

SMA 0333 Cálculo III - Lista 2

Prof. Dr. Nivaldo G. Grulha Jr

Estagiário PAE: Northon C. L. Penteado

1. Podemos afirmar que se a sequência $\{a_n\}$ satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$?
2. Suponha que exista $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_1.$$

Prove que:

- (a) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
 - (b) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$
3. Mostre, pela definição de limite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n-2} = \frac{2}{3}$.
 4. Mostre, pela definição de limite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{2n-3} = \infty$.
Sugestão: Use o fato que $\frac{n^2+n+1}{2n-3} > \frac{n^2+n}{2n}$.
 5. Verifique se é possível construir duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = c$ mas $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ não existe.
 6. Se R\$1000,00 forem investidos a uma taxa de juros de 6% compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1000(1,06)^n$. Essa sequência converge ou diverge?
 7. Mostre que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$ então $\{a_n\}$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
 8. Considere uma sequência de termo geral a_n e suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

9. Suponha que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a.$$

Sugestão: Utilize o exercício 7 e a identidade $x = e^{\ln x}$.

10. Mostre que:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \infty$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$;
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3} \right) = 0$;
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^5} + \frac{2}{n^5} + \dots + \frac{n^2}{n^5} \right) = 0$

11. Sejam $\{a_n\}$ uma sequência de Cauchy e $\{a_{2n}\}$ uma subsequência de $\{a_n\}$ convergente para a . Mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge para a .

12. Seja $\{a_n\}$ uma sequência que tem a seguinte propriedade:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\{a_n\}$ é convergente.