é igual ao número de filhos do nó X

- O GRAU de uma árvore T é o maior entre os graus de todos os seus nós

Conceitos (cont.)



Grau de A: 4
Grau de B: 3
Grau de C: 0
Grau de M: 1
Grau da árvore:4

Conceitos (cont.)

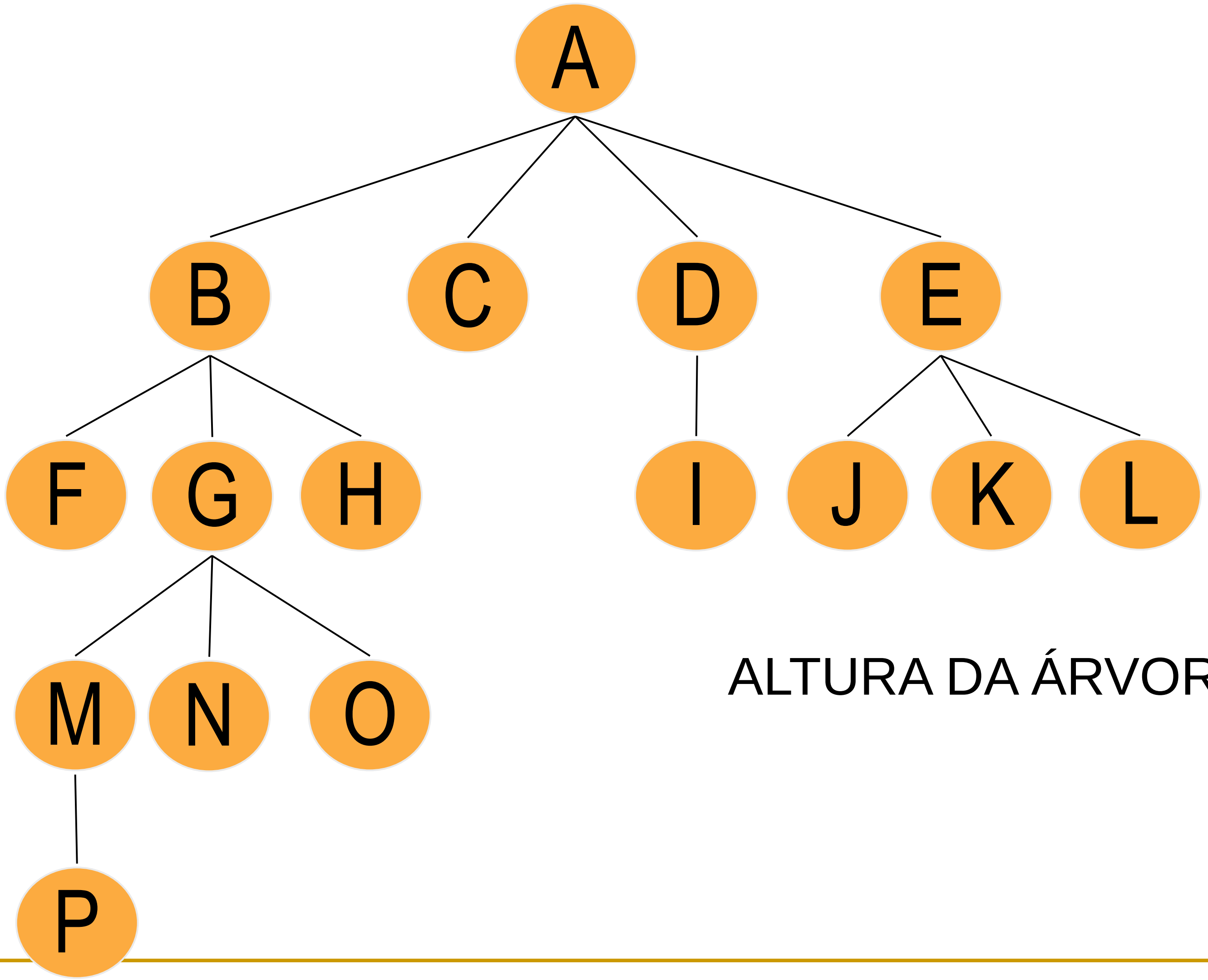
- Uma sequência de nós distintos v_1, ….v_k tal que cada nó v_{i+1} é filho de v_i é denominada um **CAMINHO** na árvore (diz-se que v_i alcança v_k).

- O número de arestas de um caminho define o **COMPRIMENTO** DO CAMINHO.

- A **ALTURA** ou **PROFUNDIDADE** de uma árvore **X** é dada pelo MAIOR NÍVEL de seus nós. Aternativamente, corresponde ao número de nós do maior caminho entre a raiz e os nós folhas.

- Denota-se a altura de uma árvore com raiz **X** por **h(X)**, e a altura de uma sub-árvore com raiz **y** por **h(y)**

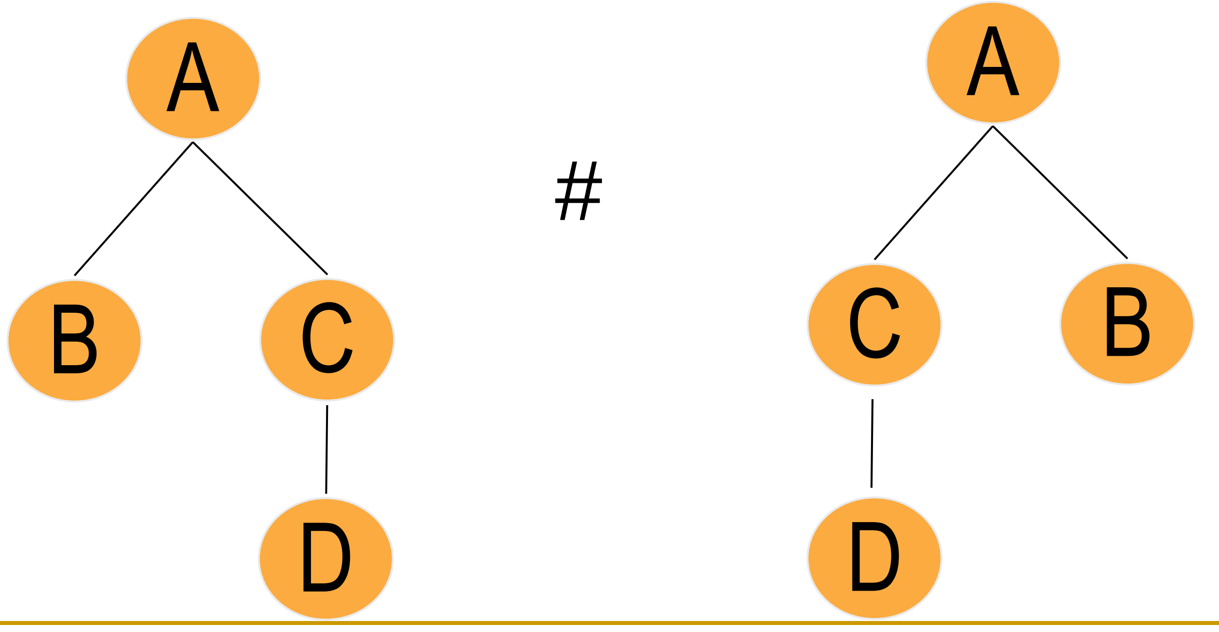
Conceitos (cont.)



ALTURA DA ÁRVORE: 5

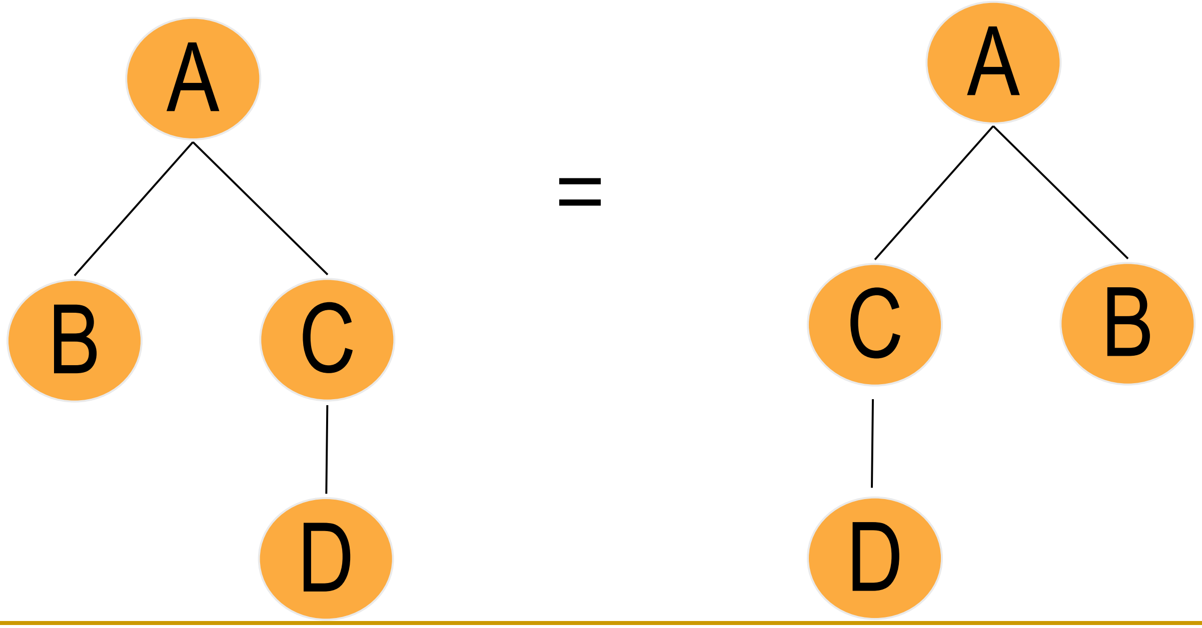
Conceitos (cont.)

- Uma árvore é **ORDENADA** se considerarmos o conjunto de sub-árvores T_1, T_2, …T_n como um conjunto ordenado.



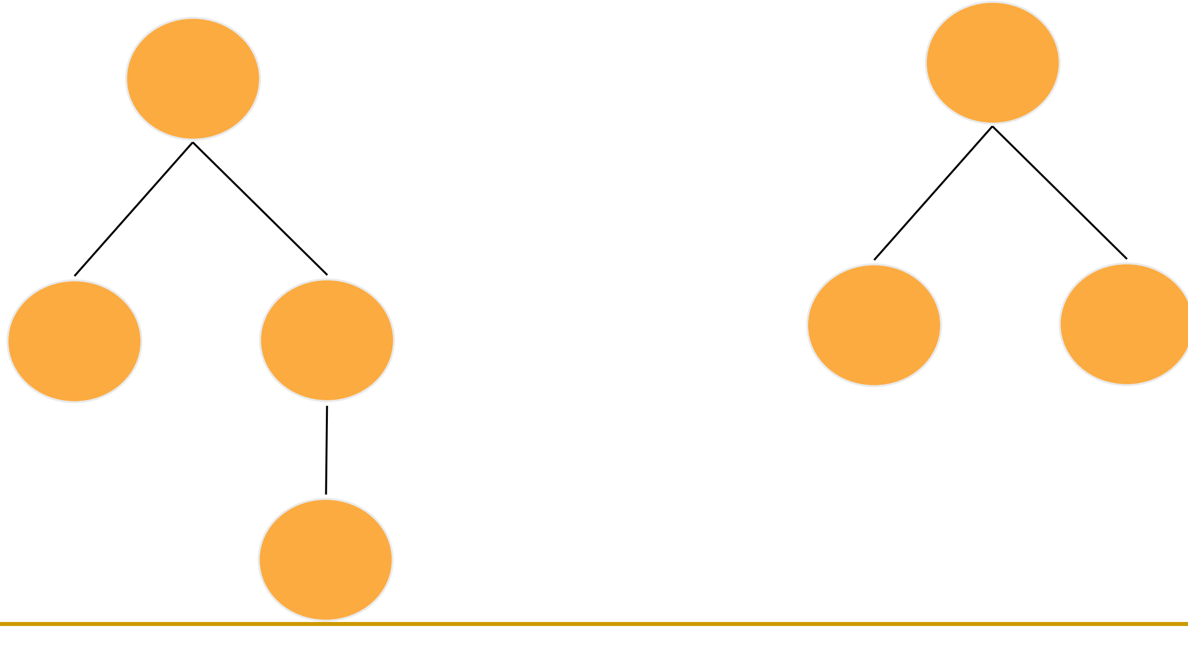
Conceitos (cont.)

- Uma árvore é **ORIENTADA** se apenas a oreintação relativa dos nós – e não sua ordem – está sendo considerada.



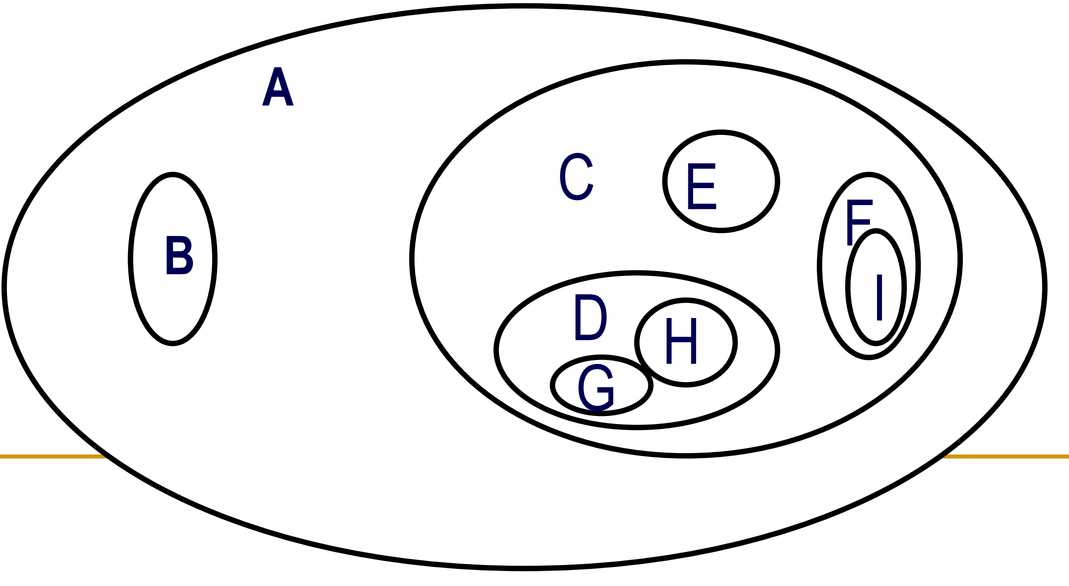
Conceitos (cont.)

- Uma **FLORESTA** é um conjunto de 0 ou mais árvores distintas



Outras Representações Gráficas

- Representação por parênteses aninhados
  - (A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))
  - ou seja, uma lista generalizada!!
- Representação por Diagramas de Venn



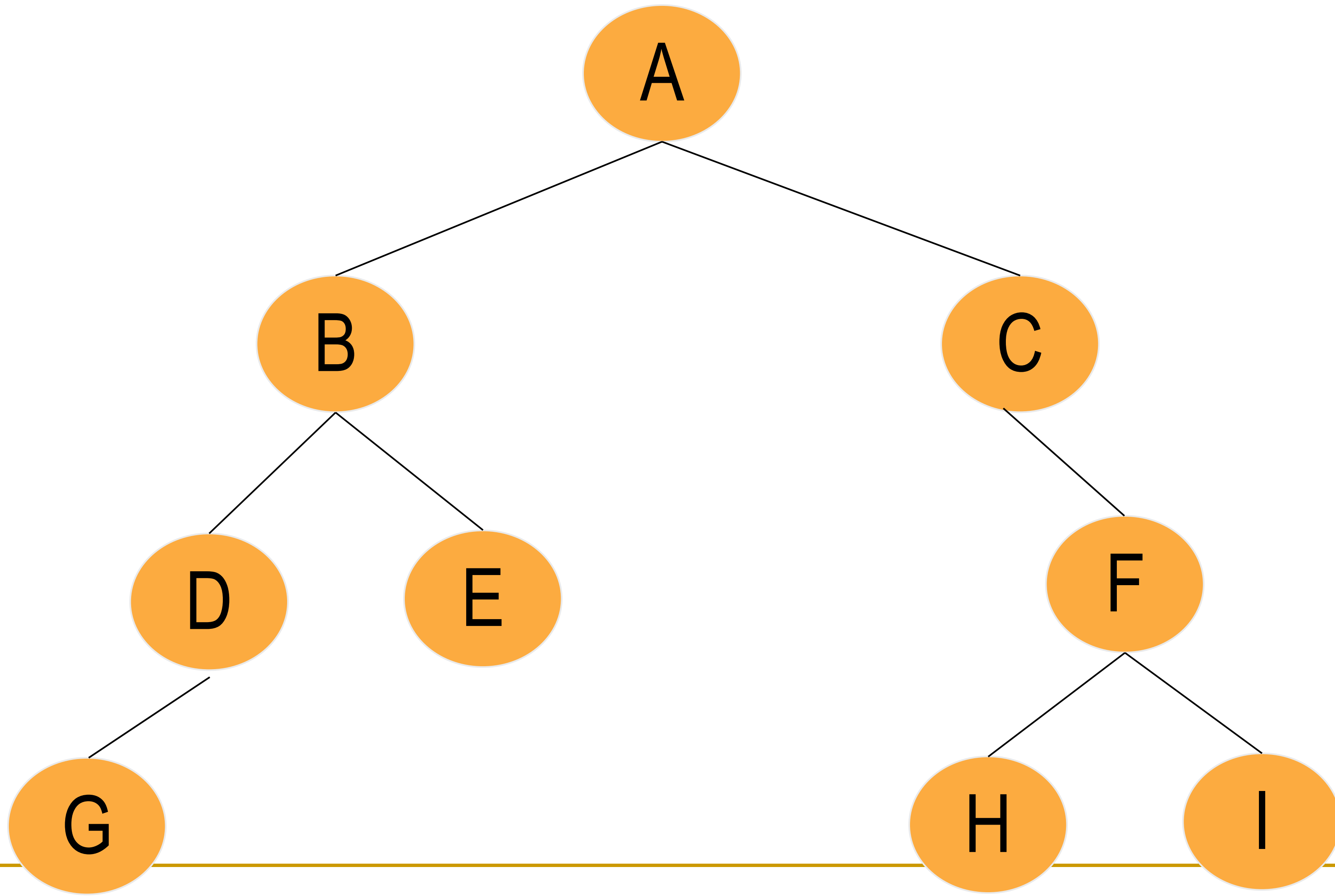
Árvore Binárias (AB)

- Uma Árvore Binária (AB) T é um conjunto finito de elementos, denominados nós ou vértices, tal que:
  - (i) Se T = ∅, a árvore é dita vazia, ou
  - (ii) T contém um nó especial, chamado raiz de T, e os demais nós podem ser subdivididos em dois sub-conjuntos distintos T_E e T_D, os quais também são árvores binárias. T_E e T_D são denominados sub-árvore esquerda e sub-árvore direita de T, respectivamente

Árvore Binárias (AB) (cont.)

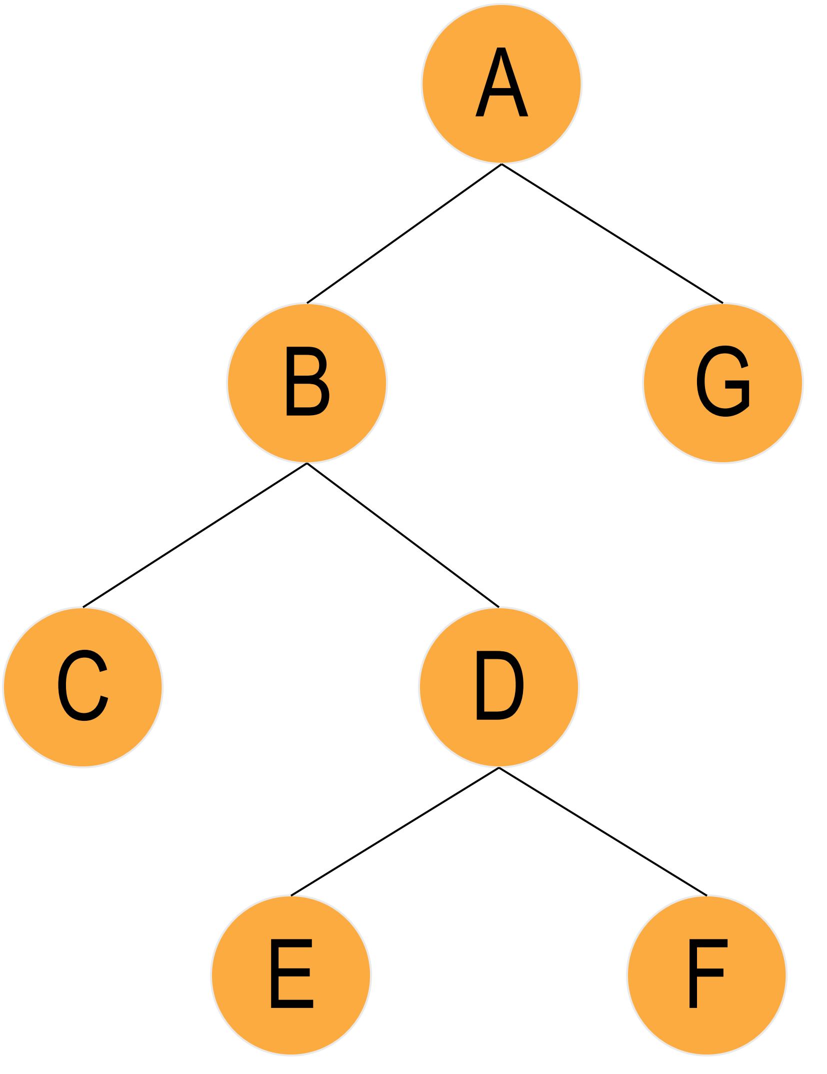
- A raiz da sub-árvore esquerda (direita) de um nó **v**, se existir, é denominada filho esquerdo (direito) de **v**. Pela natureza da árvore binária, o filho esquerdo pode existir sem o direito, e vice-versa
- Se **r** é a raiz de T, diz-se que T_{Er} e T_{Dr} são as sub-árvores esquerda e direita de T, respectivamente

Árvore Binárias (AB) (exemplo)



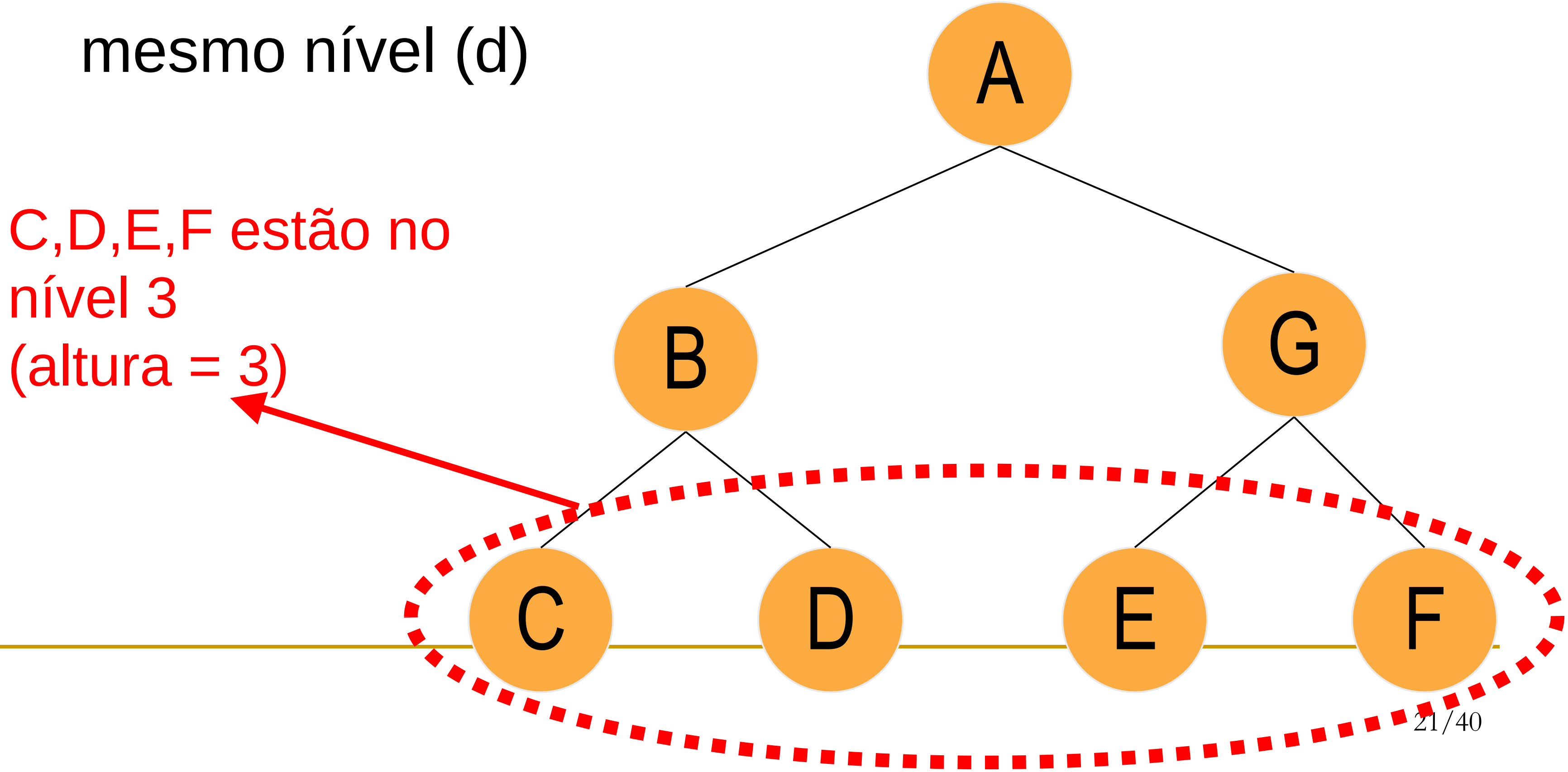
Árvore Estritamente Binária

- Uma **Árvore Estritamente Binária** tem nós que têm ou 0 (nenhum) ou dois filhos
- Nós internos (não folhas) sempre têm 2 filhos



Árvore Binária Completa

- Árvore Binária Completa (ABC)
  - é estritamente binária, de nível d; e
  - todos os seus nós-folha estão no mesmo nível (d)



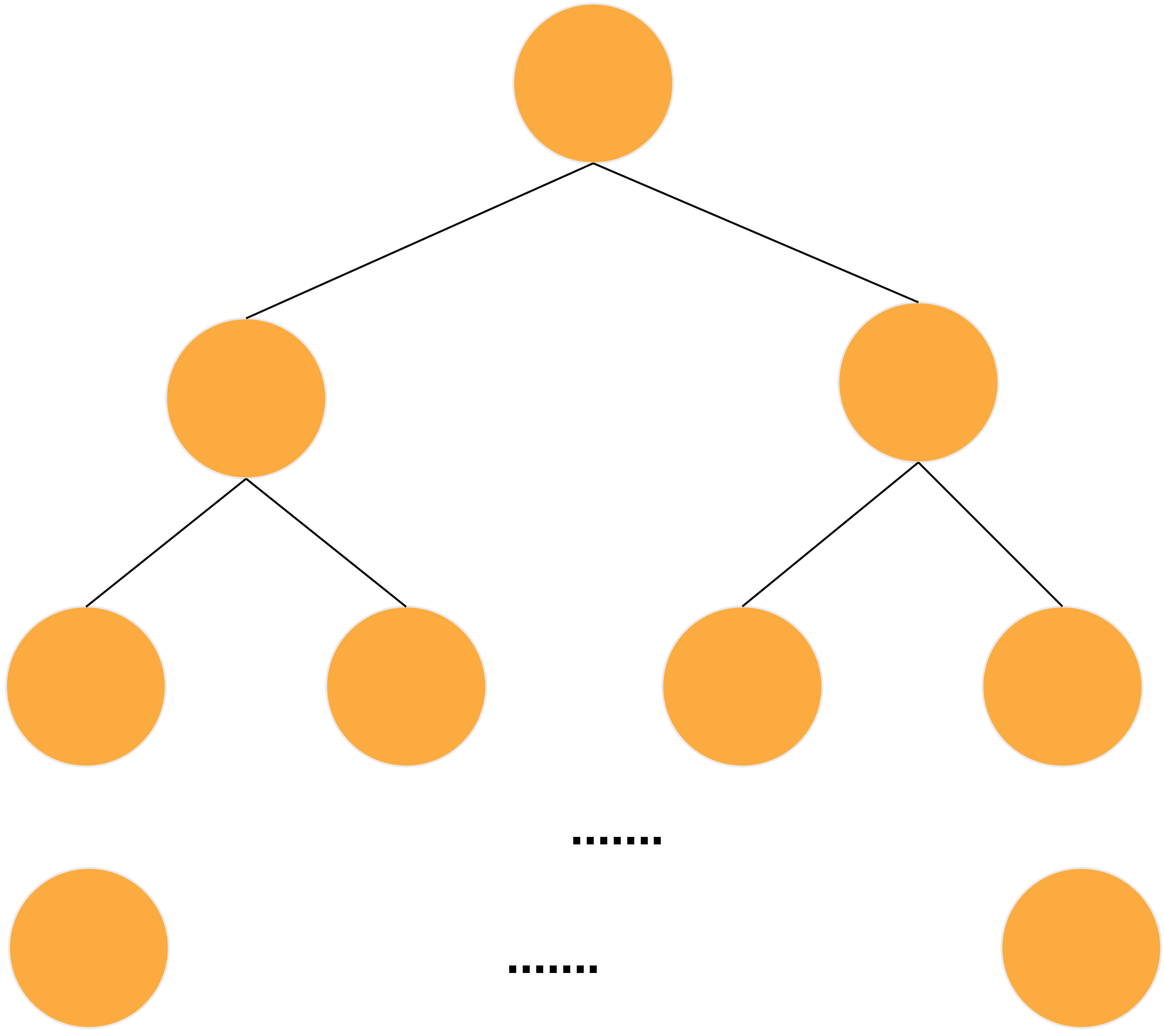
Árvore Binária Completa (cont.)

- Dada uma ABC e sua altura, pode-se calcular o número total de nós na árvore
  - p.ex., uma ABC com altura 3 tem 7 nós
    - Nível 1: => 1 nó
    - Nível 2: => 2 nós
    - Nível 3: => 4 nós
    - No. Total de nós = 1 + 2 + 4 = 7
  - Verifique que: se uma ABC tem altura h, então o número de nós da árvore é dado por:

$$\boxed{N = 2^h - 1}$$

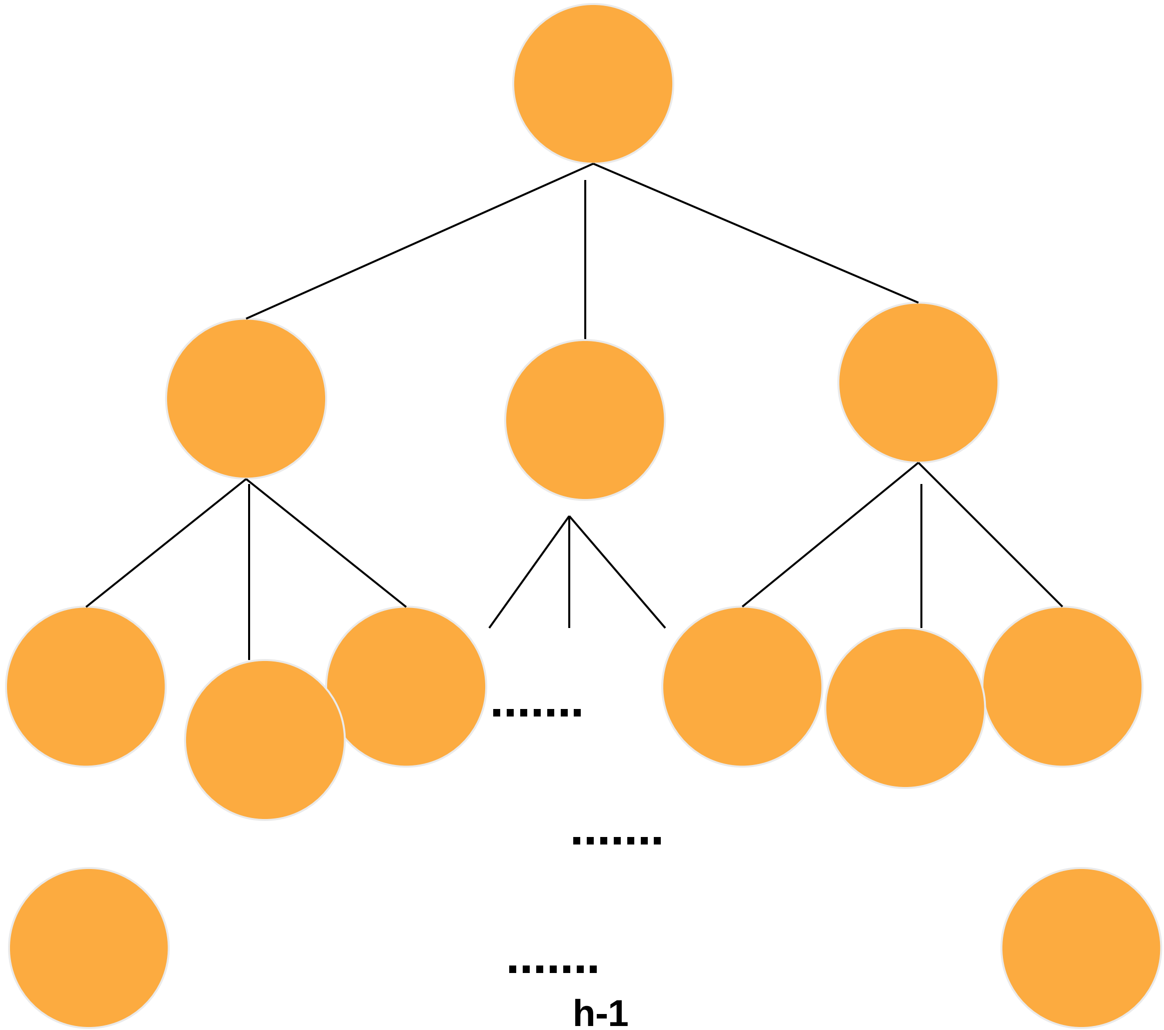
Nível — Número de nós por nível

Nível	Número de nós por nível
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
h	2^{h-1}



$$\therefore\ N = \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 2^h - 1$$

Generalize para Árvore Completa de grau **d** e altura **h**



Nível	Número de nós por nível
1	1
2	d
3	d^2
h	d^{h-1}

$$\therefore \; \mathbf{N(h)} = \sum_{i=0}^{h-1} d^i = \frac{d^h - 1}{d - 1}$$

Inversamente:

- Se **N** é o número de nós de uma Árvore Completa, de grau **d**, qual é a altura **h** da árvore?

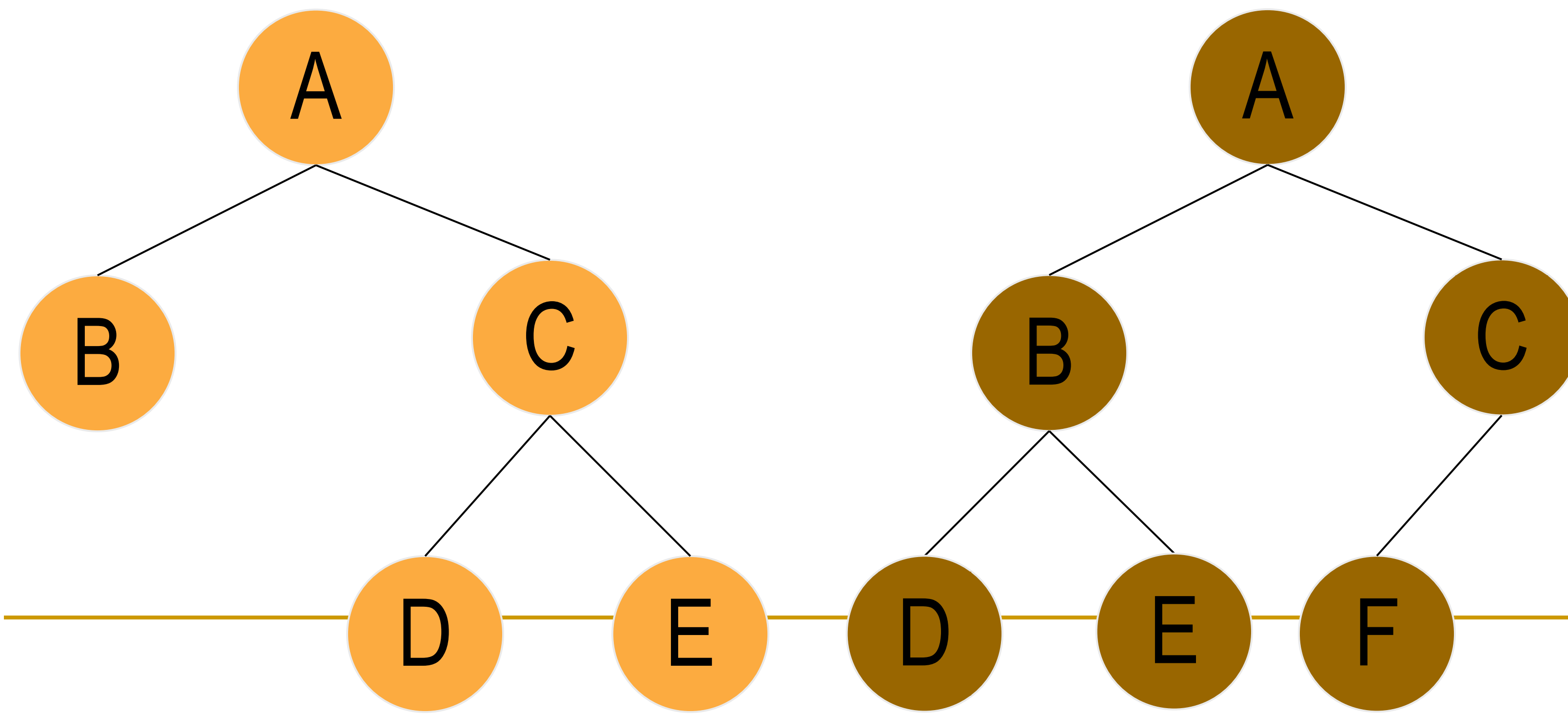
$$\mathbf{N = \frac{d^h - 1}{d - 1}}$$

$$\mathbf{h = \log_d(N.d - N + 1)}$$

para d=2: h = $\log_2(N + 1)$

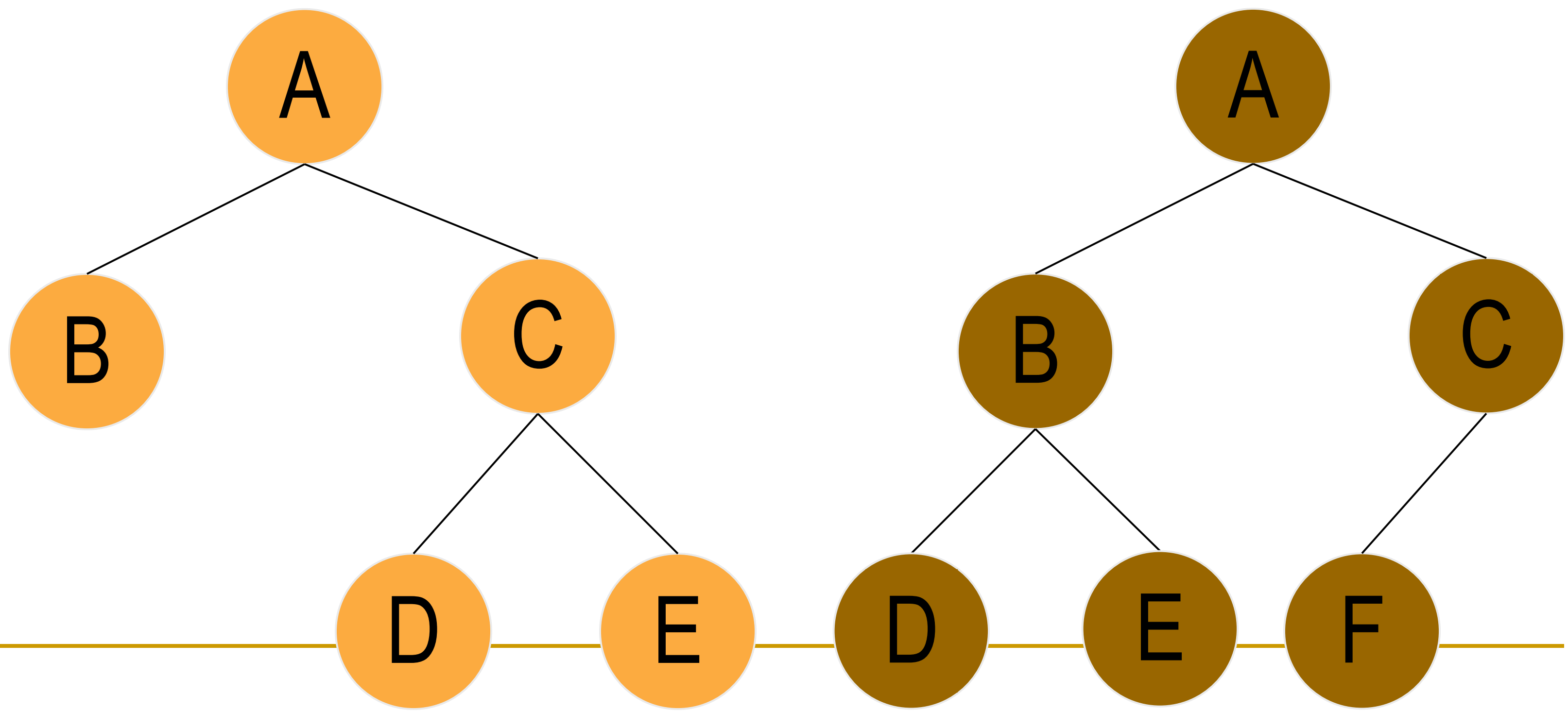
Árvore Binária Quase Completa

- **Árvore Binária Quase Completa**
  - Se a diferença de altura entre as sub-árvores de qualquer nó é no máximo 1.
  - Como consequência, se a altura da árvore é **d**, cada nó folha está no nível **d** ou no nível **d-1.**



Árvore Binária Balanceada

- Árvore Binária Balanceada
  - para cada nó, as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1

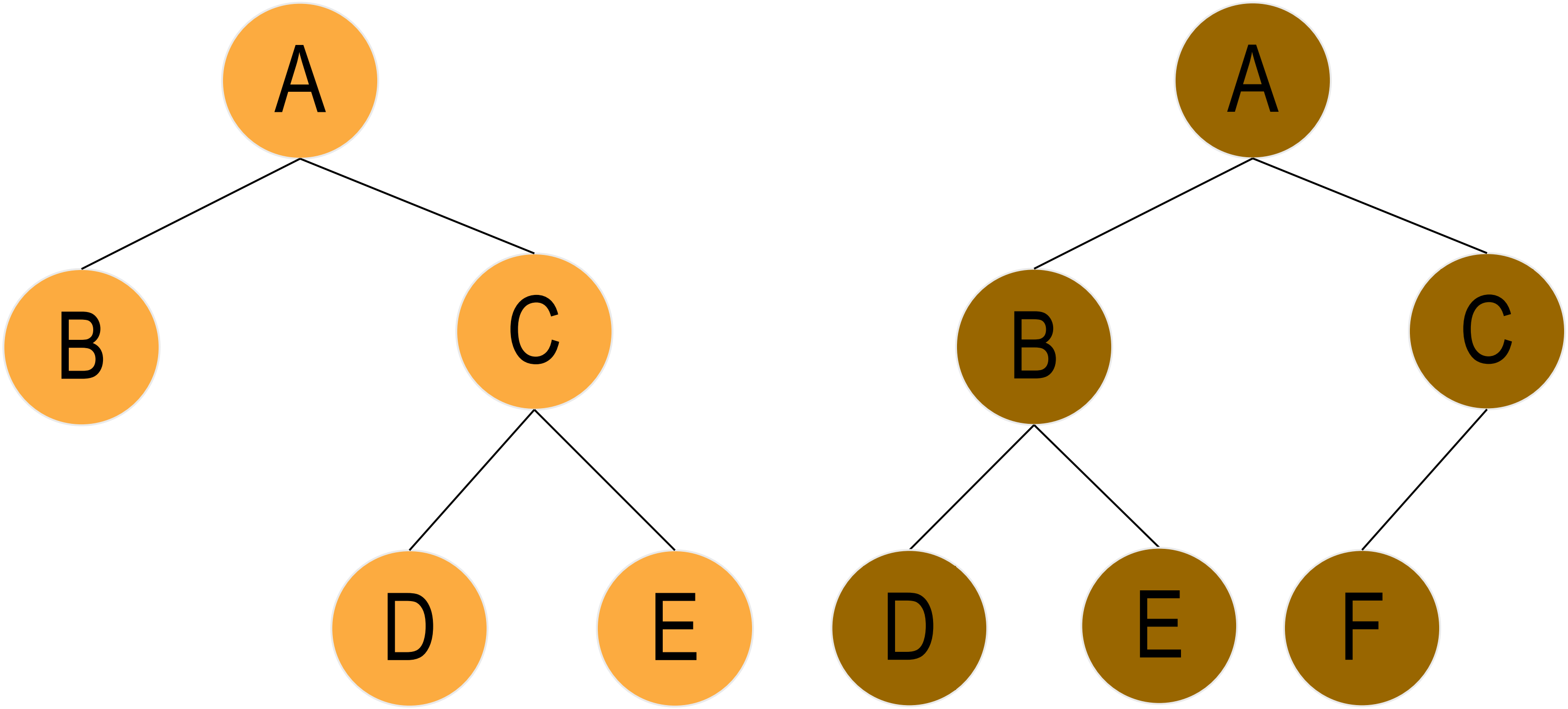


Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

- **Árvore Binária Perfeitamente Balanceada**: para cada nó, o número de nós de suas sub-árvores esquerda e direita difere em, no máximo, 1

- Toda AB Perfeitamente Balanceada é Balanceada, mas o inverso não é necessariamente verdade.
- Uma AB com N nós tem altura mínima se e só se for Balanceada.
- Se uma AB for Perfeitamente Balanceada então ela tem altura mínima.
  - Demonstre!!!!

Exemplo



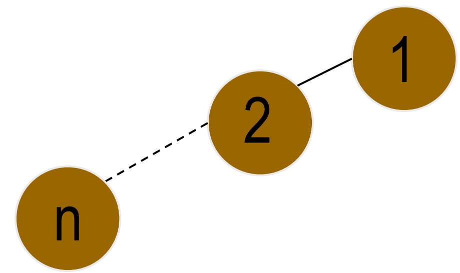
Árvore Balanceada

Árvore Perfeitamente Balanceada

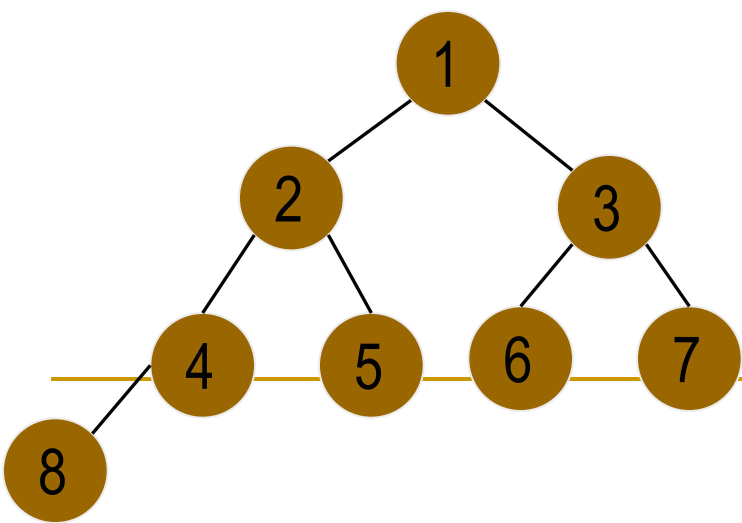
6 nós: $h_{min} = 3$

Questões

- Qual a altura **máxima** de uma AB com **n** nós?
  - Resposta: n
  - Árvore degenerada ≡ Lista



- Qual a altura **mínima** de uma AB c/ **n** nós?
  - Resposta: a mesma de uma AB Perfeitamente Balanceada com **N** nós



N=1; h=1

N=2,3; h=2

N=4..7; h=3

N=8..15; h=4

$$h_{min} = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$$

(maior inteiro ≤ $\log_2 N$) + 1

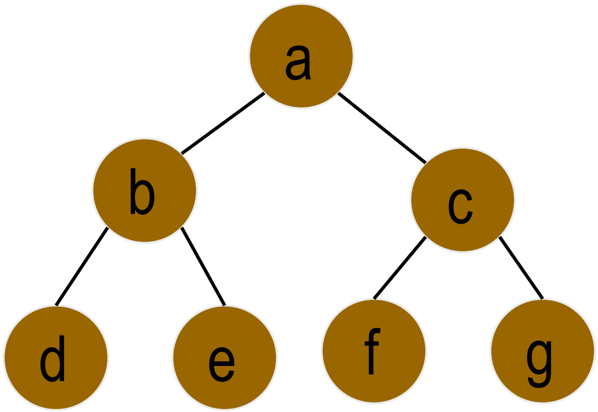
ou

$$h_{min} = \lceil \log_2 (N+1) \rceil$$

menor inteiro ≥ $\log_2(N+1)$

Implementação de AB Completa (alocação estática, seqüencial)

- Armazenar os nós, por nível, em um *array*

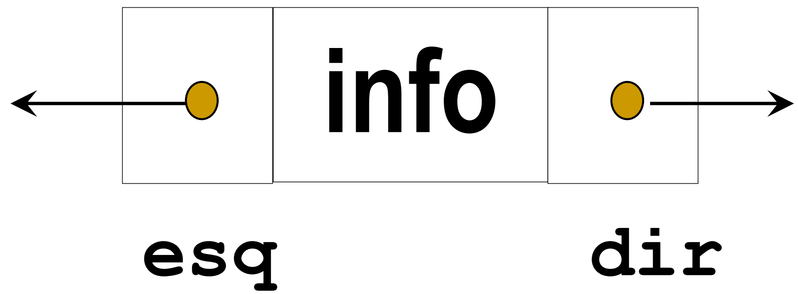


1	2	3	4	5	6	7		...
a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**		**...**

- Se um nó está na posição i, seus filhos diretos estão nas posições 2i e 2i+1
  - Vantagem: espaço só p/ armazenar conteúdo; ligações implícitas
  - Desvantagem: espaços vagos se árvore não é completa por níveis, ou se sofrer eliminação

Implementação de AB (dinâmica)

Para qualquer árvore, cada nó é do tipo

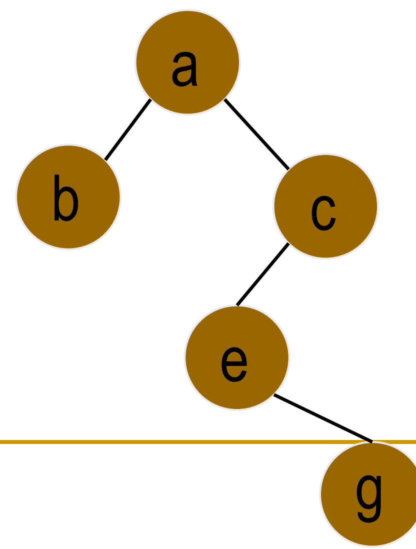


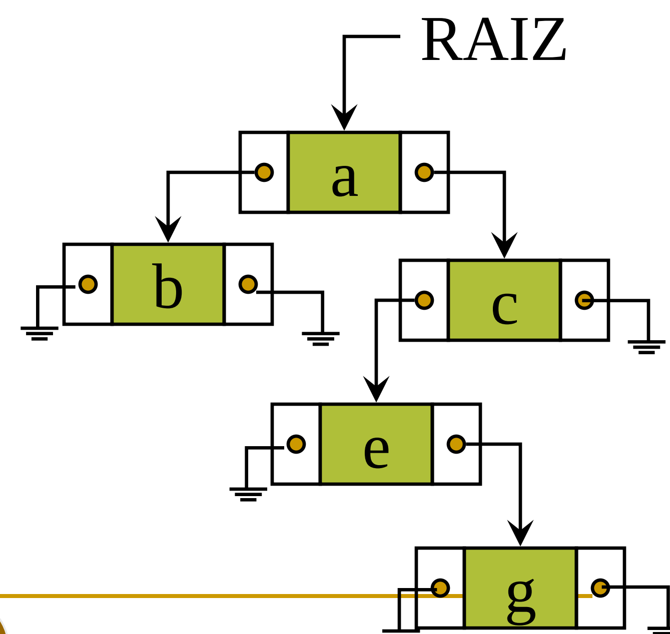

```
typedef struct no *pno;

typedef struct no{
    tipo_elem info;
    pno esq;
    pno dir;
}no;

typedef pno tree;

tree raiz;
```





Operações do TAD AB

```
void define (tree t){
    t = NULL;   /*Cria AB vazia*/
}

void cria_raiz(tree t, tipo_elem item){
    pno no = malloc(sizeof(no));
    no->esq = NULL;
    no->dir = NULL;
    no->info = item;
    t = no;
}

boolean vazia(tree t){
    return (t == NULL);
}
```

Função recursiva para calcular altura de uma árvore

```
int altura(tree r){

    if (r == NULL)
        return 0;

    int altE = altura(r->esq);
    int altD = altura(r->dir);

    if (altE > altD)
        return (altE + 1);

    return (altD + 1); /*altura = max(altE, altD) + 1*/

}
```

Função recursiva para verificar se uma AB é balanceada

```
boolean balanceada(tree r){

    if (r == NULL)
        return true;
    else
      if (r->esq == NULL && r->dir==NULL) /* r não tem filhos */
       return true;
      else
       if (r->esq!=NULL && r->dir!=NULL) /* r tem ambas subárvores não-nulas */
         {int dif = altura(r->esq) - altura(r->dir);
          return (balanceada(r->esq) && balanceada(r->dir) && ((dif
  ==0) || (dif ==1) || (dif == -1)));} /* recursão */
         else
           if (r->esq != NULL) /* tem um único filho - `a esquerda */
             return (altura(r->esq) == 1);
            else              /* tem um único filho - `a direita */
              return (altura(r->esq) == 1);
}
```

Função recursiva para calcular o número de nós de uma AB

```
int numeronos(tree r){

    if (r == NULL)
        return 0;

    int nE = numeronos(r->esq);
    int nD = numeronos(r->dir);

    return (nE + nD + 1);
}
```

Função recursiva para verificar se uma AB é perfeitamente balanceada

```
boolean perfbalanceada(tree r){

    if (r == NULL)
         return true;
    else
       if (r->esq == NULL && r->dir==NULL) /* r não tem filhos */
        return true;
       else
        if (r->esq!=NULL && r->dir!=NULL) /* r tem ambas subárvores não-nulas */
        {int dif = numeronos(r->esq) - numeronos(r->dir);
            return (balanceada(r->esq) && balanceada(r->dir) && ((dif ==0)
   || (dif ==1) || (dif == -1)));} /* recursão */
        return(perfbalanceada(r->esq) && perfbalanceada(r->dir);/*recursão*/
          else
            if (r->esq != NULL) /* tem um único filho - `a esquerda */
             return (numeronos(r->esq) == 1);
            else            /* tem um único filho - `a direita */
              return (numeronos(r->esq) == 1);
}
```

```c
/* Função p/ adicionar um filho à direita de um nó, cujo
    ponteiro é dado (pai). Se o nó não possui filho à
    direita, então cria esse filho com conteúdo "item" */
boolean insere_dir(tree pai, tipo_elem item){

    if (pai == NULL)
        return FALSE;

    if (pai->dir !=  NULL) {
        printf("já tem filho à direita");
        return FALSE;
    }

    tree no = malloc(sizeof(no));
    no->esq = NULL;
    no->dir = NULL;
    no->info = item;
    pai->dir = no;
    return TRUE;
}
```

OU

```c
cria_raiz(pai->dir, item);

return TRUE;
```

AB - Percursos

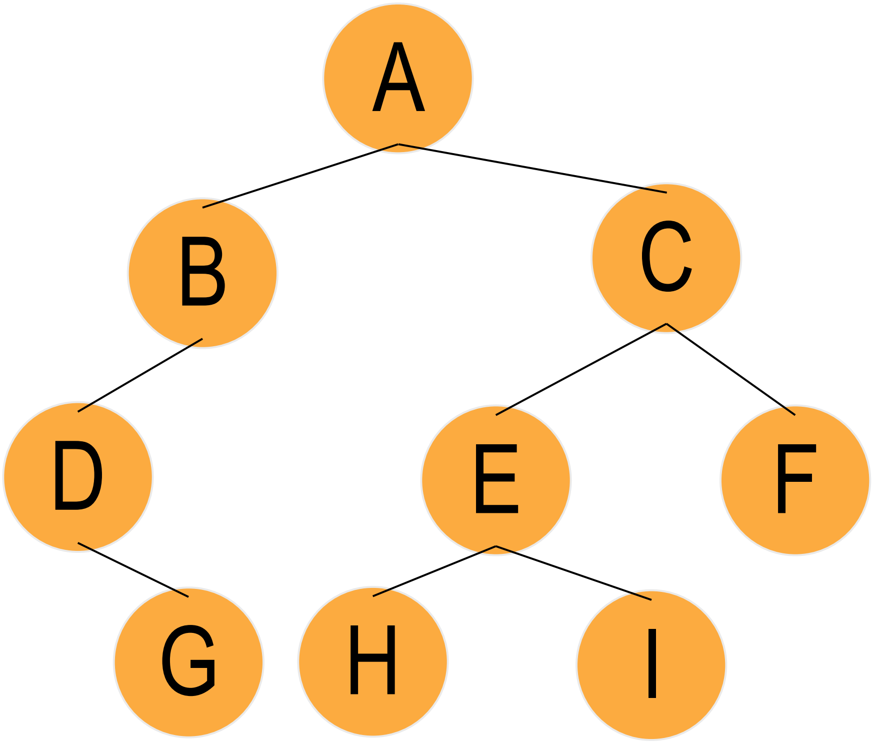
- Objetivo: Percorrer uma AB ‘visitando’ cada nó uma única vez. Um percurso gera uma seqüência linear de nós, e podemos então falar de nó predecessor ou sucessor de um nó, segundo um dado percurso.
- Não existe um percurso único para árvores (binárias ou não): diferentes percursos podem ser realizados, dependendo da aplicação.
- Utilização: imprimir uma árvore, atualizar um campo de cada nó, procurar um item, etc.

AB – Percursos em Árvores

- 3 percursos básicos para AB's:
  - pré-ordem (Pre-order)
  - in-ordem (In-order)
  - pós-ordem (Post-order)
- A diferença entre eles está, basicamente, na ordem em que cada nó é alcançado pelo percurso
  - “Visitar” um nó pode ser:
    - Mostrar (imprimir) o seu valor;
    - Modificar o valor do nó;
    - …

AB - Percurso Pré-Ordem

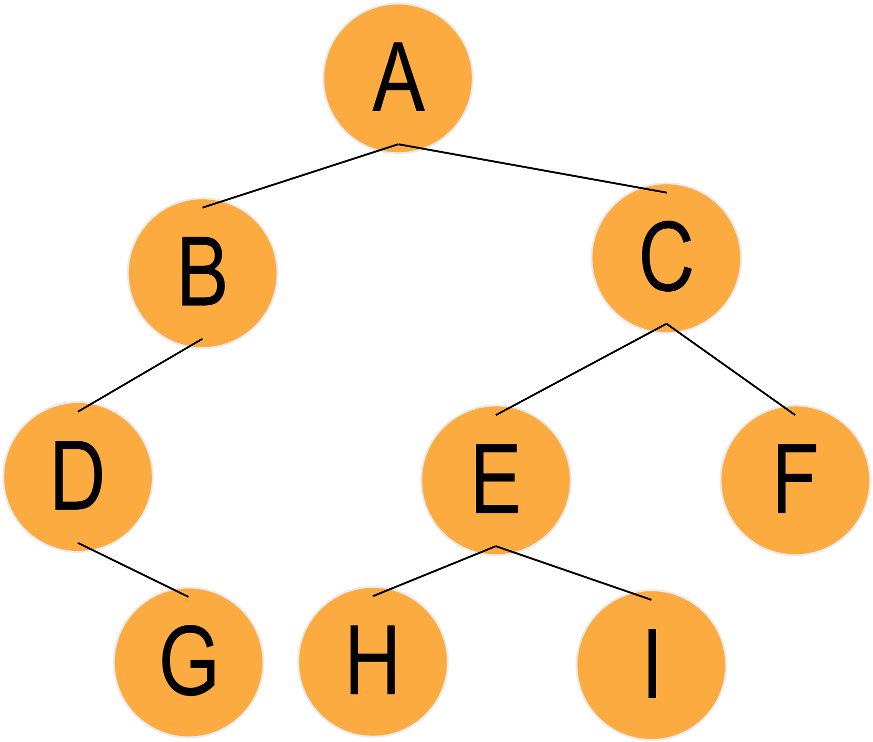
```
void pre_ordem(tree raiz){
    if (raiz != NULL){
        visita(raiz);
        pre_ordem(raiz->esq);
        pre_ordem(raiz->dir);
    }
}
```



Resultado: ABDGCEHIF

AB - Percurso Em-Ordem

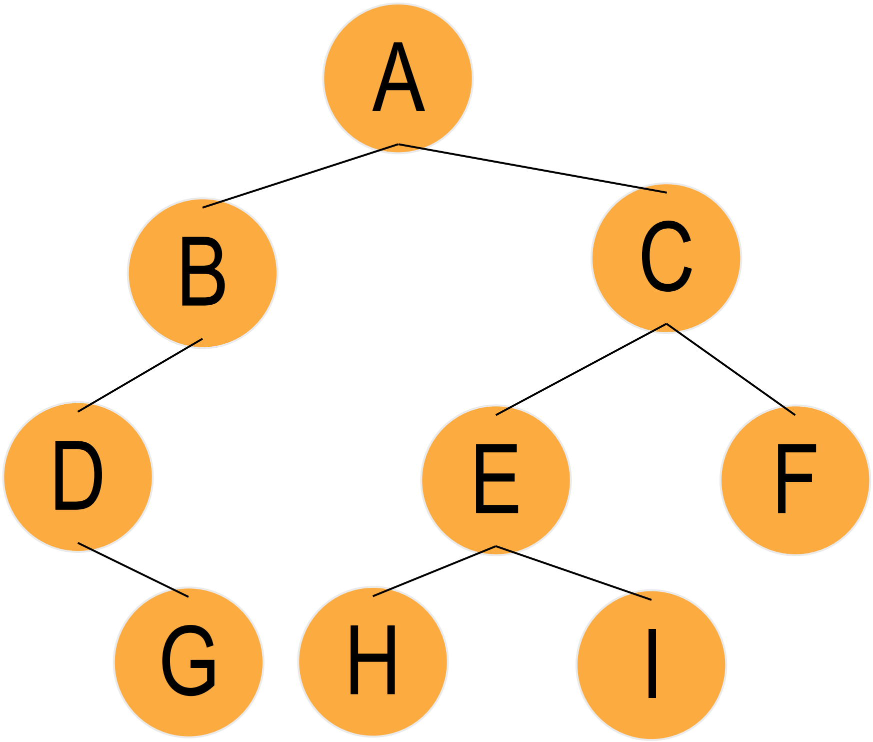
```
void in_ordem(tree raiz){
    if (raiz != NULL){
        in_ordem(raiz->esq);
        visita(raiz);
        in_ordem(raiz->dir);
    }
}
```



Resultado: DGBAHEICF

AB - Percurso Pós-Ordem

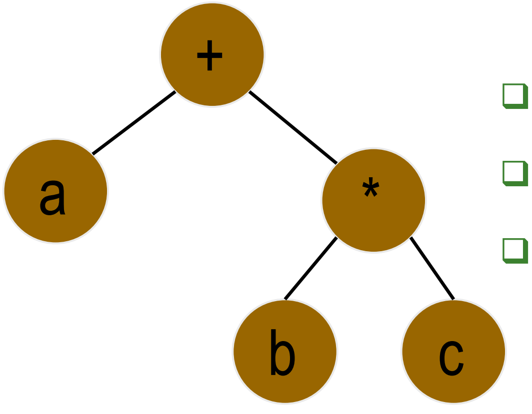
```
void pos_ordem(tree raiz){
    if (raiz != NULL){
        pos_ordem(raiz->esq);
        pos_ordem(raiz->dir);
        visita(raiz);
    }
}
```



Resultado: GDBHIEFCA

AB – Percursos

- Percurso para expressões aritméticas



- Pré-ordem: +a*bc
- In-ordem: a+(b*c)
- Pós-ordem: abc*+

- Em algoritmos iterativos utiliza-se uma pilha ou um campo a mais em cada nó para guardar o nó anterior (pai)

Exercícios

```
/* Função para procurar um nó cujo conteúdo seja "item" e
retornar seu endereço. Se não for encontrado, retornar
null. Usar o percurso pré-ordem para a busca. */

tree busca(tree t, tipo_elem item){

    if (t == NULL) return NULL; /* condição de parada
    if (t->info == item) /* visita a raiz
            return t;
    tree te = busca(t->esq,item);/*busca recursivamente em
pre-ordem
     if (te != null) return te;
    return busca(t->dir, item);

}
```

Exercícios

```c
/* Função para calcular o nível de um nó. Dado o valor de
um elemento, se ele está na árvore, retorna seu nível,
retorna null c.c. OBS.: Nivel da raiz = 1*/

int nivel(tree t, tipo_elem item){
    int n;
    boolean achou = FALSE;
    n = 0;

    travessia(t, &n, item, &achou);
    return n;
}
```

```c
/*percorre a árvore com raiz em ptr em Pré-ordem,
procurando pelo item dado e calculando e retornando seu
nível na variável n*/

void travessia(tree ptr, int *niv, tipo_elem item,
                                           boolean *achou){

    if (ptr != NULL){
        niv ++;
        if (ptr->info == item){
            *achou == TRUE;
             return;
         }
        travessia(ptr->esq, niv, item, achou);
        if (!*achou){
            travessia(ptr->dir, niv, item, achou);
            if (!*achou)
                niv --;
        }
    }
}
```

Exercícios

- Uma árvore binária completa é uma árvore estritamente binária?
- Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária completa?
- Escreva um procedimento recursivo que calcula a altura de uma AB.
- Verifique o que faz o procedimento enigma (a seguir)

```
void enigma(tree raiz){
    pilha *P;
    tree x, pont;

    define_pilha(P); /*P é uma pilha*/
    pont = raiz;
    boolean acabou = (raiz == NULL);

    while (!acabou){
        while (pont != NULL){
            visita(pont);
            push(pont, P); /*insere pont na pilha P*/
            pont = pont->esq;
        }
        if (!pilha_vazia(P)){
            x = topo(P); /*recupera o conteúdo do topo de P*/
            pont = x->dir;
            pop(P); /*retira o elemento no topo da pilha*/
        } else
            acabou = TRUE;
    }
}
```

Procedimento recursivo p/ destruir árvore, liberando o espaço alocado (percurso em pós-ordem)

```
void destruir(tree r){
   if (!vazia(r)){
        destruir(r->esq);
        destruir(r->dir);
        free(r);
     }

   r = NULL;
}
```